تحقیقات مالی
Journal of Financial Research

دانشکدهٔ مدیریت دانشگاه تهران
دورهٔ ۱۸، شمارهٔ ۳
پاییز ۱۳۹۵
صص. ۴۸۲- ۴۶۱

# محاسبهٔ فاصلهٔ اطمینان و ارزیابی دقت ارزش در معرض خطر محاسبه‌شده با مدل مارکف سوئیچینگ گارچ در بورس اوراق بهادار تهران

رسول سجاد[1]، رویا طاهری‌فر[2]

**چکیده:** ارزش در معرض خطر از جمله محبوب‌ترین سنجه‌های ریسک است که با توجه به وابستگی مقدار آن به نوسانات بازدهی و عدم قطعیت مدل‌های پیش‌بینی نوسانات و خطای موجود در تخمین پارامترهای آن، ممکن است که تخمین این معیار از ریسک، همواره در معرض خطا قرار داشته باشد. این در حالی است که گستردگی استفاده از این معیار، موجب شده صحت برآورد و تخمین آن همواره یکی از دغدغه‌های اصلی سرمایه‌گذاران باشد. از این رو با توجه به اهمیت این موضوع، مطالعهٔ حاضر به مقایسهٔ دقت مدل‌های مارکف سوئیچینگ گارچ و گارچ در محاسبهٔ ارزش در معرض خطر شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران، با ساختن فاصلهٔ اطمینان بوت استرپی برای ارزش در معرض خطر، می‌پردازد و تأثیر امکان چرخش یا انتقال بین دو رژیم کم نوسان و پرنوسان را بر دقت تخمین ارزش در معرض خطر مورد آزمون قرار می‌دهد. نتایج نشان می‌دهد مدل مارکف سوئیچینگ گارچ به تخمین ارزش در معرض خطر محتاطانه‌تری نسبت به مدل گارچ در بورس تهران منجر می‌شود و برای سرمایه‌گذاران ریسک گریز مناسب‌تر است.

***واژه‌های کلیدی:*** ***ارزش در معرض خطر، بوت استرپینگ، مدل گارچ، مدل مارکف سوئیچینگ گارچ، مدیریت ریسک.***

۱. استادیار مهندسی مالی، دانشکدهٔ فنی و مهندسی دانشگاه علم و فرهنگ، تهران، ایران
۲. کارشناس ارشد مهندسی مالی، دانشکدهٔ فنی و مهندسی، دانشگاه علم و فرهنگ، تهران، ایران

**تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۰۲/۰۶**
**تاریخ پذیرش نهایی مقاله: ۱۳۹۵/۰۶/۰۱**
**نویسندهٔ مسئول مقاله: رویا طاهری‌فر**
**E-mail: roya.taherifar@gmail.com**

## مقدمه

مؤسساتی که به فعالیت‌های اقتصادی و سرمایه‌گذاری می‌پردازند، به‌طور عمده با انواع مختلفی از ریسک مواجه هستند که یکی از مهم‌ترین آنها ریسک بازار است. ریسک بازار، شامل اثر تغییرات بازار بر ارزش سبد دارایی‌ها است، از این رو برای مؤسسات مالی و سرمایه‌گذاری از اهمیت فراوانی برخوردار است.

یکی از روش‌های مطرح در بررسی این نوع ریسک و مدیریت آن، تخمین ارزش در معرض خطر است که در سال‌های اخیر در بسیاری از مؤسسات و بازارهای مالی معتبر برای اندازه‌گیری ریسک، تعیین سطوح سرمایه مورد نیاز برای مؤسسات مالی، موجودی سرمایه برای مؤسساتی که دارایی‌هایشان ترکیبی از دارایی‌های مالی است و... مورد توجه واقع شده است. بنابراین با توجه به گستردگی استفاده از این معیار و اهمیت کاربرد آن، دقت این معیار از ریسک و قابل اتکا بودن آن امری حائز اهمیت است.

روش‌های مختلف بسیاری برای برآورد ارزش در معرض خطر ابداع شده است که هریک از آنها مزیت‌ها و کاستی‌های خود را دارند و در شرایط مکانی و زمانی خاص ممکن است بهتر از دیگر روش‌ها عمل کنند. در نهایت به دلیل وابستگی مقدار این معیار از ریسک به پیش‌بینی نوسانات بازده، همهٔ این مدل‌ها در راستای پیش‌بینی دقیق نوسانات بازار تلاش می‌کنند و بر سر این موضوع با یکدیگر رقابت می‌کنند. یکی از محبوب‌ترین و موفق‌ترین روش‌ها مدل گارچ است. مدارک تجربی بسیاری نشان می‌دهد برآورد شاخص‌های مدل گارچ معمولاً درجهٔ زیادی از سازگاری را در نوسانات شرطی بازده‌های مالی، ارائه می‌کند (همیلتون و ساسمل، ۱۹۹۴). به عقیدهٔ همیلتون و ساسمل مشکل سازگاری جعلی زیاد مدل‌های گارچ می‌تواند با ترکیب مدل‌های مارکف سوئیچینگ با مدل‌های خانواده آرچ حل شود.

در ایده ورای مدل انتقالی، هرچه وضعیت بازار تغییر کند، عوامل مؤثر در نوسانات هم تغییر می‌کند. مدل مارکف سوئیچینگ گارچ به‌دلیل در نظرگرفتن تغییرات ساختاری و غیرخطی و ویژگی پویایی سری‌های زمانی، در مدل‌سازی اقتصاد بسیار مورد توجه واقع شده است.

عدم قطعیت مدل پیش‌بینی نوسانات، عدم قطعیت در تخمین پارامترهای آن و تغییرات ساختاری در داده، سه منبع اصلی بروز خطا در تخمین ارزش در معرض خطر به‌شمار می‌روند که بزرگی این خطا را با ساختن فاصلهٔ اطمینان در اطراف ارزش در معرض خطر می‌توان ارزیابی کرد (سجاد، ۲۰۰۷). در واقع گزارش ارزش در معرض خطر همراه با فاصلهٔ اطمینانی برای آن به درک ساده‌تری از ریسک برای مدیران پرتفوی منجر می‌شود.

از این رو با توجه به اهمیت بیان فاصلهٔ اطمینان برای ارزش در معرض خطر، مطالعات گسترده‌ای در این زمینه صورت پذیرفت. سجاد در سال ۲۰۰۷ تکنیک بوت استرپ کریستوفرسن را برای محاسبهٔ فاصلهٔ اطمینان برای ارزش در معرض خطر مدل مارکف سوئیچینگ گارچ، گسترش داد و آن را با استفاده از داده‌های شبیه‌سازی شده آزمایش کرد. حال هدف مقالهٔ حاضر محاسبهٔ فاصلهٔ اطمینان بوت استرپی ارزش در معرض خطر مدل مارکف سوئیچینگ گارچ و گارچ با استفاده از داده‌های واقعی، از جمله شاخص بورس اوراق بهادار تهران و مقایسهٔ نتایج آنها با یکدیگر است تا تأثیر امکان چرخش یا انتقال بین دو رژیم کم‌نوسان و پرنوسان را بر دقت تخمین ارزش در معرض خطر مورد آزمون قرار دهد.

## پیشینهٔ پژوهش

ارزش در معرض خطر یکی از پرکاربردترین معیارها برای اندازه‌گیری ریسک است. این معیار بیانگر حداکثر زیانی است که یک بنگاه مالی در طول افق زمانی مشخص و با سطح اطمینان معین با آن مواجه می‌شود. به‌دلیل نقش اساسی مدیریت ریسک مالی و گستردگی استفاده از این معیار از سال ۱۹۹۶ تاکنون روش‌های پارامتری، غیرپارامتری و نیمه‌پارامتری بسیاری برای برآورد آن ابداع شده است. تا به امروز مطالعاتی در زمینهٔ عدم قطعیت ارزش در معرض خطر صورت پذیرفته است. جورین (۱۹۹۶)، پریتسکر (۱۹۹۷)، چپل و دود (۱۹۹۹) روش تحلیلی را برای ساختن فاصلهٔ اطمینان ارزش در معرض خطر برای بازده‌هایی با خطای نرمال پیشنهاد کردند. جورین (۱۹۹۶) تحقیقاتی در زمینهٔ تخمین خطای VaR بر اساس نوسانات نرمال با فرض اینکه میانگین صفر باشد، انجام داد. در ادامه دود و چپل (۱۹۹۹) فاصلهٔ اطمینان ارزش در معرض خطر نرمال را با فرض اینکه پارامتر میانگین به درستی تخمین‌زده شده و عدم قطعیت ندارد، به‌دست آوردند. رویکرد آنها روش ساده‌تری را برای محاسبهٔ فاصلهٔ اطمینان ارزش در معرض خطر فراهم می‌کرد. بسیاری از محققان به منظور اجتناب از یکسری فروض خاص در رابطه با توزیع بازده‌ها تکنیک بوت استرپ را پیشنهاد کردند. در این میان کااو و همکارانش (۱۹۹۷) روش بوت استرپی را به‌منظور ساختن فاصلهٔ پیش‌بینی برای مشاهدات تولید شده توسط مدل AR(p) ارائه دادند، اما فاصلهٔ پیش‌بینی آنها عدم قطعیت ناشی از تخمین پارامترها را شامل نمی‌شد.

میگوئل و الیو (۱۹۹۹) فرایند بوت استرپی کااو (۱۹۹۷) را برای ساختن فاصلهٔ پیش‌بینی برای مشاهدات تولید شدهٔ مدل آرچ گسترش دادند. با این حال فاصله پیش‌بینی آنها نیز عدم قطعیت ناشی از تخمین پارامترها را شامل نمی‌شد و همچنین قادر به ساختن فاصلهٔ پیش‌بینی

برای نوسانات آتی نبود. بارن ـ ادسی و جیانوپولوس (۲۰۰۱) فرایند بوت استرپی را برای به‌دست آوردن فاصله‌های اطمینان برای تخمین‌های ارزش در معرض خطر بر پایهٔ بازنمونه‌گیری از بازده‌های استاندارد شده با استفاده از مدل گارچ انگل (۱۹۸۲) و بولرسلو (۱۹۸۶) پیشنهاد دادند. آنها از مدل گارچ برای کمی کردن واریانس شرطی که به‌طور معمول در داده‌های مالی یافت می‌شود، استفاده کردند. هرچند فرایند بوت استرپ آنها نیز مشابه فرایند پیشنهاد داده شدهٔ میگوئل و الیو (۱۹۹۹) عدم قطعیت ناشی از تخمین پارامتر را شامل نمی‌شود. پاسکال، رامو و روئیز (۱۹۹۹) روش بوت استرپی را برای فرایندهای ARIMA پیشنهاد دادند که این روش عدم قطعیت ناشی از تخمین پارامترها را شامل می‌شد.

پاسکال، رامو و روئیز (۲۰۰۰) فرایند پاسکال (۱۹۹۹) را برای تخمین فاصلهٔ پیش‌بینی برای نوسانات و بازده‌های مدل GARCH(1,1) توسعه دادند. در نهایت کریستوفرسن و گنکالوز (۲۰۰۴) اظهار داشتند که مشکل اساسی برای ساختن فاصلهٔ اطمینان صحیح برای ارزش در معرض خطر ناشی از پویایی واریانس شرطی است که به‌طور معمول در بازده‌ها یافت می‌شود. در نتیجه از مدل گارچ انگل (۱۹۸۲) برای کمی کردن این پویایی استفاده کرد. آنها روش بوت استرپ پاسکال (۲۰۰۰) را که خطای تخمین پارامترها را در مدل‌های پویایی واریانس به حساب می‌آورد، برای ارزیابی عدم قطعیت در پیش‌بینی ارزش در معرض خطر گارچ ناشی از خطای تخمین پارامتر گسترش دادند. در واقع آنها اظهار داشتند که روش بوت استرپ معتبر، روشی است که ویژگی وابستگی بازده‌ها را به خوبی و درستی تقلید کند. در نتیجه روش بوت استرپ ارائه شده برای مدل‌های گارچ، بر پایهٔ جایگذاری باقی‌مانده‌های استاندارد شده است؛ زیرا این باقی‌مانده‌های استاندارد شده هم توزیع و مستقل‌اند (کریستوفرسن و گنکالوز، ۲۰۰۴).

مطالعات تجربی نشان می‌دهد تخمین‌های مدل گارچ معمولاً بر پایداری بالای نوسانات شک‌های منفرد دلالت دارد. به عقیدهٔ همیلتون و ساسمل (۱۹۹۴) یکی از راه‌های غلبه بر این مسئله ترکیب مدل‌های مارکف سوئیچینگ با مدل‌های خانواده آرچ است. ابتدا مدل‌های مارکف سوئیچینگ آرچ معرفی شد. سپس گری (۱۹۹۶) این روش را برای مدل‌های گارچ گسترش دادند. گری (۱۹۹۶)، کلاسن (۲۰۰۲)، هاس، میتنیک و پائوللا (۲۰۰۴)، مارکوسی (۲۰۰۵)، سجاد (۲۰۰۷)، باون (۲۰۰۹)، ستیتهام و همکاران (۲۰۱۲) و ... نشان دادند مدل‌های مارکف سوئیچینگ گارچ به پیش‌بینی نوسانات بهتری نسبت به مدل‌های نوع گارچ منجر می‌شود.

سجاد (۲۰۰۷) تکنیک بوت استرپ کریستوفرسن را برای ارزیابی دقت ارزش در معرض خطر مدل مارکف سوئیچینگ گارچ، گسترش داد. سپیردیگ (۲۰۱۳) روش بوت استرپی را به‌منظور محاسبهٔ فاصلهٔ اطمینان برای ارزش در معرض خطر به‌دست آمده توسط ARMA-GARCH در حالتی که گشتاور چهارم خطاها نامتناهی باشد، پیشنهاد کرد.

به‌طور کلی دانش خیلی کمی در رابطه با عدم قطعیت در پیش‌بینی‌های مارکف سوئیچینگ گارچ ناشی از خطای تخمین پارامتر شناخته شده است. از این رو پژوهش حاضر بر آن است که با استفاده از تکنیک بوت استرپ، کریستوفرسن و سجاد، به مقایسهٔ دقت ارزش در معرض خطر مارکف سوئیچینگ گارچ و گارچ، در سه سری مالی بورس اوراق بهادار تهران، شاخص بورس نیویورک و نرخ ارز دلار آمریکایی به ین ژاپن که دارای سطح نوسانات و پایداری نوسانات مختلف‌اند، بپردازد. بدین منظور بعد از محاسبهٔ ارزش در معرض خطر مارکف سوئیچینگ گارچ و گارچ برای هر سه سری مالی، به‌منظور مقایسهٔ دقت مدل‌ها، فاصلهٔ اطمینان بوت استرپی و آزمون‌های پس‌نگر برای هر یک از مدل‌ها و همچنین برای هر سه سری مالی صورت پذیرفت و پس از آن نتایج به‌دست‌آمده، مورد بررسی و تحلیل قرار گرفت.

## روش‌شناسی پژوهش

### تعریف مدل‌های تخمین ارزش در معرض خطر

برای محاسبهٔ ارزش در معرض خطر یک دارایی مالی در طول افق زمانی (مثلاً یک روزه)، مقدار آن را به‌طور معمول از سمت چپ یا راست توزیع بیان می‌کنند. بنابراین بر پایهٔ اطلاعات موجود در زمان t، نماد $\psi_T$ مقدار ارزش در معرض خطر موقعیت خرید (سمت چپ تابع توزیع) در طول افق زمانی t+۱ با سطح اطمینان P به صورت زیر تعریف می‌شود:

رابطهٔ ۱) $$\Pr[r_{T+1} \leq VaR^{p}_{T+1} \mid \psi_T] = 1 - p$$

به بیان دیگر ما P درصد اطمینان داریم که در طی N روز آتی، قطعاً بیشتر از مبلغ VaR متحمل زیان نخواهیم شد.

با فرض اینکه میانگین بازده‌های دارایی مالی صفر باشد، پویایی بازده‌های دارایی مالی یا پرتفوی به‌صورت زیر مدل می‌شود:

رابطهٔ ۲) $$r_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, T$$

که سیگما جذر واریانس شرطی (نوسانات) بازده‌ها در زمان t و اپسیلون‌ها هم توزیع و مستقل با میانگین صفر و واریانس یک و تابع توزیع F است. از طرفی توزیع تجمعی تجربی بازده دارایی‌ها با G نشان داده می‌شود. از این رو، مقدار ارزش در معرض خطر برابر است با:

رابطهٔ ۳) $$VaR^{p}_{T+1} = \sigma_{T+1} F^{-1}_{1-p} = G^{-1}_{1-p}$$

که در آن $\sigma_{T+1}$ جذر واریانس شرطی در زمان T+1، تابع $F_{1-p}^{-1}$ چارک 1-p تابع توزیع بازده‌های استاندارد $\varepsilon_t$ و $G_{1-p}^{-1}$ چارک 1-p تابع توزیع تجربی بازده‌ها است (آباد، بنیتو و لوپز، ۲۰۱۴).

با توجه به مباحث مطرح شده، مقدار ارزش در معرض خطر به دو صورت محاسبه می‌شود:

۱. معکوس تابع توزیع تجربی بازده‌های مالی $G^{-1}$؛

۲. معکوس تابع توزیع اپسیلون‌ها، که این روش به تخمین نوسانات بازده‌های مالی نیاز دارد.

با توجه به مباحث بالا مقدار ارزش در معرض خطر به پیش‌بینی نوسانات یک گام جلوتر و تابع توزیع بازده‌ها وابسته است. در این مقاله تلاش می‌شود که عدم قطعیت موجود در تخمین ارزش در معرض خطر را با ساختن فاصلهٔ اطمینان برای آن کمی کرد. برای محاسبهٔ ارزش در معرض خطر از دو روش گارچ و مارکف سوئیچینگ گارچ استفاده شده و دقت مدل‌ها در پیش‌بینی ارزش در معرض خطر در سری‌های مالی مختلف مقایسه می‌شود.

## مدل گارچ

یکی از روش‌های پارامتریک برای محاسبهٔ ارزش در معرض خطر استفاده از مدل گارچ است. یکی از ویژگی‌های مهم برخی از سری‌های زمانی اقتصادی و مالی این است که دارای تغییرپذیری خوشه‌ای هستند؛ یعنی تغییرات بزرگ موجب تغییرات بزرگ، و تغییرات کوچک موجب تغییرات کوچک می‌شود. به بیان دیگر، سطح جاری تغییرپذیری، رابطهٔ مثبتی با مقادیر گذشتهٔ آن دارد. با فرض اینکه تغییرات ساختاری در فرایند واریانس نداشته باشیم، واریانس شرطی در رابطهٔ ۲ تحت مدل GARCH(1,1) به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha . r_{t-1}^2 + \beta . \sigma_{t-1}^2$$ رابطهٔ ۴)

که برای مثبت بودن واریانس، فرض $\alpha + \beta < 1$ در نظر گرفته شده است.

با توجه به رابطهٔ ۵، مقدار $\sigma_T^2$ به اطلاعات موجود تا زمان T و مقدار $\omega$، $\alpha$ و $\beta$ بستگی دارد:

$$\sigma_T^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta} + \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \left(r_{T-j-1}^2 - \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}\right)$$ رابطهٔ ۵)

ارزش در معرض خطر با استفاده از مدل GARCH(1,1) طی گام‌های زیر به‌دست می‌آید:

گام ۱. با استفاده از روش MLE پارامترهای مدل گارچ $(\hat{\omega}, \hat{\alpha}, \hat{\beta})$، برآورد می‌شود و می‌توان سری واریانس $\hat{\sigma}_t^2$ و $\hat{\varepsilon} = r_t / \hat{\sigma}_t^2$ را با استفاده از رابطهٔ زیر محاسبه کرد:

رابطهٔ ۶)
$$\hat{\sigma}_t^2 = \hat{\omega} + \hat{\alpha}.r_{t-1}^2 + \hat{\beta}.\hat{\sigma}_{t-1}^2$$

که در این رابطه واریانس غیر شرطی بازده‌ها $\hat{\sigma}_1^2 = \dfrac{\hat{\omega}}{1-\hat{\alpha}-\hat{\beta}}$ است.

با جایگذاری برآوردهای MLE در رابطهٔ ۵، رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

رابطهٔ ۷)
$$\hat{\sigma}_T^2 = \frac{\hat{\omega}}{1-\hat{\alpha}-\hat{\beta}} + \hat{\alpha}\sum_{j=0}^{T-2}\hat{\beta}^j(r_{T-j-1}^2 - \frac{\hat{\omega}}{1-\hat{\alpha}-\hat{\beta}})$$

پیش بینی $\sigma_{T+1}^2$ با $\hat{\sigma}_{T+1}^2$ نشان داده می‌شود.

رابطهٔ ۸)
$$\hat{\sigma}_t^2 = \hat{\omega} + \hat{\alpha}.r_{t-1}^2 + \hat{\beta}.\hat{\sigma}_{t-1}^2$$

گام ۲. مقدار $F_{1-p}^{-1}$ با $\hat{F}_{1-p}^{-1}$ نشان داده می‌شود.

گام ۳. تخمین گارچ ارزش در معرض خطر به‌صورت زیر محاسبه می‌شود (کریستوفرسن و گنکالوز، ۲۰۰۴).

رابطهٔ ۹)
$$G-VaR_{T+1}^p = \hat{\sigma}_{T+1}\hat{F}_{1-p}^{-1}$$

## مدل مارکف سوئیچینگ گارچ

مدل مارکف سوئیچینگ گارچ یکی از روش‌هایی است که چارچوب مناسبی را برای مدل کردن توزیع بازده روزانهٔ دارایی‌ها فراهم می‌آورد و از آنجا که نسبت به مدل‌های تک رژیمی گارچ، انعطاف‌پذیری بیشتری دارد، در سال‌های اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته است. این مدل با در نظر گرفتن رژیم برای داده‌ها، اجازهٔ تغییر ناگهانی سطح تلاطم را می‌دهد که این خود به بهبود معنادار واریانس پیش‌بینی شده، منجر خواهد شد (اردیا، ۲۰۰۹).

هاس (۲۰۰۴) پویایی نوسانات بازده تحت مدل MS-GARCH(1,1) را به‌صورت زیر مدل کرد:

رابطهٔ ۱۰)
$$r_t = \sigma_{\Delta_t,t}\varepsilon_t$$

رابطهٔ ۱۱)
$$\sigma_t^{(2)} = \omega + \alpha.r_{t-1}^2 + \beta.\sigma_{t-1}^{(2)}$$

که در آن $\varepsilon_t \overset{iid}{\sim} N(0,1)$ و $\{\Delta_t\}$ زنجیرهٔ مارکف با فضای حالت محدود $S=\{1,2,...,k\}$ و ماتریس انتقال P است که در قالب رابطهٔ ۱۲ مشاهده می‌شود.

$$P=[p_{ij}]=[\Pr(\Delta_t=j\,|\,\Delta_{t-1}=i)]\ ,\qquad i,j=1,2,...,k$$ رابطهٔ ۱۲)

که در آن، $p_{ij}$ احتمال انتقال از فضای حالت i به فضای حالت j است. $\sigma_t^{(2)}$ بردار $k\times1$ از واریانس رژیم‌هاست $\sigma_t^{(2)}=[\sigma_{1t}^2,\sigma_{2t}^2,...,\sigma_{kt}^2]'$، که از فرایند GARCH(1,1) پیروی می‌کند و در آن $\omega=[\omega_1,\omega_2,...,\omega_k]'$، $\alpha=[\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k]'$ و $\beta=\mathrm{diag}(\beta_1,\beta_2,...,\beta_k)$ است. در این رابطه برای مثبت بودن واریانس، فرض $\omega\geq0$ و $\alpha,\beta\geq0$ در نظر گرفته شده است.

در مدل MS-GARCH(1,1) واریانس می‌تواند به‌صورت تابعی از بازده‌های گذشته محاسبه شود:

$$\sigma_t^{(2)}=(I-\beta)^{-1}\omega+\sum_{i=1}^{t-1}\beta^{i-1}\alpha\ r_{t-i}^2$$ رابطهٔ ۱۳)

که واریانس در هر رژیم برابر است با:

$$\sigma_{jt}^2=\omega_j(I-\beta_j)^{-1}+\alpha_j\sum_{i=1}^{t-1}\beta_j^{\,i-1}\ r_{t-i}^2$$ رابطهٔ ۱۴)

معمولاً در داده‌های مالی برای کاهش محاسبات، تعداد رژیم‌ها را برابر با ۲ در نظر می‌گیرند؛ به ویژه اینکه در مدل‌هایی با $k>2$ پارامترهای حداقل یکی از رژیم‌ها، با خطای برآورد خیلی بزرگ، تخمین زده می‌شود (الکساندر و لازار، ۲۰۰۶).

با توجه به دلایل یادشده دو رژیم برای مدل در نظر گرفته شده است.

ارزش در معرض خطر مدل MS-GARCH(1,1) طی گام‌های زیر محاسبه می‌شود:

گام ۱. پارامترهای مدل MS-GARCH(1,1)، $(P,\omega,\alpha,\beta)$ با استفاده از تخمین حداکثر درست‌نمایی (MLE) به‌دست می‌آید:

$$L(\theta)=\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{k}f(r_t\,|\,\Delta_t=j,\psi_{t-1};\theta).\Pr\{\Delta_t=j\,|\,\psi_{t-1}\}$$ رابطهٔ ۱۵)

با استفاده از روش MLE پارامترهای مدل مارکف سوئیچینگ گارچ $(\hat{P},\hat{\omega},\hat{\alpha},\hat{\beta})$ تخمین زده می‌شود. و سری واریانس $\hat{\sigma}_t^2$ با استفاده از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\hat{\sigma}_t^{(2)}=\hat{\omega}+\hat{\alpha}r_{t-1}^2+\hat{\beta}\hat{\sigma}_{t-1}^{(2)}$$ رابطهٔ ۱۶)

که در این رابطه، $\hat{\sigma}_1^{(2)}$ واریانس غیر شرطی بازده‌ها است که با توجه به مدل هاس (۲۰۰۴) محاسبه می‌شود.

با جایگذاری تخمین‌های MLE در رابطهٔ ۱۳ رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

رابطۀ ۱۷)
$$\hat{\sigma}_T^{(2)} = (I-\hat{\beta})^{-1}\hat{\omega} + \sum_{i=1}^{T-1}\hat{\beta}^{i-1}\hat{\alpha}\ r_{T-i}^2$$

گام ۲. بردار $k \times 1$، $\hat{\sigma}_{T+1}$ به عنوان پیش‌بینی $\sigma_{T+1}$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

رابطۀ ۱۸)
$$\hat{\sigma}_{T+1}^{(2)} = \hat{\omega} + \hat{\alpha}.r_T^2 + \hat{\beta}.\hat{\sigma}_T^{(2)}$$

گام ۳. حال به‌منظور تخمین ارزش در معرض خطر در صورتی که f تابع توزیع تجمعی بازده‌ها باشد داریم:

رابطۀ ۱۹)
$$f(r_{T+1} \mid \psi_T;\theta) = \sum_{j=1}^{k} f(r_{T+1} \mid \Delta_{T+1} = j, \psi_T;\theta).\Pr\{\Delta_{T+1} = j \mid \psi_T\}$$

که در عبارت بالا $\theta$ پارامترهای تابع چگالی بازده‌ها است.

رابطۀ ۲۰)
$$\Pr\{\Delta_{T+1} = j \mid \psi_T\} = \sum_{i=1}^{k} p_{ij}\Pr\{\Delta_T = i \mid \psi_T\}$$

حال ارزش در معرض خطر مدل رژیم انتقالی مارکف از رابطۀ ۲۱ به‌دست می‌آید (سجاد، ۲۰۰۷).

رابطۀ ۲۱)
$$MSG-VaR_{T+1}^p = \sum_{j=1}^{k} f(VaR_{T+1}^p;\theta(\sigma_{jT+1}^2))\Pr\{\Delta_{T+1} = j \mid \psi_T\} - p = 0$$

که در آن $\sigma_{jT+1}^2$ پیش‌بینی نوسانات شرطی یک گام جلوتر برای زمان $T+1$ است.

## محاسبۀ فاصلۀ اطمینان ارزش در معرض خطر

در این قسمت با استفاده از تکنیک بوت استرپ کریستوفرسن، نحوۀ محاسبۀ فاصلۀ اطمینان بوت استرپی ارزش در معرض خطر گارچ شرح داده می‌شود و از بسط روش یادشده طبق مدل سجاد (۲۰۰۷)، برای تخمین دقت ارزش در معرض خطر مارکف سوئیچینگ گارچ استفاده می‌شود.

## الگوریتم بوت استرپ برای ارزش در معرض خطر گارچ

گام‌های محاسبۀ فاصلۀ پیش‌بینی برای ارزش در معرض خطر گارچ با توجه به روش کریستوفرسن در سال ۲۰۰۴ به صورت زیر مطرح شد:

گام ۱. پارامترهای مدل گارچ را با استفاده از روش MLE تخمین زده شـده و توزیـع $\hat{F}_T$ بـرای $\hat{\varepsilon} = r_t / \hat{\sigma}_t$ در نظر گرفته می‌شود.

گام ۲: یک سری بوت استرپی با جایگذاری از $\hat{\varepsilon}$ به اندازهٔ نمونهٔ T، انتخاب کرده، سـپس سـری بوت استرپی $\{r_t^* : t=1,\dots,T\}$ با استفاده از روابط زیر تولید می‌شود.

رابطهٔ ۲۲)
$$\hat{\sigma}_{t-1}^{*2} = \hat{\omega} + \hat{\alpha}.r_{t-1}^{*2} + \hat{\beta}.\hat{\sigma}_{t-1}^{*2}$$

رابطهٔ ۲۳)
$$r_t^* = \hat{\sigma}_t^* \varepsilon_t^* \quad \text{for } t=1,\dots,T$$

که در آن $\varepsilon_t^* \overset{i.i.d.}{\sim} \hat{F}_T$ و $\hat{\sigma}_1^{*2} = \hat{\sigma}_1^2 = \dfrac{\hat{\omega}}{1-\hat{\alpha}-\hat{\beta}}$ است.

با استفاده از $r_t^*$ تولید شده مقادیر $(\hat{\omega}^*, \hat{\alpha}^*, \hat{\beta}^*)$ را با روش MLE تخمین زده می‌شود.

گام ۳. پیش‌بینی بوت استرپی نوسانات $\hat{\sigma}_{T+1}^{*2}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

رابطهٔ ۲۴)
$$\hat{\sigma}_{T+1}^{*2} = \hat{\omega}^* + \hat{\alpha}^*.r_T^{*2} + \hat{\beta}^*.\hat{\sigma}_T^{*2}$$

با داشتن مقدار اولیه:

رابطهٔ ۲۵)
$$r_T^* = r_T$$
$$\hat{\sigma}_T^{*2} = \frac{\hat{\omega}^*}{1-\hat{\alpha}^*-\hat{\beta}^*} + \hat{\alpha}^* \sum_{j=0}^{T-2} \hat{\beta}^{*j} \left(r_{T-j-1}^2 - \frac{\hat{\omega}^*}{1-\hat{\alpha}^*-\hat{\beta}^*}\right)$$

گام ۴. ارزش در معرض خطر نمونهٔ بوت استرپی را با روش گارچ محاسبه می‌کنیم:

رابطهٔ ۲۶)
$$G-VaR = \hat{\sigma}_{T+1}\hat{F}_{1-p}^{*-1}$$

$\hat{F}_{1-p}^{*-1}$ تخمین بوت استرپی $F_{1-p}^{-1}$ با اسـتفاده از داده‌هـای بـوت اسـترپی بـه جـای داده‌هـای مشاهده شده است.

گام ۵. گام ۲ تا ۴ به تعداد دفعات زیاد B تکرار می‌شود و یک دنباله از G-VaR به‌دست می‌آیـد. $\{G\_VaR_{T+1}^{*p(i)} : i=1,\dots,B\}$ دنبالهٔ از ارزش در معرض خطر بوت استرپ است.

گام ۶. فاصلهٔ پیش‌بینی بوت استرپی $100\times(1-\alpha)$ درصدی برای $VaR_{T+1}^p$ به‌صورت زیـر محاسبه می‌شود:

رابطهٔ ۲۷)
$$[Q_{\alpha/2}(\{G\_VaR_{T+1}^{*p(i)}\}_{i=1}^B)\ ,\ Q_{1-\alpha/2}(\{G\_VaR_{T+1}^{*p(i)}\}_{i=1}^B)]$$

## الگوریتم بوت‌استرپ برای ارزش در معرض خطر مارکف سوئیچینگ گارچ

روش بوت استرپ پاسکال برای مدل گارچ بر پایهٔ بازنمونه‌گیری با جایگذاری باقی‌مانده‌های استاندارد شده است و بازده‌های بوت‌استرپی با استفاده از معادلات نوسانات پویای گارچ تولید می‌شوند. ایدهٔ ورای بازنمونه‌گیری از باقی‌مانده‌های استاندارد شده به جای بازده‌ها این است که ε هم توزیع و مستقل است. در نتیجه کریستوفرسن نیز از بازنمونه‌گیری با جایگذاری باقی‌مانده‌های استاندارد شده برای محاسبه فاصلهٔ اطمینان ارزش در معرض خطر گارچ استفاده کرد.

روش بوت استرپی که برای مدل MS-GARCH توسط سجاد (۲۰۰۷) مطرح شد، مشابه روش بوت استرپ گارچ کریستوفرسون است. گام‌های محاسبهٔ فاصلهٔ پیش‌بینی برای ارزش در معرض خطر مارکف سوئیچینگ گارچ به‌صورت زیر مطرح شده است:

گام ۱. ابتدا با استفاده از روش MLE پارامترهای مدل مارکف سوئیچینگ گارچ $(\hat{P},\hat{\omega},\hat{\alpha},\hat{\beta})$ برآورد می‌شود و توزیع $\hat{F}_T$ را برای اپسیلون‌ها در نظر می‌گیریم.

گام ۲. یک سری اعداد تصادفی با اندازهٔ T از تابع $\hat{F}$ انتخاب می‌کنیم و آنها $\varepsilon_t^*$ می‌نامیم که نمونهٔ بوت استرپی باقی‌مانده‌های استاندارد شده است.

گام ۳. سری بوت استرپ $\{r_t^*:\ t=1,...,T\}$ با استفاده از روابط زیر ایجاد می‌شود.

رابطهٔ ۲۸) $$\hat{\sigma}_{t-1}^{*2}=\hat{\omega}+\hat{\alpha}.r_{t-1}^{*2}+\hat{\beta}.\hat{\sigma}_{t-1}^{*2}$$

رابطهٔ ۲۹) $$r_t^*=\hat{\sigma}_t^*\varepsilon_t^* \quad \text{for } t=1,...,T$$

که در این رابطه واریانس غیر شرطی $\hat{\sigma}_1^{*(2)}$ طبق مقالهٔ هاس به‌دست می‌آید.

در رابطهٔ بالا مقدار $\hat{\sigma}_t^*$ از $\hat{\sigma}_t^{*(2)}$ با توجه به زنجیرهٔ مارکف انتخاب می‌شود. به‌منظور فهم بیشتر، مارکف سوئیچینگ گارچ با دو رژیم را در نظر بگیرید، مقدار $\hat{\sigma}_t^*$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

رابطهٔ ۳۰) $$\text{if }\ \Delta_t=1,\text{ then }\begin{cases}\Delta_{t+1}=1 \text{ if } \ u_{t+1}\le p_{11}\\ \Delta_{t+1}=2 \text{ if } \ \text{otherwise}\end{cases}$$

و $$\text{if }\ \Delta_t=2,\text{then }\begin{cases}\Delta_{t+1}=2 \text{ if } \ u_{t+1}\le p_{22}\\ \Delta_{t+1}=1 \text{ if } \ \text{otherwise}\end{cases}$$

در رابطهٔ بالا $u_t$ متغیر تصادفی از توزیع یکنواخت $U(0,1)$ است. اگر در زمان t فرایند در حالت ۱ باشد، $\hat{\sigma}_t^*=\text{sqrt}(\hat{\sigma}_{1t}^{*2})$ است. سپس در زمان t+1 اگر $u_t\le p_{11}$ ، $\hat{\sigma}_{t+1}^*=\text{sqrt}(\hat{\sigma}_{1t+1}^{*2})$

است؛ یعنی فرایند همچنان در حالت ۱ باقی خواهد ماند. در غیر این صورت فرایند در زمان t+1 در حالت ۲ خواهد بود و به‌صورت $\hat{\sigma}^{*}_{t+1} = sqrt(\hat{\sigma}^{*2}_{2t+1})$ است. مشابه این نتایج زمانی که فرایند در حالت ۲ باشد، رخ می‌دهد.

گام ۴. با استفاده از سری بوت استرپی بازده $\{r^{*}_{t} : t=1,...,T\}$ تولید شده در گام ۳، پارامترهای مدل مارکف سوئیچینگ گارچ $(\hat{P}^{*}, \hat{\omega}^{*}, \hat{\alpha}^{*}, \hat{\beta}^{*})$ محاسبه می‌شود و با استفاده از روابط زیر نوسانات یک گام جلوتر پیش‌بینی می‌گردد.

$$r^{*}_{T} = r_{T} \qquad \text{(۳۱ رابطهٔ)}$$

$$\hat{\sigma}^{*(2)}_{T} = (1-\hat{\beta}^{*})^{-1}\hat{\omega}^{*} + \sum_{j=1}^{T-1}\hat{\beta}^{*j-1}.\hat{\alpha}^{*}.r^{2}_{T-1}$$

$$\hat{\sigma}^{*(2)}_{T+1} = \hat{\omega}^{*} + \hat{\alpha}^{*}r^{2}_{T} + \hat{\beta}^{*}\hat{\sigma}^{*(2)}_{T} \qquad \text{(۳۲ رابطهٔ)}$$

گام ۵. تخمین بوت استرپی ارزش در معرض خطر رژیم انتقالی مارکف گارچ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$MSG - VaR^{*p}_{T+1} = \sum_{j=1}^{k} f(VaR^{*p}_{T+1}; \theta^{*}(\hat{\sigma}^{*2}_{jT+1}))\Pr\{\Delta_{T+1} = j \mid \psi_{T}\} - p = 0 \qquad \text{(۳۳ رابطهٔ)}$$

گام ۶. گام ۲ تا ۵ به تعداد دفعات زیاد B تکرار می‌شود و یک دنباله از MSG-VaR به‌دست می‌آید. $\{MSG\_VaR^{*p(i)}_{T+1} : i=1,...,B\}$ دنباله از ارزش در معرض خطر بوت استرپ است.

گام ۷. فاصلهٔ پیش‌بینی بوت استرپ $100\times(1-\alpha)$ درصدی برای $MSG - VaR^{p}_{T+1}$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$[Q_{\alpha/2}(\{MSG\_VaR^{*p(i)}_{T+1}\}^{B}_{i=1}) \ , \ Q_{1-\alpha/2}(\{MSG\_VaR^{*p(i)}_{T+1}\}^{B}_{i=1})] \qquad \text{(۳۴ رابطهٔ)}$$

## آزمون‌های پس‌نگر

در این بررسی از آزمون پوشش شرطی (آزمون استقلال پیاپی استثنائات) و آزمون پوشش غیرشرطی استفاده شده است.

## آزمون پوششی غیر شرطی

فرض صفر در این آزمون که توسط کوپیک (۱۹۹۵) ارائه شد، بیان می‌کند که احتمال عدم موفقیت یا رویداد استثنائات در عمل $(\pi)$، برابر با سطح احتمال در نظر گرفته شده در مدل $(\alpha)$ است. آمارهٔ آزمون نسبت درست‌نمایی به‌صورت زیر است (کوپیک، ۱۹۹۵):

رابطهٔ ۳۵)
$$LR_{uc} = -2\ln\left[\frac{\alpha^{n_1}(1-\alpha)^{n_0}}{\hat{\pi}^{n_1}(1-\hat{\pi})^{n_0}}\right] \sim \chi^2_{(1)}$$

در این رابطه $\hat{\Pi} = \frac{n_1}{n_0+n_1}$ است.

## آزمون استقلال پیاپی استثنائات

کریستوفرسون (۱۹۹۸) با بسط آمارهٔ $LR_{uc}$ آزمونی را ابداع کرد که از طریق آن می‌توان استقلال پیاپی استثنائات را آزمود. آمارهٔ $LR_{ind}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود (کریستوفرسن، ۱۹۹۸):

رابطهٔ ۳۶)
$$LR_{ind} = -2\ln\frac{\hat{\pi}^{n_1}(1-\hat{\pi})^{n_0}}{(1-\hat{\pi}_{01})^{n_{00}}\hat{\pi}_{01}^{n_{01}}(1-\hat{\pi}_{11})^{n_{10}}\hat{\pi}_{11}^{n_{11}}} \sim \chi^2_{(1)}$$

$n_{ij}$ معرف تعداد استثنائات مشاهده شده در زمان‌های t-1 و t است که به ترتیب با i و j نشان داده می‌شوند. $\pi_{ij}$ احتمال شرطی وقوع استثنائات در زمان‌های t-1 و t را نشان می‌دهد؛ به‌طوری که:

رابطهٔ ۳۷)
$$\pi_{ij} = \Pr\{I_{t-1} = i \mid \mathrm{I}_t = j\}(i, j = 0,1), \hat{\pi}_{01} = \frac{n_{01}}{n_{00}+n_{01}}, \hat{\pi}_{11} = \frac{n_{11}}{n_{10}+n_{11}}$$

## یافته‌های پژوهش

در این بخش فرایند بوت استرپ شرح داده شده در قسمت قبل، برای سه سری مالی با سطح نوسانات و پایداری نوسانات مختلف، به‌منظور تخمین فاصلهٔ اطمینان ارزش در معرض خطر اجرا شده است (جدول ۱). داده‌های تحقیق شامل ۱۰۶۰ دادهٔ روزانه از تاریخ ۱۰/۲۹/ ۱۳۸۹ تا ۱۳۹۴/۰۴/۰۱ مربوط به شاخص بورس اوراق بهادار تهران (TEDPIX) و از تاریخ ۳۱/۰۳/۲۰۱۱ تا ۱۷/۰۶/۲۰۱۵ برای شاخص بورس نیویورک (S & P500) و همچنین از تاریخ ۲۷/۰۷/۲۰۱۲ تا ۰۷/۰۱/۲۰۱۶ برای نرخ ارز دلار آمریکا به ین ژاپن (USD/JPY) است (دادهٔ مورد نیاز در رابطه با دو شاخص ذکر شده از سایت یاهو فایننس[1] و دادهٔ برابری نرخ ارز دلار به ین از سایت اینوستینگ[2] جمع‌آوری شد) و بازدهی روزانه به صورت لگاریتمی محاسبه شده است. ۱۰۰۰ مشاهدهٔ اول به‌منظور تخمین ارزش در معرض خطر روزانهٔ ۹۵ درصد برای ۶۰ روز آتی استفاده

1. www.finance.yahoo.com
2. www.investing.com

می‌شود و VaR به‌صورت روزانه از مشاهدهٔ ۱۰۰۱ تا ۱۰۶۰ (۶۰ عدد) به‌دست می‌آید. ابتدا مانایی، نرمال بودن جملهٔ اخلال و آزمون آرچ برای هر سه سری مالی انجام گرفت. با توجه به جدول ۱ هر سه سری مالی مانا بودند و فرضیهٔ وجود آرچ برای آنها رد نمی‌شود.

**جدول ۱. آزمون مانایی سری‌های مالی**

| مدل | نوع آزمون | مقدار آماره | احتمال |
|---|---|---|---|
| TEDPIX | دیکی ـ فولر | ۱۳/۷۶- | ۰/۰۰۰۰ |
| | جارک ـ برا | ۴۳/۶۸ | ۰/۰۰۰۰ |
| | آزمون آرچ | ۵۸/۳۸ | ۰/۰۰۰۰ |
| S&P500 | دیکی ـ فولر | ۳۴/۳۶- | ۰/۰۰۰۰ |
| | جارک ـ برا | ۵۰/۰۴ | ۰/۰۰۰۰ |
| | آزمون آرچ | ۵۹/۹۲ | ۰/۰۰۰۰ |
| USDJPY | دیکی ـ فولر | ۳۲/۸۷- | ۰/۰۰۰۰ |
| | جاک ـ برا | ۴۳/۵۰ | ۰/۰۰۰۰ |
| | آزمون آرچ | ۳۲/۱۱ | ۰/۰۰۰۸ |

**جدول ۲. ویژگی‌های مارکف سوئیچینگ گارچ و گارچ سری‌های مالی**

| مدل | ویژگی ها | TEDPIX | S&P500 | USDJPY |
|---|---|---|---|---|
| گارچ نرمال | Persistence | ۰/۹۶۳ | ۰/۹۵ | ۰/۹۹ |
| مارکف سوئیپچینگ گارچ نرمال | $P_{11}$ | ۰/۸۳۳ | ۰/۱۳ | ۰/۶۷ |
| | $\pi_1$ | ۰/۴۹ | ۰/۳۹ | ۰/۶۵ |
| | $\delta_1$ | ۶/۰۱ | ۱/۱۵ | ۳/۰۲ |
| | $E(\sigma^2_{1t})$ | ۰/۲۸ | ۰/۳۸ | ۰/۰۹ |
| | $P_{22}$ | ۰/۸۲۶ | ۰/۴۴ | ۰/۳۷ |
| | $\pi_2$ | ۰/۵۱ | ۰/۶۱ | ۰/۳۴ |
| | $\delta_2$ | ۶/۳۶ | ۱/۸۱ | ۱/۵۹ |
| | $E(\sigma^2_{2t})$ | ۱/۱۵ | ۱/۷۹ | ۰/۵۴ |

در جدول ۲ میانگین پایداری نوسانات مدل گارچ، احتمالات رژیم، احتمال غیر شرطی، بقای مورد انتظار و واریانس غیرشرطی هر یک از رژیم‌ها برای هر سه سری مالی نشان داده شده است.

در مدل تک‌رژیمهٔ گارچ، پایداری نوسانات[۱] طبق رابطهٔ ۳۵ محاسبه شده است.

رابطهٔ ۳۸)
$$\text{VolatilityPersistence} = \alpha + \beta$$

در مدل مارکف سوئیچینگ گارچ، $P_{11}$ و $P_{22}$ احتمال عدم تغییر رژیم هستند که پایداری هریک از رژیم‌ها را نشان می‌دهند. $\pi$ احتمال غیر شرطی[۲] اینکه فرایند در هریک از رژیم‌ها باقی بماند را نشان می‌دهد و به‌کمک رابطهٔ ۳۶ محاسبه شده است.

رابطهٔ ۳۹)
$$\Pi^1 = \frac{1-P_{22}}{2-P_{11}-P_{22}} \qquad \Pi^2 = \frac{1-P_{11}}{2-P_{11}-P_{22}}$$

$\delta$ نیز بقای مورد انتظار[۳] هر یک از رژیم‌ها را نشان می‌دهد که با توجه به رابطهٔ ۳۷ محاسبه می‌شود.

رابطهٔ ۴۰)
$$\delta_1 = \frac{1}{1-P_{11}} \qquad \delta_2 = \frac{1}{1-P_{22}}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، طبق جدول ۲ هر سه سری مالی دارای پایداری نوسانات بالا، بر اساس مدل گارچ نرمال هستند. بر اساس مدل مارکف سوئیچینگ گارچ، سری مالی بورس اوراق بهادار تهران دارای نوسانات بالا در هر دو رژیم و پایداری بسیار بالای رژیم‌هاست. در سری مالی شاخص بورس نیویورک، نوسانات در هر دو رژیم بالا و پایداری رژیم‌ها پایین است. سری مالی نرخ ارز دلار به ین نیز دارای نوسانات پایین در هر دو رژیم و پایداری نوسانات پایین است. از این رو با توجه به تفاوت سطح نوسانات و پایداری رژیم‌ها از این سری‌های مالی، برای محاسبهٔ فاصلهٔ اطمینان، بوت استرپ مدل مارکف سوئیچنگ گارچ نرمال و گارچ نرمال استفاده شده و نتایج آن مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. جدول ۳ نتایج فاصلهٔ اطمینان بوت استرپی با سطح اطمینان ۹۰ درصد و همچنین تکرار ۹۹۹ بار بوت استرپ[۴] را نشان می‌دهد.

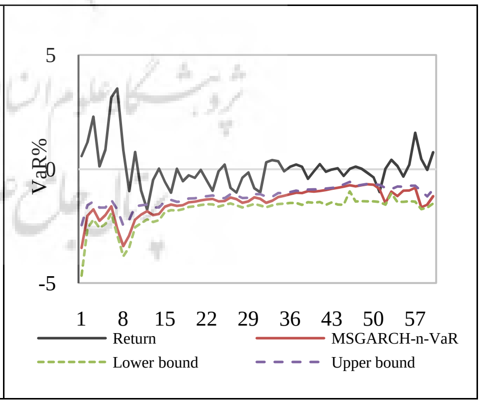
1. Volatility persistence
2. Unconditional probabilities
3. Expected durations

۴. با توجه به کریستوفرسن(۲۰۰۴) و سجاد(۲۰۰۷) تعداد دفعات تکرار بوت استرپ ۹۹۹ بار در نظر گرفته شده است. از آنجایی که محاسبه فاصله اطمینان مستلزم محاسبه چارک بالا و پایین داده‌ها می باشد. لذا برای سهولت محاسبات و رند بودن عدد چارک تعداد ۹۹۹ بار بوت استرپ صورت گرفته است که با عدد یک جمع گشته و در ۵ درصد و ۹۵ درصد ضرب می‌گردد، لذا ۵۰ امین و ۹۵۰ امین ارزش در معرض خطر به عنوان حد بالا و پایین ارزش در معرض خطر در نظر گرفته می‌شوند.

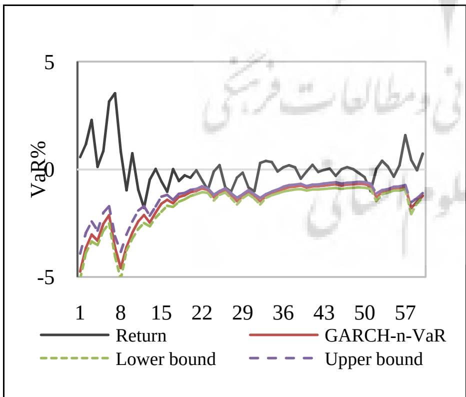
**جدول ۳. نتایج فاصلهٔ اطمینان بوت استرپی ۹۰ درصد برای سری‌های مالی**

| مدل | ویژگی‌ها | TEDPIX | S&P500 | USDJPY |
|---|---|---|---|---|
| گارچ نرمال | ارزش در معرض خطر | −۱/۵۲ | −۱/۱۸ | −۰/۷ |
| | فاصلهٔ اطمینان بوت استرپی | (−۱/۷۱،−۱/۳۱) | (−۱/۲۶،−۱/۱۱) | (−۰/۸۴،−۰/۶۴) |
| | پهنای بوت استرپی | ۰/۴ | ۰/۱۵ | ۰/۲ |
| مارکف سوئیپچینگ گارچ نرمال | ارزش در معرض خطر | −۱/۴۴ | −۱/۲۳۵ | −۰/۷ |
| | فاصلهٔ اطمینان بوت استرپی | (−۱/۸۲،−۱/۱۹) | (−۱/۳۸،−۱/۱) | (−۰/۷۹،−۰/۶۲) |
| | پهنای بوت استرپی | ۰/۶۳ | ۰/۲۸ | ۰/۱۷ |

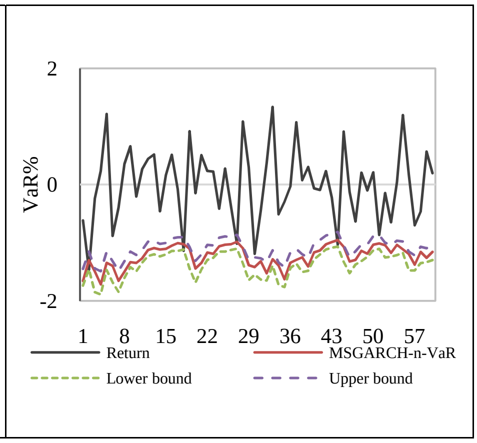
با توجه به جدول ۳ با در نظر گرفتن امکان انتقال بین دو رژیم مشاهده می‌شود که در سری‌های مالی پرنوسان با پایداری نوسانات بالا و کم (TEDPIX و S&P500) فاصلهٔ اطمینان بوت استرپی مارکف سوئیچینگ گارچ نسبت به مدل تک‌رژیمهٔ گارچ، پهن‌تر است. در حالی که در سری مالی با نوسانات پایین و پایداری کم (USD/JPY) فاصلهٔ اطمینان بوت استرپی مدل مارکف سوئیپچینگ گارچ نسبت به مدل گارچ باریک‌تر است. از این رو، فاصلهٔ اطمینان بوت استرپی مدل مارکف سوئیچینگ گارچ از حساسیت بیشتری نسبت به سطح نوسانات سری مالی برخوردار است. برای درک و مشاهدهٔ بهتر این موضوع شکل ۱ تا ۶ نمودار فاصلهٔ اطمینان بوت استرپی مدل مارکف سوئیچینگ گارچ و گارچ را برای سری های مالی مورد بررسی نشان می‌دهد.



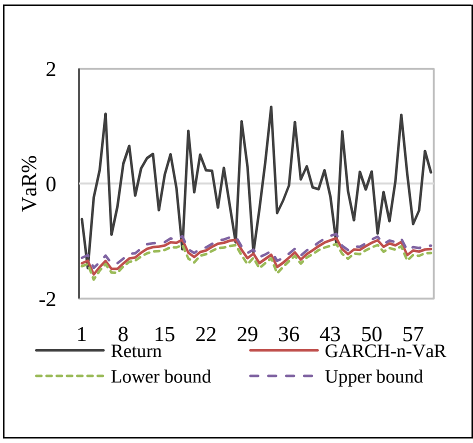

**شکل ۱. فاصلهٔ اطمینان MSGARCH-VaR برای شاخص TEDPIX**



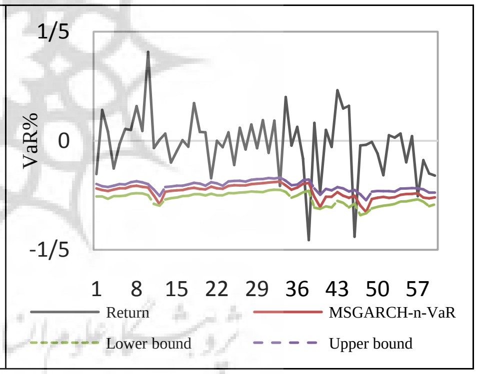

**شکل ۲. فاصلهٔ اطمینان GARCH-VaR برای شاخص TEDPIX**



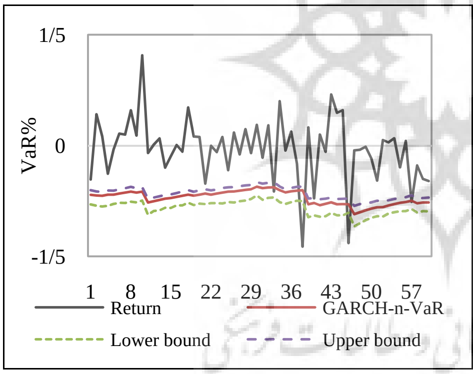

**شکل ۳. فاصلهٔ اطمینان MSGARCH-VaR برای شاخص S&P500**




**شکل ٤. فاصلهٔ اطمینان GARCH-VaR برای شاخص S&P500**




**شکل ۵. فاصلهٔ اطمینان MSGARCH-VaR برای USD/JPY**

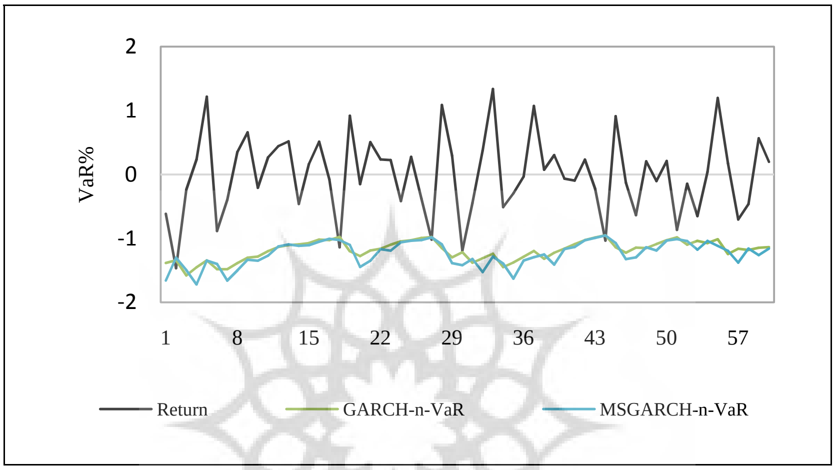



**شکل ٦. فاصلهٔ اطمینان GARCH-VaR برای USD/JPY**

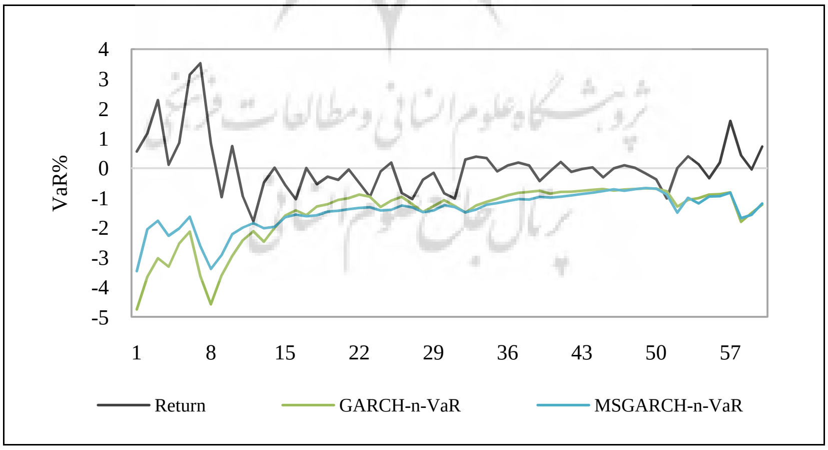
در جدول ۴ نتایج شبیه‌سازی مونت‌کارلو و سجاد (۲۰۰۷) درج شده است که در آن پهنای فاصلهٔ اطمینان بوت استرپی برای سه سری داده شبیه‌سازی‌شده با سطح نوسانات و پایداری رژیم‌های مختلف نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتایج داده‌های واقعی همراستا با نتایج شبیه‌سازی مونت‌کارلو ـ سجاد (۲۰۰۷) است.

جدول ٤. نتایج شبیه‌سازی مونت کارلو ـ سجاد (۲۰۰۷)

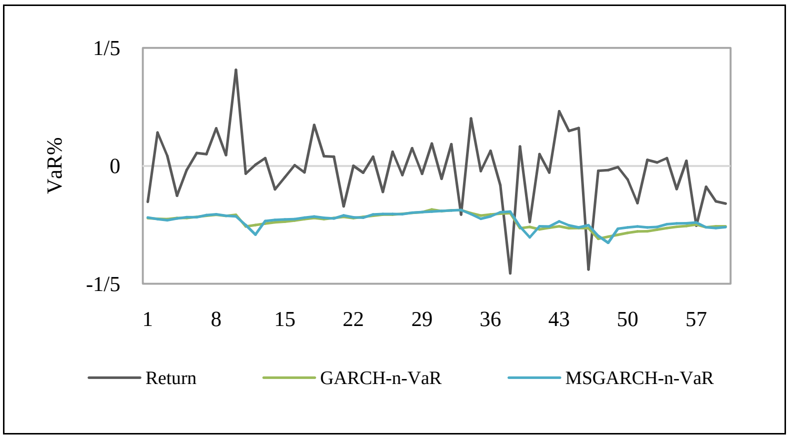
| مدل | پایداری ـ بالا نوسانات ـ بالا | پایداری ـ کم نوسانات ـ بالا | پایداری ـ کم نوسانات ـ کم |
|---|---|---|---|
| گارچ نرمال | ۱۹/۲۲ | ۲۳/۶۶ | ۱۵/۱۵ |
| مارکف سوئیچینگ گارچ نرمال | ۲۰/۰۲ | ۲۳/۰۸ | ۱۳/۳۶ |




شکل ۷. ارزش در معرض خطر ۹۵ درصد شاخص




شکل ۸. ارزش در معرض خطر ۹۵ درصد شاخص




**شکل ۹. ارزش در معرض خطر ۹۵ درصد نرخ ارز**

همچنین با توجه به شکل ۷ تا ۹ مشاهده می‌شود که مدل مارکف سوئیچینگ گارچ با در نظر گرفتن امکان چرخش بین رژیم‌های مختلف، به پیش‌بینی ارزش در معرض خطر محتاطانه‌تری نسبت به مدل گارچ منجر می‌شود.

همان‌طور که در جدول ۵ مشاهده می‌شود، فرض صفر هیچ یک از سری‌های مالی در هر دو آزمون پس‌نگر رد نمی‌شود و هر دو مدل از دقت نسبتاً بالایی در تخمین ارزش در معرض خطر برخوردارند.

**جدول ۵. نتایج آزمون‌های پس‌نگر برای سری‌های مالی**

| آزمون پس‌نگر | TEDPIX | | S&P500 | | USDJPY | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | گارچ نرمال | مارکف سوئیچینگ گارچ نرمال | گارچ نرمال | مارکف سوئیچینگ گارچ نرمال | گارچ نرمال | مارکف سوئیچینگ گارچ نرمال |
| p-value uc | ۰/۵۳ | ۰/۱۷ | ۰/۵۷ | ۰/۵۷ | ۰/۵۷ | ۰/۵۷ |
| p-value ind | ۰/۶۵ | ۰/۷۹ | ۰/۴ | ۰/۴ | ۰/۴ | ۰/۴ |

## نتیجه‌گیری و پیشنهادها

مدیران ریسک، اغلب برای اندازه‌گیری ریسک دارایی‌های مالی از معیار ارزش در معرض خطر استفاده می‌کنند. با توجه به گستردگی روش‌های محاسبۀ این معیار از ریسک و وابستگی آن به نوسانات بازده‌ها و عدم قطعیت مدل‌های پیش‌بینی نوسانات و همچنین خطای موجود در تخمین

پارامترهای آنها، این امکان وجود دارد که تخمین ارزش در معرض خطر دارایی‌های مالی با خطا همراه باشد.

از طرفی با توجه به کاربرد وسیع این معیار از ریسک و اهمیت آن، تخمین دقت مدل‌های محاسبهٔ ارزش در معرض خطر بسیار مهم است. از این رو مطالعهٔ حاضر به مقایسهٔ دقت مدل‌های مارکف سوئیچینگ گارچ و گارچ روی سه سری مالی با سطح نوسانات و پایداری رژیم‌های مختلف، شامل شاخص بورس اوراق بهادار تهران (TEDPIX)، شاخص بورس نیویورک (S&P500)، نرخ دلار آمریکا به ین ژاپن (USD/JPY)، با ساختن فاصلهٔ اطمینان بوت استرپی برای ارزش در معرض خطر، پرداخته است.

با توجه نتایج مندرج در جدول ۳، مدل‌های مارکف سوئیچینگ گارچ نسبت به نوسانات، حساسیت بیشتری از خود نشان می‌دهند؛ به‌طوری که در سری‌های مالی با سطح نوسانات بالا (مانند TEPIX، S&P500) مدل مارکف سوئیچینگ گارچ فاصلهٔ اطمینان بوت استرپی پهن‌تری را نسبت به دو مدل دیگر دارد. میزان تفاوت در پهنای فاصلهٔ اطمینان بوت استرپی با کاهش سطح پایداری رژیم‌ها کاهش می‌یابد، ولی همچنان نسبت به مدل گارچ دارای پهنای بیشتری است. از طرفی در سری‌های مالی با سطح نوسانات پایین (مانند USD/JPY) مدل مارکف سوئیچینگ گارچ نسبت به دو مدل دیگر فاصلهٔ اطمینان بوت استرپی باریک‌تری دارد.

سجاد (۲۰۰۷) با استفاده از داده‌های شبیه‌سازی‌شده نشان داد که حساسیت بالای مدل مارکف سوئیچینگ گارچ نسبت به سطح نوسانات سری مالی، منجر به افزایش دقت ارزش در معرض خطرهای محاسبه شده با استفاده از این مدل نسبت به مدل‌های گارچ می‌شود. از این رو، تخمین ارزش در معرض خطر شاخص بورس اوراق بهادار تهران با توجه به سطح نوسانات بالای آن و پایداری بالای رژیم‌ها در آن با استفاده از مدل مارکف سوئیچینگ گارچ نسبت به مدل گارچ از دقت بالاتری برخوردار است. همچنین با توجه به اهمیت بالای دقت ارزش در معرض خطر، گزارش فاصلهٔ اطمینان بوت استرپی برای آن، مدیران پورتفوی را در تعدیل به موقع پرتفوی خود و همچنین تخمین دقیق‌تر ارزش در معرض خطر یاری می‌کند.

مطالعهٔ در نظر گرفتن توزیع تی برای بازده‌ها و تخمین دقت مدل مارکف سوئیچینگ گارچ تی نسبت به مارکف سوئیچینگ گارچ نرمال، می‌تواند موضوعی برای تحقیقات آتی در این زمینه باشد.

## *References*

Abad, P., Benito, S. & López, C. (2014). A comprehensive review of Value at Risk methodologies. *The Spanish Review of Financial Economics*, *12*(1), 15-32.

Alexander, C. & Lazar, E. (2006). Normal mixture GARCH (1, 1): Applications to exchange rate modelling. *Journal of Applied Econometrics*, *21*(3), 307-336.

Ardia, D. (2009). Bayesian estimation of a Markov-switching threshold asymmetric GARCH model with Student-t innovations. *The Econometrics Journal*, *12*(1), 105-126.

Barone-Adesi, G. & Giannopoulos, K. (2001). Non parametric var techniques. myths and realities. *Economic Notes*, *30*(2), 167-181.

Bauwens, L., & Storti, G. (2009). A component GARCH model with time varying weights. Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics, 13(2).

Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. Journal of econometrics, 31(3), 307-327.

Cao, R., Febrerobande, M., González-Manteiga, W., Prada-Sánchez, J. M. & Garcfa-Jurado, I. (1997). Saving computer time in constructing consistent bootstrap prediction intervals for autoregressive process. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, *26*(3), 961-978.

Chappell, D. & Dowd, K. (1999). Confidence intervals for VaR. *Financial Engineering News*, *9*, 1-2.

Christoffersen, P. & Gonçalves, S. (2004). *Estimation risk in financial risk management*. CIRANO.

Christoffersen, P. F. (1998). Evaluating interval forecasts. *International economic review*, 39(4), 841-862.

Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. Econometrica. *Journal of the Econometric Society*, 987-1007.

Gray, S. F. (1996). Modeling the conditional distribution of interest rates as a regime-switching process. *Journal of Financial Economics*, 42(1), 27-62.

Haas, M., Mittnik, S., & Paolella, M. S. (2004). A new approach to Markov-switching GARCH models. *Journal of Financial Econometrics*, *2*(4), 493-530.

Hamilton, J. D., Susmel, R. (1994). Autoregressive Conditional Heteroskedasticity and changes in regimes. *Journal of Econometrics*, 64(1-2), 307-333.

Jorion, P. (1996). Risk2: Measuring the risk in value at risk. *Financial Analysts Journal*, *52*(6), 47-56.

Klaassen, F. (2002). Improving GARCH volatility forecasts with regime-switching GARCH. *In Advances in Markov-Switching Models (pp. 223-254). Physica-Verlag HD.*

Kupiec, P. H. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *The journal of Derivatives*, 3(2), 73-84.

Miguel, J. A., & Olave, P. (1999). Bootstrapping forecast intervals in ARCH models. *Test*, *8*(2), 345-364.

Pascual, L., Romo, J. & Ruiz, E. (1999). *Bootstrap predictive inference for ARIMA processes.*

Pritsker, M. (1997). Evaluating value at risk methodologies: accuracy versus computational time. *Journal of Financial Services Research*, 12(2), 201-242.

Ruiz, E., Romo, J., & Pascual, L. (2000). Forecasting returns and volatilities in GARCH processes using the bootstrap (No. 10059). Universidad Carlos III de Madrid. Departamento de Estadística.

Sajjad, R. (2007). *Value-at-risk in a Markov Regime-switching GARCH Framework*. Doctoral dissertation, University of Essex, Colchester.

Sattayatham, P., Sopipan, N., & Premanode, B. (2012). Forecasting Volatility and Price of the SET50 Index Using the Markov Regime Switching. *Procedia Economics and Finance*, *2*, 265-274.

Spierdijk, L., (2013) .Confidence intervals for ARMA-GARCH Value-at-Risk. *Working paper,* University of Groningen.