



 20.1001.1.26764830.1401.4.13.6.1

بررسی وضعیت تکاملی علم ریاضی در عصر ایلخانان

زیبا خیراله پور^۱ / محمدرضا شهیدی پاک^۲ / محمد دشتی^۳

(۱۰-۲۶)

چکیده

بخش مهمی از زایش و پویای علوم ریاضی کلاسیک، مدیون ایرانیان در فرایند تمدن اسلامی است که در پی اجرای سیاست و درایت دولت‌ها و دانشمندان عصر بویهی، سلاجقه و ایلخانی به دست آمد، بنابراین می‌توان گفت: از پدیده‌های مهم تاریخ علم و تاریخ اجتماعی دوره میانه اسلامی، توسعه فوق-العاده و هم‌زمان علوم ریاضی و مذهب تشیع در عصر ایلخانی است که اغلب با تدبیر سیاسی-علمی خواجه نصیرالدین طوسی همراه بود. مغولان که برخی از مورخان نحوه و آثار ورود آنان به ایران را با تصرف آن توسط اعراب مسلمان مشابه می‌پندارند، مرحله‌ای از تحول و تطور تاریخ علوم ریاضی را در ایران رقم زدند. مراغه و تبریز به مرکز فعالیت دانشمندان و پایتخت علمی ایلخانی مبدل گشت و علوم عقلی و نقلی اسلامی و خاصه علوم مربوط به شیعی توسعه شگرفی یافت، موضوعی که به روشنی تبیین نشده است، از این‌رو، مقاله حاضر در صدد است به روش توصیفی-تحلیلی و با مطالعات کتابخانه‌ای به این سؤال پاسخ دهد که: جزئیات دستاوردهای علمی در حساب، جبر، هندسه و مثلثات چه بوده است؟ یافته‌های این پژوهش، نشان می‌دهد در این دوره، با اوج‌گیری تولید ارضاد و نگارش زیج‌ها به چنان نوآوری‌های شگفت‌انگیزی دست پیدا کرد که به کالای رایج صادراتی به اروپا تبدیل گشت.

واژه‌های کلیدی: خواجه نصیر، ایلخانی، شیعه، علوم ریاضی و مراغه.

۱. دانشجوی دکتری تاریخ و تمدن ملل اسلامی، دانشکده علوم انسانی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قم، قم، ایران.

ziba.kheyrollahpour@gmail.com

۲. استادیار گروه تاریخ، دانشکده ادبیات و علوم انسانی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز، تهران، ایران. (نویسنده مسئول)

reza2018mreza@iau.ac.ir

۳. استادیار گروه تاریخ اسلام، دانشکده فقه و معارف، جامعه المصطفی العالمیه (ص) قم، قم، ایران.

dr.dashti400@yahoo.com

مقدمه

مغول‌ها سه بار به ایران، لشکر کشیدند. حمله سوم، در ۶۵۴ قمری به فرماندهی هلاکو نوه چنگیز صورت گرفت. هلاکو در این حمله، طالقان و الموت را در اختیار گرفت، آخرین شیخ الموت را کُشت و اسماعیلیان را برانداخت، سپس، بغداد را محاصره کرد و بر المستعصم بالله (حک: ۶۵۶-۶۴۰ قمری) آخرین خلیفه عباسی پیروز گشت. در پی آن، هولاکو به وکالت و نیابت از خان مغول، حکمرانی ایران، عراق، قفقاز و آناتولی را به دست گرفت، لقب ایلخان یافت و دولت ایلخانیان (حک: ۶۵۴-۷۵۰ قمری) را بنیاد نهاد. (باسورث، ۱۳۷۱: ۲۲۷) پس از آن، احیای مجدد علمی-فرهنگی در همسویی بین ایلخانیان و وزیران و دانشمندان ایرانی چون خواجه نصیرالدین طوسی (۶۷۳-۵۹۸ قمری) رصدخانه مراغه (۶۵۷ قمری)، سَنَبِ غزانی (۷۰۲ قمری)، مدرسه سلطانیه (۷۱۵ قمری) و رَبِیع رشیدی (۷۱۸ قمری) ساخته شد و بدین‌سان تبریز و مراغه به مهم‌ترین مراکز علم و دانش ایلخانیان تبدیل گشت. (باسورث، ۱۳۷۱: ۲۲۸) در واقع، با تأسیس دولت ایلخانی نمونه کاملی از تمدن اسلامی با پیشرفت علوم، فلسفه و حکمت شیعی شکل گرفت اما در دوره سلجوقیان سنی مذهب به خموشی گرائید. (شهیدی‌پاک، ۱۳۹۸: ۱۲۳) هم‌زمان با دولت ایلخانی، اروپا سال‌های پایانی قرون وسطی را می‌گذراند و دانش ریاضی آنان تنها در سطح حساب و کتاب تاجران بود در حالی که در دوره ایلخانی، دانشمندان ایرانی با کنارگذاشتن اهمیت و جایگاه رفیع سحر، جادو و پیشگویی در مغولان، علم حساب، هندسه و مثلثات را به اوج خود رسیدند و پیشرفت‌هایی شگرف در کشف مجهولات ریاضی را رقم زدند، از این رو، مقاله حاضر در پی تبیین و تشریح شکوفایی علوم ریاضی (هندسه، حساب، مثلثات و جبر) دانشمندان ایرانی دوره ایلخانی است.

ادبیات موضوع

از پژوهش‌های شاخص در زمینه علوم ریاضی در دوره ایلخانی کتاب مقدمه بر تاریخ علم جورج سارتن (۱۳۸۳) است. او در این مجموعه شش جلدی می‌کوشد شرحی از پیشرفت علم و اندیشه علمی از سده نهم پیش از میلاد تا سده چهاردهم میلادی ارائه دهد. به باور وی تاریخ پیشرفت و گسترش علوم به عنوان اساسی‌ترین جنبه تمدن بشری است. در این اثر گرانسنگ، تنها به بخش اندکی از علوم ریاضی شرف می‌پردازد.

کتاب علم و تمدن در اسلام اثر سیدحسین نصر (۱۳۸۴) کوششی است درباره شاخه‌های مختلف علم در تمدن اسلامی به زبان ساده و خلاصه، در عین حال بر گرفته از آخرین پژوهش‌های علمی که در آن ریاضیات را در چشم انداز اسلامی همچون دروازه میان جهان محسوس و جهان معقول، و همچون نردبانی میان جهان تغییر و آسمان نمونه‌های عالی (اعیان ثابته) می‌شمارد. ناگفته پیداست که او بر روی علوم ریاضی دوره ایلخانی تمرکز ندارد.

روستا و محمودآبادی (۱۳۹۳) در مقاله نقش و جایگاه منجمان و ریاضی دانان در اوضاع علمی ایران عصر ایلخانی نخست وضعیت دو علم نجوم و ریاضیات و سپس عملکرد دانشمندان این علوم در عصر ایلخانی را مورد واکاوی قرار داده و در گام دوم به تبیین جایگاه و پایگاه این دانشمندان و آثار آنان در نزد ایلخانان مغول پرداخته‌اند. نویسندگان به جای بررسی وضعیت ریاضی درصدد پاسخ به این سؤال اند که نجوم و ریاضیات، چه وضعیتی در دوره ایلخانی داشته‌اند؟

ترکمنی آذر در مقاله مراکز علمی در دوره ایلخانیان (۱۳۸۶) بر آن است که: عدم گرایش و پای‌بندی مغولان به دین و مذهبی خاص به رشد و باروری همه گروه‌های اعتقادی و فکری و فرهنگی در ایران انجامید و نوعی مساوات و آزادی نسبی در تحصیل علوم برای همه پیروان ادیان و فرق مذهبی برقرار گردید و دانشمندان بسیاری در مراکز علمی و مدارس شهرهای بزرگ این دوره گرد هم آمدند، از این رو، نویسنده به تنها به بررسی مدارس و مراکز علمی مهم این دوره چون رصدخانه مراغه، ربع رشیدی و مدرسه سلطانیه می‌پردازد و بررسی علوم ریاضی چون حساب و هندسه بازمی‌ماند.

دهقان نژاد و همکاران در مقاله پیامد حمله مغول و حاکمیت ایلخانیان بر سنت علمی در ایران (۱۳۹۷) اظهار کرده است: یورش مغول و حاکمیت آنان بر ایران به‌عنوان یکی از علل افول دانش در این سرزمین یاد شده در حالی که با حاکمیت ایلخانان، سنت علمی در ایران تحت تأثیر عوامل متعددی نظیر تسامح مذهبی ایلخانان و استیلای عقل‌گرایان بر نهادهای علمی و آموزشی تغییر یافت، از همین رو، در کنار علوم دینی، علوم عقلی در کانون توجه دانشمندان این دوره قرار گرفت؛ چنان‌که یکی از ادوار پررونق تاریخ ایران به لحاظ ساخت مراکز علمی و آموزشی و احیای دوباره فعالیت‌های علمی به‌ویژه در حوزه علوم عقلی رقم زده شد. در این مقاله بر شکوفایی علوم ریاضی توجه نشده است.

الهیوی نظری در پایان نامه کارشناسی ارشد "وضعیت علوم عقلی با تکیه بر ریاضیات و نجوم در ایران پس از حمله مغول تا صفویه" (۱۳۹۰) نوشته است: با حمله مغول و سقوط خلافت عباسی، ویرانی‌های بسیاری بوجود آمد که باعث شد برخی بر این باور باشند با حمله مغول علوم، بالاخص علوم عقلی

دچار رکود شدند در حالی که نگارنده با بررسی‌های به عمل آمده در این اثر، به این نتیجه نائل آمد که علوم عقلی به‌ویژه یاضیات و نجوم در این دوره رشد یافت. با مطالعه این پایان نامه در می‌یابیم که در آن: ریاضیات و نجوم بدون توجه به لزوم بررسی مستقل اجزای هر یک از این دو مورد بررسی قرار گرفته است.

واقعیت این است آثار دیگری که مورد بررسی اجمالی قرار گرفت بیش از آنچه یافته‌های آثار مذکور نیست از جمله: کتاب تاریخ علم اثر مهدی فرشاد، کتاب زندگی‌نامه ریاضی‌دانان دوره اسلامی اثر ابوالقاسم قربانی، کتاب مفهوم علم در تمدن اسلامی محمدرضا شهیدی‌پاک و برخی آثار شرق‌شناسان چون: کتاب ریاضی‌دانان و منجمان دوره اسلامی اثر هانریش زوتر، کتاب علم الفلك نالینو، به علاوه، پایان‌نامه نقش و جایگاه منجمان و ریاضی‌دانان در اوضاع علمی ایران عصر ایلخانی اثر مهدیه محمود آبادی، پایان‌نامه علوم عقلی در عصر مغول اثر زهرا باقری، مقاله «جایگاه شهر آموزشی مراغه در تاریخ علوم و تعلیم و تربیت اسلامی در عصر دولت ایلخانی در قرون وسطی» و «نقش خواجه نصیرالدین طوسی در آخرین مرحله تکامل علوم پایه» اثر محمدرضا شهیدی‌پاک، بررسی انگیزه‌های تجدد علمی در دوره ایلخانان (مطالعه موردی: ربع رشیدی) اثر بهرام کارجو اجیرلو و حبیب محمدنژادچاوشی اما همان‌گونه که پیش از این گفته‌ایم؛ ویژگی متمایز مقاله حاضر با همه آثار بررسی و نامبرده شده تمرکز به حساب، هندسه و جبر در دوره ایلخانی است.

بررسی‌های مفهومی

دو واژه علوم ریاضی و سلسه ایلخانی را از آن جهت نیازمند توضیح می‌دانیم که این دو، از کلمات کلیدی مقاله حاضر به شمار می‌روند که تشریح آن، درک بهتری از مباحث پیش‌رو در اختیار می‌گذارد:

۱. **علوم ریاضی:** به گستره وسیعی از علمی که زمینه اصلی آن‌ها ریاضی است، علوم ریاضی^۴ اطلاق می‌شود. امروزه، علوم ریاضی، علم آمار، علم محاسبات، علم کامپیوتر، علم مهندسی و نظایر آن را در بر می‌گیرد لذا، علوم ریاضی نوین، با تمرکز بر علم ریاضی، تنها به آن بسنده نمی‌کند. لاقلاً بخشی از علم فیزیک نظری و حتی علم رمزشناسی و علم پزشکی و علم نظامی را نمی‌توان بدون علوم مرتبط به ریاضیات درک کرد، حتی آمیختگی برخی علوم با ریاضیات به حدی رسیده که موجب شکل‌گیری رشته‌ها و مؤسسات تحقیقاتی ترکیبی چون مؤسسه تحقیقات ریاضی و فیزیک نظری شده است در

حالی که علم ریاضی در دوره پیش از ایلخانی و در دوره ایلخانی و بعد از آن، به فن نظریه اعداد (جبر)، محاسبه فضا (هندسه) و آنالیز تغییرات (هندسه) خلاصه می‌شد و این امر، به تداوم نیاز بشر به جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، محاسبه مساحت و حجم اجسام و ... برمی‌گردد. (تاتاری و شیخ کیاسرای، ۱۳۸۸: ۱۶۲) به هر روی، مراد نگارندگان از علوم ریاضی در این نوشتار، علم حساب، علم جبر، علم مثلثات و علم هندسه است.

۲. **سلسله ایلخانی:** هلاکوخان با فتح ایران و عراق، سلسله ایلخانی را بنیاد نهاد که ۷۶ سال به درازا کشید. ایلخانان در بزرگ‌ترین وسعت خود، بخش‌هایی از عراق، سوریه، ارمنستان، گرجستان، افغانستان، ترکمنستان، پاکستان، بخشی از داغستان و تاجیکستان امروزی را در برمی‌گرفت. ایلخانیان که جایگزین خوارزم‌شاهیان در ایران شدند، پس از هلاکوخان، اباقاخان، تکودار، ارغون خان، گیخاتو، بایدو، غازان خان، اولجایتو و ابوسعید به تاج و تخت دست یافتند. با مرگ ابوسعید در سال ۷۸۶ قمری کمتر از ده شاهزاده مغولی به سلطنت رسیدند اما هیچ یک نتوانستند سلسله ایلخانی را ثبات و پایداری برگردانند در عوض، دوره ایلخانی، شاهد رشد و حضور دانشمندان برجسته‌ای مانند خواجه نصیرالدین طوسی، شیخ جمال‌الدین مطهر حلی و مورخینی چون: عطا ملک جوینی، رشیدالدین فضل‌الله همدانی، داوود بناکتی، حمدالله مستوفی و نظایر آن بوده است، (اشپولر، ۱۳۵۱: ۶۵) بنابراین، نویسندگان مقاله دوره ایلخانی در ایران را از هلاکوخان تا اندکی پس از مرگ ابوسعید می‌دانند.

سیمای اجمالی علوم و سیاست علمی دولت ایلخانان

توسعه و رشد علوم در پرتو نیاز جامعه، حمایت حاکمان و تأیید اندیشه‌های دینی صورت می‌پذیرد. بی‌شک، فقدان این عوامل یا غیبت برخی از آن‌ها، به تنگ شدن دایره علوم عقلی در دوره‌های پیش از حمله مغولان به ایران گردید، (موسوی، ۱۳۸۰، ج ۱۰: ۷۱۰) و این امر، ناشی از خواست سلسله‌های ترک نژاد سنی مذهبی چون سلاجقه بود که علوم عقلی را از دایره تعلیم و تعلیم خارج کردند و در این کار، اندیشمندانی چون غزالی به کمک سلاطین آمدند، به طوری که امام محمد غزالی استاد مشهور نظامیه بغداد، ریاضیات و فلسفه را از دایره علوم مورد نیاز مسلمانان خارج کرد و اشتغال به آن‌ها را حرام دانست، (صفا، ۱۳۷۱: ۱۴۹) لذا تا آمدن مغولان، علوم عقلی به انزوا رفت و بازار علوم نقلی در شرق سرزمین‌های اسلامی رواج یافت در عوض، فرمانروایان ایلخانی به علمی توجه کردند که امید داشتند

که از آنان بتواند برای بهبود زندگی دنیوی خود بهره‌مند شوند و چنین رویکرد یا سیاستی از ایلخانان دنیاگرا چندان دور از انتظار نبود. (اشپولر، ۱۳۵۱: ۴۳۷)

اهمیت یافتن نجوم و پزشکی در حاکمان و درباریان ایلخانی، منطبق بر نگاه آنان به ارتقای زندگانی مادی و جسمی، قابل تفسیر است. علاقه ایلخانان به طب و اخترشناسی به توسعه آن دو در ایران کمک شایان کرد. در منابع تاریخی از علاقه منکو برادر هلاکو خان به ریاضیات و از علاقه هلاکو خان به جبر هیئت (نجوم) سخن رفته است. در سایه علاقمند شدن هلاکو خان و اباقا خان به نجوم، آن دو به بنیان‌گذاری رصدخانه مراغه تن دادند. عبدالله بن فضل‌الله، نویسنده کتاب وصاف الحضرة، در کتاب خود آورده است:

خواجه هولاکو خان را به این کار یعنی ساخت رصدخانه تشویق کرد و اول هولاکو خان به این کار مایل نبود و پرسید که فایده نجوم در چیست؟ آیا چیزی را که وقوعش حتمی است، بر طرف می‌کند؟ دانشمند طوسی با ذکر مثالی هولاکو خان را قانع کرد و گفت دستور بدهید یک نفر طشت بزرگی از مس را از بالای عمارت بیندازد پایین؛ بدون اینکه قبلاً اهل مجلس بدانند. هولاکو خان دستور داد که این کار را انجام بدهند. زمانی که طشت از بالا افتاد، تمام اهل مجلس ترسیدند؛ بجز هولاکو خان و خواجه نصیرالدین طوسی. بعد گفت که فایده علم نجوم در این است که حوادث را پیش از وقوع بیان می‌کند؛ در نتیجه مردم وحشت نمی‌کنند. هولاکو خان خوشش آمد و دستور ساخت رصدخانه را داد. (زنجان، ۱۳۲۵: ۹۴)

ارغون خان دیگر سلطان ایلخانی به کیمیا، نجوم، سحر و جادو مثل اغلب سلاطین مغول عقیده‌ای راسخ داشت. هرچند تا دوره این سلطان ایلخانی، علاقه به علوم نقلی یا علوم غیرعقلی در میان آنان دیده می‌شد اما به تدریج علوم عقلی، جای آن را می‌گرفت یا لااقل در میان علوم نقلی، جایی برای خویش یافت. (اشپولر، ۱۳۵۱: ۲۴۲) طب و نجوم به ریاضیات نیازمند است، از این رو، نقد یا سخن علمی منجمین بر دانش حساب، هندسه، مثلثات، میکانیک و فلسفه قرار داشت اما علت دیگری که به رواج علوم ریاضی کمک کرد نیاز عمومی مسلمانان به تعیین دقیق اوقات شرعی، یافتن جهت قبله و نیز نیاز به رؤیت هلال ماه بود، (چلونگر و خزائیلی، ۱۳۹۶: ۴۷) بنابراین، علوم ریاضی به مثابه علمی پایه، مورد توجه رعایا و سلاطین قرار گرفت.

علوم ریاضی در اروپای قرون وسطی

مقارن با حکومت ایلخانی، اروپا، قرن پایانی وسطی را می‌گذارند. در مجموع، کاربرد علوم در اروپای قرون وسطی اندک بود و آن گونه که جورج سارتن^۵ گفته است: اغلب اوضاع در دست صنعت‌گران بود تا عالمان علم (سارتن، ۱۳۸۳، ج ۱:۳۱) و نیز، در اروپای غربی زمانه شارلمانی^۶، فعالیت ریاضی بسیار کمی وجود داشت، به آن دلیل که بیشتر میراث یونان باستان از بین رفته بود. البته در صومعه‌ها و مدارس مرتبط به آن، آموزش ریاضی دیده می‌شد اما سطح آن بسیار پایین بود و اغلب از حساب و هندسه ابتدایی تشکیل می‌شد تا حدی که عناصر ریاضیات اقلیدس^۷ هم ناشناخته باقی مانده بود. ریاضیات کاربرد محدودی داشت به گونه‌ای که ریاضیات تنها برای محاسبه عید پاک به کار می‌رفت.

به تدریج اروپایی‌ها به فکر افتادند تا از ثروت فکری به‌جای مانده از مسلمانان اندلس، برای افزایش توانایی‌های علمی و ریاضی بهره‌گیرند، از این‌رو، مراکز علمی و افراد جویای علم، به سیل ترجمه علوم از مسلمانان پیوستند. اولین دانشمندان مهمی که به بررسی دانش عربی پرداختند پاپ سیلوتر^۸، کنترا اکتوس^۹، کنت تین^{۱۰} و آلفونسو بایکل اسات^{۱۱} بودند که به ترجمه کتاب‌های ریاضیات، ستاره‌شناسی و پزشکی مسلمانان اندلسی پرداختند. به این شکل، پزشکی، ریاضی و نجوم از اسپانیا وارد اروپا شد. (شیرودی، ۱۳۸۶: ۴۶)

اولین ریاضی‌دان مهم در اروپای کاتولیک، لئوناردو پیزا^{۱۲} (۱۱۷۰-۱۲۴۰ میلادی/۶۳۷-۵۶۵ قمری) بود. او بخش‌هایی از ریاضیات اسلامی را به اروپا آورد. (katz, 2016:78) به علاوه، توسعه تجارت در ایتالیا که از قرن سیزدهم میلادی/ششم قمری آغاز شد، نیاز به نوعی متفاوت از ریاضیات محاسباتی را پدید آورد. در همین دوره، رشد و تکامل ریاضیات در تمدن اسلامی ادامه یافت و هم‌زمان با دوره ایلخانی و سده بعد از آن، مسلمانان غرب اسلامی ریاضیات را به آخرین مراحل تکامل رساندند،

5. George Sarton

۶. اولین امپراتور غرب پس از فروپاشی امپراتوری روم غربی بود.

7. Euclid

8. Pope Sylvester

9. Contra Actus

10. Kenneth Thien

11. Alfonso Baikal Asat

12. Leonardo Pisa

لذامغرب، اندلس و غرناطه به پل انتقال ریاضیات به اروپا مبدل شدند. (شهیدی پاک، ۱۳۹۸: ۸۷) همه این موارد دست به دست هم داد و زمینه‌های انفجار دانش ریاضی در اروپا را فراهم آورد.

علم حساب

شاخه‌ای از ریاضیات است که خواص ابتدایی عملکردهای سنتی معینی چون جمع، تفریق، ضرب و تقسیم را روی اعداد ثبت و ضبط می‌نماید البته توان و جذر در ریاضیات جدید، به عملکردهای پیشین علم حساب افزوده شده است. به علاوه، علم حساب درباره اعداد طبیعی، اعداد صحیح، اعداد گویا در شکل کسر و اعداد حقیقی به شکل بسط اعشاری هم بحث می‌کند. در مراحل بالاتر یا در علم حساب عالی، این علم بر روی نظریه اعداد شامل قابلیت تقسیم اعداد اول، همنهشتی، معادلات سیاله، دیفرانسیل و انتگرال که در فارسی آنرا حساب فاصله هم خوانده‌اند را گفتگو می‌نشیند. (مصاحب، ۱۳۸۱، ج ۱: ۸۳۴)

در آثار برجای مانده عصر ایلخانی، تلاش علمی ریاضی‌دانان در زمینه حساب و تأثیرات آنان در روند توسعه علم حساب مشهود است. تفاوت عصر ایلخانی نسبت به دوره و نسل قبلی ریاضی‌دانان نشان دهنده قدرت اندیشه علمی قابل ملاحظه آنان است. ریاضی‌دانان این عصر، چون: شرف‌الدین مظفر طوسی، ابن فلوس ماردینی، عزالدین زنجانی، احمد بن ثابت، جمال‌الدین صاعد ترکستانی، شرف‌الدین سمرقندی، سعد بیققی، قطب‌الدین شیرازی، امین‌الدین ابهری، ابوالعلائی بهشتی، شیخ محمد بن تنوخی، نظام اعرج نیشابوری انقلابی بزرگ در علم حساب پدید آوردند. در میانه دانشمندان ریاضی دوره ایلخانی، خواجه نصیرالدین طوسی سرآمد است. وی در کتاب جوامع الحساب بالتخت و التراب^{۱۳} قانون تشکیل ضریب‌های دو جمله‌ای خیام را بسط داد و به اثبات مجموع مجذورهای دو عدد فرد، عدد مجذور نیست، پرداخت.

این کتاب سه باب و هر باب آن چند فصل دارد: باب اول، در حساب اعداد صحیح، در دوازده فصل؛ باب دوم، در حساب کسرها به روش محاسبان (کسرهای متعارفی)، در چهارده فصل؛ باب سوم، در حساب کسرها به روش منجمان (کسرهای شصت‌گانی)، در دو مسلک: مسلک اول، به روش حساب

۱۳. حساب با تخت و تراب، روشی بود که از اوایل قرن سوم هجری در بین مسلمانان رایج بوده اما خواجه آن را توسعه داد. (شهریاری،

هندی (با شمارهای دهدهی)، در ده فصل، و مسلک دوم، به روش حساب جمل (با حروف ابجد)، در ده فصل (قربانی، ۱۳۷۵: ۴۹۰)

از ریاضی دانان شهیر این دوره، کمال الدین فارسی است. او پس از ابن هیثم، شاخص ترین چهره در علم اپتیک یا نورشناسی است. نام این دو، به دلیل تجدید نظر انتقادی کمال الدین در کتاب المناظر ابن هیثم به هم گره خورده است. کمال الدین به تبریز آمد و نزد قُطب الدین شیرازی، تحصیل کرد و سرانجام، اخترشناس و فیلسوفی برجسته در رصدخانه مراغه گشت. توجه کمال الدین به اپتیک تا حدی ارتقا یافت که بر دیدگاه فیلسوفان برجسته‌ای مانند خواجه نصیرالدین طوسی در مورد شکست پرتوها را زیر سؤال برد. منطق او یک منطق در چارچوب علم حساب بود از این رو مطرح کرد که ستاره‌ها در نزدیکی افق بزرگ‌تر از ارتفاعات بالاتر ظاهر می‌شوند. تأثیرگذاری وی بر علم حساب به ویژه بر نظریه اعداد، در آثارش کاملاً روشن است. در مهم‌ترین اثر وی اثبات دستوری است که ثابت بن قره در سده سوم برای یافتن دسته‌ای از عددهای متحاب^۱ بیان کرده است. (قربانی، ۱۳۷۵: ۴۰۱) اعداد متحاب مانند: مقسوم علیه‌های ۲۸۴ عبارتند از: ۱۲۰۴۰۷۱۱۴۲ که مجموعشان ۲۲۰ است و از طرف دیگر مقسوم علیه‌های ۲۲۰ عبارتند از: ۱۰۱۱۲۰۲۲۰۴۴۰۵۵۱۱۰ که مجموع این‌ها برابر ۲۸۴ است. فیثاغورسیان چنین اعدادی را اعداد متحاب (دوست‌دار هم) می‌نامیدند. فارسی در رساله مشهور تَذَكْرَةُ الْأَحْبَابِ فی بیان التحاب برخی قضایای بدیع نظریه اعداد را طرح و اثبات کرد و دست کم ۳۰۰ سال پیش از پیر فرما (مرگ: ۱۰۷۵ قمری) و تقریباً همزمان با این بنّا (مرگ: ۷۲۱ قمری) دو عدد متحاب ۱۷۲۹۶ و ۱۸۴۱۶ را به دست آورد. (کرامتی، ۱۳۸۰، ج ۱۰: ۶۶۹) فارسی، نخستین کسی بود که دستور محاسبه اجزای حاصل ضرب دو عدد طبیعی را در حالت کلی بیان و ثابت کرد. (قربانی، ۱۳۷۵: ۴۰۶) ریاضی - دان دیگری که زمینه اعداد متحاب کوشید شیخ محمد بن تنوخی (مرگ: ۷۴۸ قمری) است. (قربانی، ۱۳۷۵: ۲۰۳)

عزالدین زنجانی (مرگ: ۶۶۰ قمری) اثر ریاضی وی رساله الوفق التام نام دارد که درباره مربع‌های وقتی است. از دلایل پیشرفت علم حساب در زمینه مربع‌های وقتی توجه ریاضی دانان مسلمان و یهودی به خواص جادویی اعداد است. (سارتن، ۱۳۸۳، ج ۲: ۷۷۸) است. امروزه از این مربع‌ها در طراحی جداول سودوکو^۲ استفاده می‌شود. کلمه سودوکو مخفف Su-ji wa dokushin ni kagiru است که به

۱. دو عدد که هریک برابر مجموع همه مقسوم علیه‌های مثبت عدد دیگر، به جز خود عدد باشند.

به معنی این است که: "اعداد باید واحد باشند." بازی سودوکو شاخه‌ای از پازل چهارخانه‌ای جادویی است که انسان را از ابتدای تاریخ شیفته خود کرده اما در دهه‌های اخیر پرطرف دار شده است.

علم هندسه

شاخه‌ای از ریاضیات است که خواص، اندازه‌گیری، نسبت‌های میان خطوط، زوایا، سطوح و حجم‌ها را دربرمی‌گیرد و در آن، روش‌های اقلیدس به کار می‌رود. (مصاحب، ۱۳۸۱، ج ۲: ۳۲۹۴) در واقع، هندسه تا قرن‌ها و به طور سنتی، بر روی هندسه اقلیدسی استوار بود. کتاب اصول اقلیدس بر مبنای مؤلفه‌های فلسفی استوار بود که درک مفاهیم آن به دانش هندسه نیاز داشت. در دوره ایلخانی ریاضی-دانانی مانند: شرف‌الدین مظفر طوسی، شمس‌الدین محمد بن اشرف سمرقندی، قطب‌الدین شیرازی و چغمینی کوشیدند اصل پنجم اقلیدس (اصل توازی) را به‌عنوان یک قضیه ثابت کنند نه این که آن را یک اصل بدیهی بدانند. پیش‌تر خیام به این راه رفته بود اما خواجه‌نصیرالدین طوسی گام‌هایی جدی‌تری برداشت. وی از پایه‌گذاران هندسه نااقلیدسی به‌شمار می‌آید. (فرشاد، ۱۳۶۵، ج ۲: ۵۶۳)

قرن پنجم/ یازدهم که در آن سلجوقیان به قدرت رسیدند با پیدایش فتوری در توجه به ریاضیات در مدارس رسمی مقارن بود... [اما] پس از حمله مغولان است که در آن، بار دیگر علوم ریاضی، جوانی از سر گرفته بود. برجسته‌ترین چهره این دوره، نصیرالدین طوسی است. همان‌گونه که پیش از این دیدیم به پیشوایی و راهنمایی او بود که چند تن دانشمند و بالخاصه ریاضی‌دان در رصد مراغه گرد یکدیگر جمع آمده و به کار رصد و دیگر کارهای علمی مشغول شده بودند. (نصر، ۱۳۸۴: ۱۳۹)

طوسی در این باب دارای دو تألیف یکی تحریر اقلیدس و دیگری الرساله الشافیة عن الشک فی الخطوط /المتوازیه است. (فرشاد، ۱۳۶۵، ج ۲: ۵۷۳) در تحریر اقلیدس، به شرحی از اندیشه‌های حکمای پیشین در باب قضایای خطوط موازی پرداخته و سپس، خود نیز، نظریات خویش در این باره را ارائه کرده است. (فرشاد، ۱۳۶۵، ج ۲: ۵۶۳) در مجموع، اگرچه تلاش‌های صورت گرفته در این عصر در اثبات اصل پنجم هندسه اقلیدسی نافرجام ماند، اما این تلاش‌ها، پویایی اندیشه ریاضی‌دانان آن عصر را نشان می‌دهد و این اقدامات، الهام‌بخش ساکری (مرگ: ۱۷۳۳ میلادی) در پیشاهنگی هندسه غیراقلیدسی در قرن نوزدهم میلادی شد. (سارتن، ۱۳۸۳، ج ۲: ۷۸۱)

در اثر مساعی خواجه‌نصیرالدین طوسی بود که هندسه به شاخه‌ای از ریاضیات محض درآمد و از نجوم جدا شد. او در هندسه و مبحث خطوط متوازی تبصره وافر داشت. رساله فی الخطین الذین یقربان و لا

یلتقیان، تقسیم سطح یک مربع معلوم به یک مستطیل و سه دوزنقه به نسبت معین و (سارتن، ۱۳۸۳، ج ۲: ۲۸۰) و نیز، بحث کاملی درباره تقسیم دایره به چهار قسمت تحت شرایط معین ارائه می‌دهد. (سارتن، ۱۳۸۳، ج ۲: ۱۴۷۵)

علم جبر

جبر یا مقابله در لغت به معنای شکسته‌بندی، جبران و نیز به مفهوم یکی کردن تکه‌های شکسته است اما در ریاضیات آنچه را که به مطالعه نظریه اعداد، هندسه و آنالیز آن می‌پردازد، جبر نامیده می‌شود. جبر در دوران تمدن اسلامی شاخه‌ای از ریاضیات به شمار می‌رفت که موضوع آن استخراج مجهولات از معلومات از طریق به‌کارگیری روش‌های حسابی و هندسی است. همچنین، جبر به حساب چند جمله‌ای‌ها نیز می‌پردازد اما امروزه به دلیل تحولات و پیشرفت‌های حادث شده در علوم ریاضی، حل معادلات و حساب چند جمله‌ای‌ها تنها بخش کوچکی از جبر به شمار می‌رود.

جبر را نخستین بار ابوجعفر محمد بن موسی خوارزمی (مرگ: ۲۳۳ قمری) در کتاب *المختصر فی حساب الجبر و المقابله* آورده است. مراد وی از جبر، حذف مقادیر مساوی از دو طرف معادله و این معنا از جبر در دوره ایلخانی نیز جاری و ساری بوده است. جبر با ابوبکر محمد بن حسین کرخی (مرگ: ۴۲۰ قمری) توسعه یافت. او نخستین کسی است که جبر عبارت‌های مشتمل بر این توان‌های بالا را بسط داده است. آثار عمر خیام نیشابوری (مرگ: ۵۱۷ قمری) در جبر نقطه اوج جریان هندسی کردن جبر در جهان اسلام است. موضوع دو رساله برجای مانده خیام به طبقه‌بندی معادلات درجه سوم و حل هندسی آن‌ها می‌پردازد. روش شرف الدین مظفر طوسی در کتاب *المعادلات برخلاف خیام* که کلی است، تحلیلی و موضعی است. وی معادلات براساس ریشه مثبت نه منفی طبقه بندی کرد. (معصومی همدانی، ۱۳۹۸: ۲)

تبحر شرف‌الدین در جبر، بیشتر در ضرب و تقسیم اعداد جبری و حل انواع معادلات درجه سوم بود. رساله *المعادلات* در مورد معادلات مکعبی (درجه سه) بود اما او توسعه کلی کرخی را دنبال نمی‌کند، بلکه کمک اساسی او در این زمینه، مطالعه منحنی‌ها با استفاده از معادلات است که به شکل گیری هندسه جبری کمک کرد. در رساله *المعادلات*، معادله درجه حداکثر سه به ۲۵ نوع مختلف تقسیم شده است. در آغاز، طوسی دوازده نوع معادله درجه حداکثر دو را مورد بحث قرار می‌دهد. سپس به هشت نوع معادله مکعبی که همیشه جواب مثبت دارند و بعد به پنج نوع که ممکن است، جواب مثبتی نداشته

باشند را مورد بررسی قرار می‌دهد، البته استفاده طوسی از مشتق یک تابع به این منظور است منشأ استفاده ضمنی از مشتق را کشف کند، وی ادعا می‌کند، اثبات‌های جبری مبتنی بر رویه‌های تحلیلی است. در واقع، رویکرد نسبتاً متفاوتی، نه مشابه با مشتق مدرن، در روش طوسی نهفته است. طوسی سپس به ارائه روشی پرداخت که ما اساساً آن را روش روفینی-هورنر برای تقریب ریشه معادله مکعب می‌نامیم، اگرچه این روش توسط ریاضی‌دانان پیشین عرب برای یافتن تقریب‌های ریشه سوم یک عدد صحیح استفاده شده ولی طوسی اولین کسی است که از این روش برای حل معادلات کلی از این نوع استفاده کرده است. (JJO'Connor and EFRobertson, 1999:87)

خواجه نصیرالدین طوسی (مرگ: ۶۷۲ قمری) در رساله جبر و مقابله با حفظ دستاوردهای عالمان جبر به بسط آن پرداخت: باب اول در باره قواعد اصلی حساب است لذا، رابطه چندانی با جبر و مقابله پیدا نمی‌کند. شاید خواجه آن را از حیث مقدمه آورده تا درک باب دوم، راحت صورت گیرد. این باب، دارای چند فصل است. فصل اول درباره نوشتن اعداد صحیح و مراتب افزایش و کاهش آن است. در فصل دوم به چگونگی انجام اعمال تفریق، جمع، ضرب و تقسیم می‌پردازد. فصل بعدی، درباره چگونگی انجام هر یک از اعمال چهارگانه جمع، تفریق، ضرب و تقسیم اعداد صحیح، اعداد کسری و اعداد مخلوط سخن می‌گوید. در آخرین فصل باب اول، جذر و مجذور، کعب و مکعب مورد گفتگو قرار می‌گیرد. خواجه ضرب a در a را a به توان ۲ را کعب و a به توان ۳ را مکعب اطلاق می‌کند. بی‌تردید چنین دستاوردهایی در اتفاق و ارتقا معماری، شهرسازی و به طور مشخص در ساخت مناره‌ها، زیج‌ها، قوس‌ها و کمان‌ها و نظایر آن، تأثیرات شگرفی گذاشت.

عنوان باب دوم، استخراج مجهول یا حل معادلات است. این باب، دارای دوازده فصل است. فصل اول به تناسب پیوسته و گسسته و چگونگی پیدا کردن جزء چهارم تناسب مربوط است. در فصل دوم، مقدمات علم جبر و مقابله و معرفی انواع شش‌گانه معادلات در دو بخش مفردات و مقترنات بررسی می‌شود. در فصل سوم و چهارم به جمع و تفریق هم‌جنس عبارات‌های جبری و در فصل پنجم و ششم به تضعیف و تنصیف و فصل هفتم به ضرب عبارات‌های جبری منفی و مثبت و در فصل هشتم به تقسیم عبارات‌ها و در فصل نهم به جبر و مقابله و در فصل دهم به رد و تکمیل و در فصل یازدهم به مسائل شش‌گانه جبری و در فصل دوازدهم به حل بیست مسأله به روش جبر و مقابله می‌پردازد. (کاوه یزدی،

علم مثلثات

مثلثات شاخه‌ای از ریاضیات است که به روابط میان طول و زاویه‌های مثلث می‌پردازد. علت نام‌گذاری این علم به مثلثات به آن دلیل است که پایه آن، مثلث است که در آن مطالعه مثلث‌های مسطح، کروی، اضلاع و زاویه‌های آن‌ها مورد نظر است. مثلثات نخست در اخترشناسی مورد استفاده قرار می‌گرفت ولی امروزه کارکردهای در زمینه فیزیک، نجوم، نقشه‌برداری، ریاضیات محض و کاربردی دارد. (استرویک، ۱۳۶۶: ۶۷)

علم مثلثات از آغاز پیدایش همراه با علم نجوم رشد و توسعه پیدا کرد اما نخستین بار، خواجه نصیرالدین طوسی آن را در کشف القناع عن اسرار شکل القطع به حد کمال رساند، لذا علم مثلثات جدای از علم نجوم، عنوان یک علم مستقل یافت. این امر، به تنهایی پیشرفتی بزرگ در علم مثلثات به شمار می‌رفت، (نصر، ۱۳۸۴: ۱۵۱) از این رو، کتاب شکل القطع از اهمیتی خاص در علم مثلثات برخوردار است. در واقع، باید این کتاب را نخستین کتاب درباره مثلثات به صورت شاخه‌ای مستقل از علوم ریاضی دانست (شهریاری، ۱۳۷۸: ۱۱۲) در حقیقت، خواجه نصیر در جلد سوم و چهارم مجموعه پنج جلدی شکل القطع پیرامون مثلثات مسطحه و کروی پرداخت. خواجه در این کتاب اثبات کرد که از یک شکل قطاع هندسی می‌توان ۴۹۷ هزار و ۶۲۴ شکل هندسی دیگر به دست آورد. طوسی در شکل القطع به برخی از روابط مهم مثلثات کروی نیز پرداخت. طرح و اثبات قانون تانژانت‌ها از دیگر دستاوردهای ریاضیاتی مطرح خواجه نصیرالدین است. لذا باید گفت: شهرت فوق‌العاده خواجه نصیر در وهله اول به خاطر مثلثات او است. (سارتن، ۱۳۸۳، ج ۲: ۱۸۶۴)

خواجه نصیرالدین آثار مثلثاتی گذشتگانی چون بوزجانی و بیرونی را با یکدیگر تلفیق کرد و هر شش تابع مثلثاتی را بر مبنای یک مثلث و مستقل از قضیه منلائوس (مثلی که خطی آن را قطع کند) بدست آورد. (تاتاری، ۱۳۸۸: ۴۶) خواجه در این اقدام علمی، نخستین فرمول‌بندی صریح قانون سینوس در مثلث‌های مسطحه را با دو شیوه اثبات و شش قاعده اساسی برای حل مثلث‌های قائم الزاویه کروی را بیان کرد. (سارتن، ۱۳۸۳، ج ۲: ۱۸۶۵) در نتیجه، مثلثات در سده سیزده میلادی به یک نمایش تخصصی از مفهوم علم در تمدن اسلامی مبدل شد و از این جهت، ارائه تصویری بسیار عالی از علوم اسلامی بدون علم مثلثات میسر نیست، (شهیدی‌پاک، ۱۳۹۸: ۵۸) از این رو است که بسیاری از طلاب علوم دینی شیعه:

پس از خواندن شرح نصیرالدین طوسی بر کتاب اصول اقلیدس و مثلثات مسطحه، کروی، جبر و علم مناظر اقلیدس، با شرح خواجه طوس بر مجسطی بطلمیوس پایان می‌پذیرد و معمولاً در پی آن به کمی از نجوم جدید نیز توجه می‌شود. (نصر، ۱۳۸۴: ۶۵)

بعد از خواجه نصیرالدین طوسی دانشمندان مسلمانان با تلفیق و ترکیب جبر و هندسه، اصول هندسه تحلیلی را پدید آوردند به گونه‌ای که و برای حل برخی از مسائل جبری از هندسه و برای حل برخی از مسائل هندسی از جبر استفاده کردند. پس از آن، دانشمندان مسلمان مثلثات مسطحه و مجسمه را تکامل بخشیدند و برای توابع مثلثاتی جدول‌های صحیح دست و پا کردند و نیز، چند تابع مثلثاتی را کشف نمودند. (محمدی و خزائلی، ۱۴۰۰: ۹۷) بنابراین می‌توان گفت: کاربرد حساب جبر، احتمالات و ریاضی در حل معادلات و حل مسائل فیزیک، نیرو، شتاب و نیروی جاذبه که بعدها در جهان شرق و غرب اتفاق افتاد، مدیون و وامدار زحمات علمی، دقت و پشتکار خواجه نصیر است.

نتیجه‌گیری

علوم ریاضی با خوارزمی در قرن سوم/ نهم و با کتاب المختصر فی حساب الجبر و المقابله آغاز شد و با کندی که هم فیلسوف مشهوری بود و هم ریاضی‌دان متبحری و نیز با سرخسی، ماهانی و بنوموسی تکامل یافت. در قرن چهارم/ دهم ثابت بن قره هم به ترجمه آثار ریاضی‌دانان یونانی چون آپولونیوس، ارشمیدس و نیکوماخوس پرداخت و هم خود راه‌حلی برای اشکال درجه سوم یافت. بدین‌سان، سهمی بزرگ در به جلو بردن علوم ریاضی ایفا کرد. بوزجانی شرحی بر کتاب جبر خوارزمی نگاشت و به حل معادلات درجه چهارم نائل گشت. ابوسهل کوهی از دیگر برجستگان قرن چهارم/ دهم است که تحقیق کاملی در معادلات سه جمله‌ای درجه دوم دارد. شهرت ابن‌سینا در طبابت است اما او چون فارابی فیلسوف، چنان در موسیقی ایرانی به غور پرداختند که بعدها به شاخه‌ای از ریاضیات تبدیل شد. بیرونی معاصر ابن‌سینا، در رشته‌های عددی و تعیین شعاع زمین نامی آشنا است. سلجوقیان در قرن پنجم/ یازدهم همه دستاوردهای ریاضی گذشته را به سخره گرفتند و آن را به کنار نهادند اما نتوانستند مانع از ظهور خیام شوند. ملکشاه سلجوقی از او و جمعی از منجمان و ریاضی‌دانان برای اصلاح گاه‌شمار ایرانی معروف به تقویم جلالی کمک گرفت.

پس از یک وقفه طولانی از نشو و نمای علوم ریاضیات در دوره سلجوقی، این‌بار و در ایلخانان شاهد تغییرات تکاملی و رشد صعودی حساب، هندسه، جبر و مثلثات هستیم. در واقع، بعد از گذشت چهل

سال از ایلغار مغول در سرزمین‌های شرق اسلامی و پس از نابودی اسماعیلیان شیعی و فروپاشی خلافت عباسی، دولت منسجم ایلخانان مغول با سیاست‌های علمی مشخصی و معینی که از سوی دانشمندان ایرانی تعیین و نهادینه شد، راه در مسیری نهاد که بی‌توجهی سلجوقیان به علوم عقلی را از خاطره‌ها زدود و قومی که حاکمانش سخنی جز جنگ، کشتار و حمله به سرزمین‌های دیگر نداشتند را به طایفه‌ای مبدل ساخت که با همت، تلاش و اعتماد به نفس دانشمندان به ویژه ریاضی‌دانان ایرانی، مسیر حیات سیاسی خود را تغییر داد که حاصل آن، آبادانی کشور و بقای ایلخانیان بود. بی‌هیچ تردیدی، نقش والای دانشمندان ایرانی و نیاز ایلخانیان به ثبات سیاسی دست به دست هم داد و توجه هم‌زمان دانشمندان و ایلخانیان را به رشددهی به علوم عقلی را فراهم آورد در حالی انتظار آن بود که سلجوقیان ترک، مدنی‌تر و منطقی‌تر از ایلخانیان مغول عمل نمایند!

دستاوردهای علمی و ریاضی دوره ایلخانی، مرهون دانشمندانی چون: مؤیدالدین عروسی دمشقی، فخرالدین مراغی موصلی، فخرالدین اخلاطی تفلیسی، نجم‌الدین دبیر قزوینی و مدیون تئی چند از شاگردان خواجه مانند: شیخ جمال‌الدین حسن بن مطهر حلّی و علامه قطب‌الدین شیرازی است اما هیچ‌یک از این‌ها، جایگزین نقش بی‌بدیل خواجه نصیرالدین طوسی نیست! زیرا: او با جلب هنرمندانه نظر مغولان به لزوم پرداختن به امور علمی ضمن ایجاد رصدخانه مراغه شرح‌های متعددی بر ریاضیات یونانی از اقلیدس تا بطلمیوس نگاشت و خود نیز، آثار متعددی در علوم مختلف ریاضیات نوشت. هرچند یافته‌های ریاضی دوره ایلخانی توسط دانشمندانی چون: ابن‌بناء مراکشی (قرن هشتم/چهاردهم)، غیاث‌الدین کاشانی، ابوالحسن بسطی، بدرالدین ماردینی و بهاء‌الدین عاملی طی قرن‌های نهم و دهم/پانزدهم و شانزدهم توسعه یافت ولی خواجه به دلیل طرح زوجی در حرکت سیارات، خرده‌گیری و اصلاح نظریه زمین محوری بطلمیوس، تکمیل و تکامل بخشی به مثلثات، نگارش و تدوین زیج ایلخانی، توسعه نظریه اعداد و... به عنوان برجسته‌ترین چهره علمی بعد از خود باقی ماند.

کتابنامه

استرویک، درک (۱۳۶۶). تاریخ فشرده ریاضیات، ترجمه غلامرضا برادران خسروشاهی و حشمت‌الله کامرانی، تهران، نشر نو.

اشپولر، برتولد (۱۳۵۱). تاریخ مغول در ایران، ترجمه محمود میرآفتاب، تهران، بنگاه ترجمه و نشر کتاب.

الهویی نظری، زهرا (۱۳۹۰). وضعیت علوم عقلی با تکیه بر ریاضیات و نجوم در ایران پس از حمله مغول تا صفویه، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه الزهراء (س)، تهران.

باسورث، کلیفورد ادموند (۱۳۷۱). سلسله‌های اسلامی، ترجمه فریدون بدره‌ای، تهران، مؤسسه مطالعات و تحقیقات فرهنگی.

تاتاری، غلامرضا (۱۳۸۸). ریاضی‌دانان مسلمان و سیر علوم ریاضی در شرق اسلامی، مشهد، ضریح آفتاب.
تاتاری، غلامرضا، شیخ کیاسرای، مریم (۱۳۸۸). ریاضی‌دانان مسلمان و سیر علوم ریاضی در شرق، تهران، ضریح آفتاب.

ترکمنی آذر، پروین (۱۳۸۶). «مراکز علمی در دوره ایلخانیان»، فصلنامه تاریخ اسلام، ش ۲۶، صص ۶۱-۴۵.
چلونگر، محمدعلی، خزائلی، محمدباقر (۱۳۹۶). تاریخ علم در تمدن اسلامی، قم، پژوهشگاه حوزه و دانشگاه.

دهقان نژاد، امیر، رحمتی، محسن و عمادی، عبدالرسول (۱۳۹۷). «پیامد حمله مغول و حاکمیت ایلخانیان بر سنت علمی در ایران»، دوفصلنامه تاریخ و تمدن اسلامی، ش ۲۸، صص ۸۸-۶۱.

روستا، جمشید، محمودآبادی، مهدیه (۱۳۹۳). «نقش و جایگاه منجمان و ریاضی‌دانان در اوضاع علمی ایران عصر ایلخانی»، فصلنامه مطالعات ایرانی، ش ۲۶، صص ۸۸-۶۵.

زنجانی، مدرسی (۱۳۲۵). «خواجه نصیرالدین و رصدخانه مراغه»، مجله جلوه مهر، ش ۱۴، صص ۹۷-۹۳.
سارتن، جورج (۱۳۸۳). مقدمه بر تاریخ علم، ترجمه غلامحسین صدری افشار، تهران، علمی فرهنگی، ج ۳-۲-۱.

شهریاری، پرویز (۱۳۷۸). سرگذشت ریاضیات، تهران، مهاجر.
شهیدی‌پاک، محمد رضا (۱۳۸۸). «نقش خواجه نصیرالدین طوسی در آخرین مرحله تکامل علوم پایه»، تهران، کتاب ماه علوم و فنون، ش ۳۲، صص ۳۳-۲۳.

شهیدی‌پاک، محمد رضا (۱۳۹۵). «جایگاه شهر آموزشی مراغه در تاریخ علوم و تعلیم و تربیت اسلامی در عصر دولت ایلخانی در قرون وسطی»، کنفرانس بین‌المللی پژوهش در علوم و تکنولوژی، صص ۱۰-۱.
شهیدی‌پاک، محمدرضا (۱۳۹۸). مفهوم علم در تمدن اسلامی و سیاست علمی دول مسلمان، قم، سرای کتاب.

شیرودی، مرتضی (۱۳۸۶). «نقد کتاب تأثیر اروپا بر قرون وسطی»، اندیشه تقریب، ش ۱۰، صص ۱۶۴-۱۳۷.
صفا، ذبیح‌الله (۱۳۷۱). تاریخ علوم عقلی در تمدن اسلامی تا اواسط قرن پنجم، تهران، دانشگاه تهران.

فرشاد، مهدی (۱۳۶۵). تاریخ علم در ایران، تهران، امیرکبیر، ج ۱-۲.

قربانی، ابوالقاسم (۱۳۷۵). زندگی‌نامه ریاضی‌دانان دوره اسلامی سده سوم تا سده یازدهم هجری، تهران، مرکز نشر دانشگاهی شیراز.

کاوه یزدی، محمد مهدی (۱۳۹۴). «ترجمه رساله جبر و مقابله خواجه نصیرالدین طوسی»، مجله میراث علمی اسلام و ایران، ش ۷، صص ۲۱۰-۱۶۶.

کرامتی، یونس، (۱۳۸۰). «ریاضیات، نجوم و گاه شماری»، زیر نظر سید محمد کاظم موسوی بجنوردی، تهران، دائره‌المعارف بزرگ اسلامی، ج ۱۰.

محمدی، رمضان؛ خزائیلی، محمد باقر (۱۴۰۰). «نقش خواجه نصیرالدین طوسی در توسعه علم ریاضی و علم نجوم در جهان اسلام»، فصلنامه علم و تمدن در اسلام، ش ۷، صص ۹۱-۱۱۱.

مصاحب، غلامحسین (۱۳۸۱). «حساب»، دایره‌المعارف فارسی، تهران، ج ۲ و ۱.

معصومی همدانی، حسین (۱۳۹۸). «جبر»، زیر نظر سید محمد کاظم موسوی بجنوردی تهران، دائره‌المعارف بزرگ اسلامی، ج ۱۷.

موسوی، مصطفی، (۱۳۸۰). «ایلخانان»، زیر نظر سید محمد کاظم موسوی بجنوردی تهران، دائره‌المعارف بزرگ اسلامی، ج ۱۰.

نصر، سید حسین (۱۳۸۴). علم و تمدن در اسلام، ترجمه احمد آرام، تهران، علمی و فرهنگی.

JJO'Connor and EFRobertson:al-Tusi,Sharaf(1999). School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland.