

## تخمین ارزش در معرض ریسک (VaR) و ریزش مورد انتظار (ES) با استفاده از رویکرد ارزش فرین شرطی در بورس اوراق بهادار تهران

علیرضا سارنج<sup>۱</sup>، مرضیه نوراحمدی<sup>۲</sup>

**چکیده:** این مقاله به برآورد ارزش در معرض ریسک و ریزش مورد انتظار با توجه به روش‌های نوین با تأکید بر رویکرد ارزش فرین شرطی و مقایسه آنها با عملکرد رویکردهای پارامتریک می‌پردازد. روش‌های معرفی شده محاسبه ریسک بازار برای شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران در دوره ۱۳۸۷ تا ۱۳۹۵ انجام شده است. به علاوه، برای بررسی و مقایسه الگوها از روش‌های پس‌آزمایی VaR مانند آزمون‌های استقلال تخطی‌ها و پوشش برنولی و روش‌های پس‌آزمایی ES همچون آزمون مک‌نیل و فری و آزمون رتبه‌بندی MCS استفاده می‌شود. نتایج پس‌آزمایی به دست آمده در این مقاله حاکی از برتری محاسبه VaR برگرفته از تئوری ارزش فرین شرطی در مقایسه با سایر مدل‌های رقیب، از قبیل مدل ارزش فرین غیرشرطی، نرمال ایستا (روش وارینانس - کواریانس) و نرمال شرطی (مدل گارچ) است. همچنین نتایج تابع MCS برای معیار ES نشان داد رویکردهای ارزش فرین شرطی با فرض پسماندهای استاندارد شده تی. استیودنت، ارزش فرین شرطی با فرض پسماندهای استاندارد شده نرمال و مدل GARCH با فرض پسماندهای تی. استیودنت به ترتیب در رتبه‌های اول تا سوم قرار می‌گیرند.

**واژه‌های کلیدی:** ارزش در معرض ریسک، تابع مجموعه اطمینان مدل، تئوری ارزش فرین شرطی، روش‌های پس‌آزمایی، رویکرد فراتر از آستانه، ریزش مورد انتظار.

۱. استادیار گروه حسابداری و مدیریت مالی، دانشکده مدیریت و حسابداری پردیس فارابی، دانشگاه تهران، قم، ایران

۲. دانشجوی کارشناسی ارشد مدیریت مالی دانشکده مدیریت و حسابداری پردیس فارابی، دانشگاه تهران، قم، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۵/۰۱/۳۰

تاریخ پذیرش نهایی مقاله: ۱۳۹۵/۰۶/۱۴

نویسنده مسئول مقاله: علیرضا سارنج

E-mail: alisaranj@ut.ac.ir

## مقدمه

امروزه اندازه‌گیری ریسک بازار از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. ورشکستگی‌های تاریخی، اُفت شدید بازار، سقوط بازارهای مالی، قصور مؤسسات بزرگ در ایفای تعهدات، بحران‌های مالی و بلایای طبیعی به دنبال رویدادهایی که معمولاً سابقه نداشته، رخ داده‌اند. احتمال وقوع حوادث فرین کم است، ولی به محض وقوع، تبعات (زیان‌های) بسیاری به همراه دارند که در بازارهای مالی مشهود است. با توجه به اهمیت این حوادث و رویدادها، یکی از مهم‌ترین کارهای مدیریت ریسک، ارائه ابزارهایی برای شناسایی و برآورد این حوادث است که از جمله آنها می‌توان به رویکردهای نوین اندازه‌گیری ارزش در معرض ریسک و ریزش مورد انتظار اشاره کرد.

ارزش در معرض ریسک، حداکثر زیان مورد انتظار بر پرتفوی سرمایه‌گذاری در مدت زمان معین و با فاصله اطمینان معین را نشان می‌دهد. در دهه ۱۹۹۰ رویکرد ارزش در معرض ریسک به واسطه پژوهش‌های انجام‌شده در مؤسسه جی. پی. مورگان معرفی شد و محققان بسیاری در این حوزه متمرکز شدند. به تعبیر آرتنر، دی‌هان، ابر و هلت (۱۹۹۹) VaR علی‌رغم سادگی و سهولت اجرا، معیار ریسک منسجم<sup>۱</sup> نیست، زیرا ویژگی زیرجمع‌پذیری ندارد؛ به این معنا که VaR پرتفوی کمتر از VaR مجموع دارایی‌های فردی داخل پرتفوی نیست (بر خلاف اصل تنوع‌سازی). مورد دیگر و شاید خطرناک‌تر، این است که VaR از زیان‌های بالقوه ماورای نقطه چندک مد نظر چشم‌پوشی می‌کند در حالی که معیار ریزش مورد انتظار منسجم است (اکر بی و تاسچه، ۲۰۰۲). VaR حداکثر زیان با سطح اطمینان مشخص در میان دوره زمانی معین است در حالی که ریزش مورد انتظار (ES) میانگین زیان به شرطی است که زیان از VaR فراتر رفته باشد. از جمله نام‌های دیگری که برای ریزش مورد انتظار به کار می‌رود، ارزش در معرض ریسک شرطی<sup>۲</sup>، دنباله شرطی مورد انتظار<sup>۳</sup> و دنباله زیان مورد انتظار<sup>۴</sup> است (جان هال، ۲۰۱۵: ۲۵۹). به‌طور کلی قاعده تصمیم‌گیری در مورد ریسک و بازده مورد انتظار، با استفاده از ES نسبت به VaR معتبرتر و مطلوب‌تر است.

تئوری ارزش فرین (EVT) بر مدل‌سازی رفتار دنباله توزیع زیان با استفاده از ارزش‌های فرین به جای کل نمونه متمرکز شده و از توزیع دنباله، برآوردی پارامتریک ارائه می‌کند. بنابراین EVT که بر اساس قضایای آماری فرین شکل گرفته است با تمرکز بر زیان‌های فرین، برای

۱. معیار ریسک، منسجم (coherent) است. اگر به‌طور همزمان حائز شرایط پایای انتقال (translation invariance)، همگنی مثبت (positive homogeneity) و زیرجمع‌پذیری (subadditivity) و یکنواختی (monotonicity) باشد.

2. Conditional value at risk

3. Conditional tail expectation

4. Expected tail loss

اندازه‌گیری ریسک مرتبط با دنباله، رویکردی بهتر و قوی‌تر ارائه می‌دهد. نظریه ارزش فرین غیرشرطی برای پیش‌بینی ارزش در معرض ریسک یا زیان منتظره طی یک دوره بلندمدت مفید است. اما، گاهی اوقات پژوهشگران به دنبال کاربرد نظریه ارزش فرین شرطی برای برخی ساختارهای پویا هستند و این مستلزم تمایز بین متغیر و عوامل تصادفی محرک آن است. استفاده از نظریه ارزش فرین شرطی یا پویا زمانی مفید است که با دوره‌های کوتاه‌مدت سروکار داشته باشیم و در عین حال، متغیر ساختاری پویا و قابل مدل‌سازی داشته باشد. به‌طور معمول خود سری‌های زمانی زیان دارای توزیع یکسان و مستقل (iid) نیستند، بنابراین با استفاده از مدل‌سازی نوسانات می‌توان پسماندهای استاندارد شده که iid هستند را در تئوری ارزش فرین به کار برد. در این پژوهش با استفاده از تئوری ارزش فرین مورد انتظار محاسبه شده و عملکرد و دقت آنها را با یکدیگر مقایسه خواهیم کرد. تأکید اصلی این پژوهش بر تئوری ارزش فرین (EVT) به منظور ارزیابی این است که مدل‌های ارزش فرین شرطی در ارزیابی ارزش در معرض ریسک و ریزش مورد انتظار چقدر بهتر از سایر رویکردها عمل می‌کند؟

در راستای بررسی پرسش بالا، ساختار مقاله حاضر بدین ترتیب است. ابتدا پژوهش‌های مشابه انجام شده در خارج و داخل کشور به‌طور مختصر بیان شده و در ادامه، به بررسی مبانی نظری پژوهش پرداخته می‌شود. بخش بعد به ارائه روش‌های مختلف اندازه‌گیری ارزش در معرض ریسک همراه با انواع مختلف روش‌های پس‌آزمایی اختصاص دارد. پس از آن مطالب با تجزیه و تحلیل داده‌ها ادامه می‌یابد و در نهایت به نتیجه‌گیری می‌پردازیم.

### پیشینه تجربی پژوهش

پژوهش‌های انجام‌شده در خصوص اندازه‌گیری ارزش در معرض ریسک در دو گروه طبقه‌بندی می‌شوند. بخش نخست اندازه‌گیری این سنجه بر اساس روش‌های سنتی مانند روش‌های پارامتریک و ناپارامتریک است. روش واریانس - کواریانس از جمله روش‌های پارامتریک است که فرض را بر نرمال بودن توزیع بازده‌ها می‌گذارد. روش تاریخی و مونت کارلو نیز از جمله روش‌های ناپارامتریک است. امروزه محققان دریافته‌اند که بازده دارایی‌های مالی نرمال نبوده و مقدار شایان توجهی کشیدگی (حاکمی از دنباله پهن توزیع احتمال آنها) را نشان می‌دهند. همچنین، فرض توزیع‌های مشخص (مثل نرمال،  $t$ ، GED و ...) برای برآورد آماره‌های مرکزی مناسب هستند، در صورتی که در بحث برآورد VaR و ES روی ارزش‌های حدی که به‌طور معمول داده‌های کمی نیز برای آنها وجود دارد، تأکید می‌شود. به همین دلیل گروه دوم از پژوهش‌ها به محاسبه این سنجه ریسک بر اساس روش‌های نوین و نظریه‌های آماری برای

تخمین درست دنباله توزیع می‌پردازند. به طور مثال، تئوری ارزش فرین (EVT) بر مدل‌سازی رفتار دنباله توزیع زیان فقط با استفاده از این ارزش‌ها به جای کل نمونه متمرکز شده و برآوردی پارامتریک از توزیع دنباله ارائه می‌کند. در این گروه از مطالعات می‌توان به تحقیقات زیر اشاره کرد:

لانگین (۱۹۹۶) تحركات فرین را در قیمت بازار سهام ایالات متحده آمریکا بررسی کرد و نشان داد که بازده‌های فرین از توزیع دنباله پهن فرشت<sup>۱</sup> تبعیت می‌کنند. دنیلسون و دی وریز (۱۹۹۷) نشان دادند که تئوری ارزش فرین عموماً زمانی که دنباله‌ها پهن باشند نسبت به روش‌های تاریخی و واریانس - کواریانس دقیق‌ترند. مولر، داکورگونا و پیکت (۱۹۹۸) روش EVT را همراه با مدل گارچ متغیر در زمان برای نرخ‌های ارز خارجی به کار بردند. بالی و نفتچی (۲۰۰۳) از رویکرد EVT برای به دست آوردن ارزش در معرض ریسک تغییرات عایدی خزانه ایالات متحده استفاده کردند. هو، باریج، کیدل و توپالد (۲۰۰۰) و ژنسی و سلکوک (۲۰۰۴) EVT را برای بازارهای سهام نوظهور تحت تأثیر بحران مالی به کار بردند و نشان دادند توزیع تعمیم‌یافته پرتو برای توزیع بازده دنباله‌ها در این بازارها مناسب بوده و تئوری ارزش فرین در پیش‌بینی VaR به خصوص در دنباله‌های فرین تر بر سایر روش‌های پارامتریک مسلط است. رن و جیلز (۲۰۱۰) کاربرد ارزش فرین را برای بازده روزانه قیمت نفت خام در بازار نقدی کانادا بین سال‌های ۱۹۹۸ تا ۲۰۰۶ ارائه کردند. دیمیتریکوپلس، ناووسانوس و اسپيرو (۲۰۱۰) دقت پیش‌بینی انواع رویکردهای ارزش در معرض ریسک را در ۱۶ بازار سهام نوظهور و ۴ بازار سهام توسعه‌یافته ارزیابی کردند و دریافتند که مدل ارزش فرین بهترین روش نتایج پس‌آزمایی را به دست می‌آورد. موتو، بالوگ و مولدوان (۲۰۱۱) عملکرد مدل‌های متفاوت ارزش در معرض ریسک را با استفاده از شاخص‌های روزانه بازار سهام اروپای مرکزی و شرقی تحلیل کردند. آنها مشاهده کردند که تنها مدل‌های پیشرفته ارزش در معرض ریسک از قبیل تئوری ارزش فرین یا مدل‌های گارچ می‌توانند به خوبی ریسک بازار را اندازه‌گیری کنند. در این مقاله‌ها در حالی که EVT برای پیش‌بینی VaR به کار رفته‌اند، تمرکز روی برآورد توزیع غیرشرطی بازده‌های دارایی است و نوسانات تصادفی سری‌های زمانی مالی نادیده گرفته می‌شود. علاوه بر این، استفاده از EVT متکی بر فرض مهم مشاهدات با توزیع یکسان و مستقل (iid) است که به طور معمول با داده‌های واقعی سری‌های زمانی مالی، تطابق ندارد. به منظور غلبه بر این مشکل راه‌حلی توسط مک نیل و فری (۲۰۰۰) ارائه شد. سینگ، آلن و رابرت (۲۰۱۳) در مقاله «ریسک بازار فرین و تئوری ارزش فرین» تئوری ارزش فرین را برای مدل ریسک بازار آن برای شاخص عمومی

1. Frechet fat-tailed distribution

ASX-ALL و شاخص S&P500 آمریکا به کار گرفتند. آنها نشان دادند EVT می‌تواند برای سری‌های بازده بازارهای مالی برای پیش‌بینی CVaR, VaR یا ES (ریزش مورد انتظار) و سطح بازده مورد انتظار و همچنین محاسبه VaR روزانه با استفاده از مدل GARCH و EVT مبتنی بر رویکرد پویا، با موفقیت به کار گرفته شود.

در ادامه برخی از مهم‌ترین تحقیقات داخلی صورت گرفته در خصوص تئوری ارزش فرین بررسی می‌شود. فلاح پور و یاراحمدی (۱۳۹۱) در تحقیق خود دنباله تابع توزیع بازده چند شاخص بورس اوراق بهادار تهران با استفاده از تئوری تعمیم‌داده شده مقدار حدی در دو بازه زمانی مختلف را بررسی کرده و وجود دنباله پهن را آزمایش کردند. فلاح‌طلب و عزیززی (۱۳۹۲) در تحقیق خود رویکرد فراتر از آستانه را در پیش‌بینی VaR شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران به کار گرفته و نتایج این روش را با نتایج دیگر رویکردها مقایسه کردند. نتایج تحقیق نشان می‌دهد استفاده از این رویکرد در سطوح اطمینان بالا قابل اتکا است. سجاد و هدایتی (۱۳۹۳) در مقاله خود مقدار VaR را با استفاده از هفت روش مختلف از جمله نظریه ارزش فرین و برای سه سطح اطمینان، برای بازده لگاریتمی شاخص کل TSE، نرخ برابری دلار و یورو به صورت روزانه محاسبه کردند. نتایج نشان داد محاسبه VaR با استفاده از روش‌های سنتی لزوماً نتایج مناسبی نمی‌دهد و در برخی از موارد استفاده از نظریه ارزش فرین و در نظر گرفتن نوسانات شرطی برای داده‌ها نتایج بهتری دارد. همچنین باجلان، راعی و محمدی (۱۳۹۳) نیز در مقاله خود از نظریه ارزش فرین برای مدل‌سازی تابع زیان بیمه‌ای استفاده کردند.

### پیشینه نظری پژوهش

تئوری ارزش فرین روشی برای برآورد بهتر نتایج فرین پرتفوی است. تئوری ارزش فرین شاخه‌ای از آمار است که با انحرافات فرین<sup>۱</sup> در توزیع احتمال ارتباط دارد. این تئوری در تعدادی از رشته‌ها برای برآورد حوادث بسیار نادر و مشاهده نشده، به کار می‌رود. تئوری ارزش فرین مربوط به تعیین حدهای مجانبی است که توزیع فرین‌ها را توصیف می‌کند (ری، ۲۰۱۰: ۳۷). دو رویکرد توزیع تعمیم‌یافته ارزش فرین (GEV) و رویکرد فراتر از آستانه<sup>۲</sup> (POT) نسخه‌های مختلفی از یک نظریه زیربنایی به نام نظریه ارزش فرین هستند. رویکرد نخست، پوشش دهنده توزیع ارزش‌های فرین است و رویکرد دوم، با توزیع تخطی‌های فراتر از یک آستانه بزرگ سروکار دارد که در ادامه درباره آن بحث شده و در این تحقیق از آن استفاده خواهد شد.

1. Extreme deviations  
2. Peaks over Threshold

### رویکرد فراتر از آستانه

همان گونه که نظریهٔ تعمیم‌یافتهٔ ارزش فرین راه‌حلی بدیهی برای مدل‌سازی حداکثرها و حداقل‌هاست، رویکرد فراتر از آستانه نیز روشی بدیهی برای مدل‌سازی تخطی‌ها از یک آستانهٔ بزرگ است. به‌یانی دیگر، ما تنها به دنبال مشاهدات حداکثر یا حداقل نیستیم، بلکه تخطی مشاهدات فرین از یک آستانهٔ بزرگ نیز برایمان جالب است. یک راه استخراج ارزش‌های فرین از یک نمونهٔ مشاهدات این است که تخطی‌ها از یک آستانهٔ بزرگ را به‌عنوان ارزش‌های فرین در نظر بگیریم. اگر نمونهٔ مشاهدات را با  $X_1, X_2, \dots, X_n$ ، تابع توزیع آن را با  $F(X)$  و مقدار آستانه را با  $u$  نشان دهیم،  $F(u)$  را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم (ژنسی و سلوک، ۲۰۰۴: ۲۹۱):

$$F(u) = Pr \{X_i \leq u\} \quad \text{رابطه (۱)}$$

تخطی زمانی اتفاق می‌افتد که برای هر  $i = 1, 2, \dots, n$  داشته باشیم:

$$X_i > u \quad \text{رابطه (۲)}$$

بر این اساس، مقدار اضافی فراتر از آستانه را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$y_i = X_i - u \quad \text{رابطه (۳)}$$

برای احتمالات  $X_i \leq y_i + u$  خواهیم داشت (ژنسی و سلوک، ۲۰۰۴: ۲۹۱):

$$Pr\{X_i \leq y_i + u\} = F(y_i + u) \quad \text{رابطه (۴)}$$

به این ترتیب، برای توزیع احتمال مقادیر اضافی فراتر از آستانه  $u$  خواهیم داشت:

$$F_u(y) = Pr \{X_i - u \leq y_i | X_i > u\} \quad \text{رابطه (۵)}$$

که  $F_u(y)$  معرف احتمال تخطی  $X$  حداکثر به اندازه  $y$  از آستانه  $u$  است، البته مشروط بر این که  $X$  از  $u$  فراتر رفته باشد. این احتمال مشروط را می‌توان به‌صورت زیر نوشت (ژنسی و سلوک، ۲۰۰۴: ۲۹۱):

$$F_u(y) = Pr \{X_i - u \leq y_i | X_i > u\} = \frac{Pr \{X_i - u \leq y_i, X_i > u\}}{Pr (X_i > u)} \quad \text{رابطه (۶)}$$

که در نتیجه خواهیم داشت:

$$F_u(y) = \frac{F(y_i + u) - F(u)}{1 - F(u)} \quad \text{رابطه (۷)}$$

از آنجا که  $F_u(y)$  احتمال مشروط بر تخطی از آستانه است،  $y_i$  تنها برای مقادیر بزرگ‌تر از صفر تعریف می‌شود و بدین ترتیب هر زمان که  $y_i$  مقدار می‌گیرد، تخطی روی داده است. می‌دانیم که برای هر  $X > u$  داریم:  $X = y + u$  بنابراین توزیع احتمال متغیر  $X$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$F(x) = [1 - F(u)]F_u(y) + F(u) \quad \text{رابطه ۸}$$

توجه داشته باشید که رابطه بالا تنها برای  $X > u$  صادق است (ژنسی و سلوک، ۲۰۰۴: ۲۹۱).

بالکما و دی‌هان و نیز پیکاندس طی قضیه‌ای نشان دادند که برای  $u$ هایی که به اندازه کافی بزرگ است، تابع توزیع مقادیر فراتر از آستانه را می‌توان با توزیع تعمیم‌یافته پرتو تقریب زد، زیرا با بزرگ شدن آستانه، توزیع ارزش‌های فراتر از آستانه یعنی  $F_u(y)$  به توزیع تعمیم‌یافته پرتو نزدیک می‌شود. توزیع تعمیم‌یافته پرتو را به صورت زیر تعریف می‌کنیم (ژنسی و سلوک، ۲۰۰۶: ۵۵۱):

$$G_{\xi, \mu, \sigma}(x) = \begin{cases} 1 - \left[1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-1/\xi} & \text{if } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left[-\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right] & \text{if } \xi = 0 \end{cases} \quad \text{رابطه ۹}$$

$$x \in \begin{cases} [\mu, \infty] & \text{if } \xi \geq 0 \\ [\mu, \mu - \sigma/\xi] & \text{if } \xi < 0 \end{cases} \quad \text{با:}$$

بدیهی است که حد بخش نخست رابطه بالا به ازای  $\xi \rightarrow 0$ ، برابر با رابطه دوم است. بر این اساس، می‌توان توزیع تعمیم‌یافته پرتو را تنها با رابطه زیر نمایش داد:

$$G_{\xi, \mu, \sigma}(x) = 1 - \left[1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-1/\xi} \quad \text{رابطه ۱۰}$$

اهمیت قضیه بالکما، دی‌هان و پیکاندس در این است که می‌توان توزیع ارزش‌های فراتر از آستانه را با انتخاب شاخص دنباله و یک آستانه بزرگ از طریق GPD تخمین زد. توجه داشته باشید که در رابطه‌های ۹ و ۱۰،  $x$  همان ارزش‌های فراتر از آستانه یا «X»های بزرگ‌تر از  $u$  است و  $\mu$  نیز معادل آستانه یا همان  $u$  است. بنابراین می‌توان رابطه ۹ را به این صورت بازنویسی کرد:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left[1 + \xi \left(\frac{x-u}{\sigma}\right)\right]^{-1/\xi} & \text{if } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left[-\left(\frac{x-u}{\sigma}\right)\right] & \text{if } \xi = 0 \end{cases} \quad \text{رابطه (۱۱)}$$

$$x \in \begin{cases} [u, \infty] & \text{if } \xi \geq 0 \\ [u, u - \sigma/\xi] & \text{if } \xi < 0 \end{cases} \quad \text{با:}$$

### برآورد ES و VaR

محاسبه ارزش در معرض ریسک مستلزم تخمین چندک‌های توزیع بازده دارایی است. این کار معادل محاسبه چندک‌های توزیع بازده مادر است. تا اینجا، فرایند تخمین توزیع ارزش‌های فراتر از آستانه ارائه شد. به عبارت دیگر، می‌توان توزیع بازده‌های کوچک‌تر از یک آستانه کوچک یا زیان‌های بزرگ‌تر از یک آستانه بزرگ را تعیین کرد. اما، چگونه می‌توان از طریق توزیع احتمال دنباله‌های متغیری تصادفی مانند بازده، توزیع بازده مادر و چندک‌های توزیع بازده را استخراج کرد؟ و در نهایت، چگونه می‌توان ارزش در معرض ریسک را محاسبه کرد؟ برای حل این مسئله باید به دنبال رابطه‌ای باشیم که نشان‌دهنده نحوه ارتباط توزیع بازده‌های فراتر از آستانه و توزیع بازده مادر است. این ویژگی در رابطه ۸ یافت می‌شود.

طبق قضیه بالکما، دی‌هان و پیکاندس،  $F_u(\gamma)$  برای « $u$ »هایی که به اندازه کافی بزرگ است، به توزیع تعمیم‌یافته پرتو نزدیک می‌شود و نیز از آنجا که برای هر  $X > u$  داریم:  $X = u + \gamma$ ، می‌توان نوشت (داو، ۲۰۰۵: ۲۰۲):

$$F(x) = [1 - F(u)]G_{\xi, \mu, \sigma}(x - u) + F(u) \quad \text{رابطه (۱۲)}$$

بعد از تعیین آستانه، مشاهدات فراتر از آستانه را از نمونه مشاهدات جدا می‌کنیم. اگر تعداد مشاهدات فراتر از آستانه را با  $n_u$  و تعداد کل مشاهدات نمونه را با  $n$  نمایش دهیم، به راحتی می‌توانیم آخرین جمله سمت راست رابطه ۱۲ را با برآوردکننده تجربی زیر تخمین بزنیم (ژنسی و سلوک، ۲۰۰۶: ۵۵۲):

$$\hat{F}(u) = \frac{n - n_u}{n} \quad \text{رابطه (۱۳)}$$

با جای‌گذاری رابطه ۱۳ در رابطه ۱۲ می‌توان توزیع احتمال مقادیر  $x$  را برآورد کرد (ژنسی و سلوک، ۲۰۰۴: ۲۹۲):



$$\begin{aligned} \hat{F}(x) &= \left(1 - \frac{n - n_u}{n}\right) G_{\xi, \mu, \sigma}(x - u) + \frac{n - n_u}{n} & \text{رابطه ۱۴} \\ &= \frac{n_u}{n} G_{\xi, \mu, \sigma}(x - u) + \frac{n - n_u}{n} \\ &= 1 + \frac{n_u}{n} [G_{\xi, \mu, \sigma}(x - u) - 1] \end{aligned}$$

در نهایت، با جای گذاری رابطه ۱۰ در رابطه ۱۴ خواهیم داشت:

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{n_u}{n} \left[1 + \xi \left(\frac{x - u}{\hat{\sigma}}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right] \quad \text{رابطه ۱۵}$$

می توانیم به جای  $x - u$ ، معادل آن یعنی مقادیر اضافی فراتر از آستانه را جایگزین کنیم (ژنسی و سلوک، ۲۰۰۴: ۲۹۲):

$$\hat{F}(x) = 1 - \frac{n_u}{n} \left[1 + \xi \frac{y}{\hat{\sigma}}\right]^{-\frac{1}{\xi}} \quad \text{رابطه ۱۶}$$

برای یک سطح اطمینان معین مثل  $1 - \alpha$ ، به راحتی می توان چندک مربوط به توزیع  $\hat{F}(x)$  را برآورد کرد. بدیهی است که این کار با معکوس کردن توزیع  $\hat{F}(x)$  امکان پذیر است:

$$\hat{F}^{-1}(1 - \alpha) = u + \frac{\hat{\sigma}}{\xi} \left\{ \left(\frac{n}{n_u} \alpha\right)^{-\xi} - 1 \right\} \quad \text{رابطه ۱۷}$$

این رابطه در صورتی صحیح است که شرط زیر برآورده شود:

$$1 - \alpha > F(u) \quad \text{رابطه ۱۸}$$

اگر داده های مورد بررسی بازده دارایی باشد، رابطه ۱۷ همان ارزش در معرض ریسک درصدی است. یعنی می توان نوشت (ژنسی و سلوک، ۲۰۰۴: ۲۹۸):

$$\%VaR = u + \frac{\hat{\sigma}}{\xi} \left\{ \left(\frac{n}{n_u} \alpha\right)^{-\xi} - 1 \right\} \quad \text{رابطه ۱۹}$$

ارزش در معرض ریسک از حاصل ضرب ارزش در معرض ریسک درصدی در قیمت جاری دارایی به دست می آید.

ریزش مورد انتظار درصدی نیز برابر است با (آلن و سینگ، ۲۰۱۳: ۳۶۱):

$$\%ES = \frac{\%VaR}{1 - \xi} + \frac{\hat{\sigma} - \xi u}{1 - \xi} \quad (\text{رابطه ۲۰})$$

البته، این رابطه مشروط بر  $1 < \xi$  است.

### روش‌شناسی پژوهش

#### به‌کارگیری تئوری ارزش فرین شرطی<sup>۱</sup> در ارزش در معرض ریسک و ریزش مورد انتظار

در حالی که دنباله پهن ممکن است به‌طور مستقیم توسط EVT مدل‌سازی شود، فقدان بازده (زبان)های iid همچنان مشکل‌ساز است. یک رویکرد برای این حل این مشکل به‌وسیله مک نیل و فری (۲۰۰۰) فراهم شده است. آنها با استفاده از رویکرد دو مرحله‌ای، نوسانات شرطی را با استفاده از مدل‌های گارچ در مرحله نخست برآورد کردند. از مدل گارچ برای فیلتر کردن سری‌های بازدهی استفاده می‌شود، به‌طوری که پسماندهای مدل گارچ نسبت به سری‌های بازدهی اولیه به iid نزدیک‌تر هستند. با وجود مرحله نخست همچنان ممکن است پسماندهای گارچ، دنباله‌های متراکم داشته باشند (کارماکار و شوکلا، ۲۰۱۵: ۳). بنابراین در مرحله دوم، مک نیل و فری EVT را برای پسماندهای گارچ به‌کار بردند. به همین ترتیب، ترکیب EVT-GARCH هر دوی نوسانات متغیر در زمان و توزیع دنباله پهن را اصلاح می‌کند. بنابراین رویکرد EVT شرطی به‌صورت زیر انجام می‌گیرد:

مدل گارچ مناسبی برای داده‌های بازده به‌وسیله رویکرد حداکثر کردن شبه‌درست‌نمایی<sup>۲</sup> برازش می‌شود. یعنی، به حداکثر رساندن تابع لگاریتم درست‌نمایی نمونه با فرض شوک‌های با توزیع معین. به پسماندهای استانداردشده محاسبه‌شده در مرحله ۱ که فرایند نوفه سفید<sup>۳</sup> هستند، توجه کرده و دنباله‌های شوک‌ها را با استفاده از EVT برآورد کنید. سپس، چندک‌های شوک‌ها را برای ارزش‌های مختلف q محاسبه کنید (کارماکار و شوکلا، ۲۰۱۵: ۴).

فرض می‌کنیم که بازده میانگین شرطی را می‌توان به‌وسیله مدل  $AR(s)$  ارائه کرد:

$$r_t = u_t + \varepsilon_t = u_t + \sqrt{h_t} z_t \quad (\text{رابطه ۲۱})$$

که  $u_t = a_0 + \sum_{i=1}^s a_i r_{t-i}$ ،  $a_0$  ثابت،  $a_i$  پارامترها،  $r_{t-i}$  بازده‌های وقفه‌ای و  $\varepsilon_t$  پسماندی است که از توزیع معینی مانند نرمال، GEV،  $t$  یا .... پیروی می‌کند،  $z_t = \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{h_t}}$  یا

1. Conditional EVT
2. Quasi-maximum likelihood
3. White noise process

همچنین فرض می‌کنیم که واریانس شرطی  $h_t$  و واریانس شرطی  $\varepsilon_t$  است (کارماکار و شوکلا، ۲۰۱۵: ۴).

$Z_t = \frac{r_t - u_t}{\sqrt{h_t}}$  پسماند استاندارد شده و  $h_t$  واریانس شرطی  $h_t$  از فرایند گارچ مناسبی پیروی می‌کند.

اگر پسماندهای استاندارد شده iid باشند و مدل برازش شده به خوبی تصریح شده باشد، مرحله نخست با برآورد میانگین شرطی  $u_{t+1}$  و واریانس  $h_{t+1}$  برای روز  $t + 1$  با استفاده از پیش‌بینی‌های استاندارد یک مرحله رو به جلو<sup>۱</sup> به پایان می‌رسد. پیش‌بینی میانگین شرطی یک مرحله رو به جلو عبارت است از:

$$\hat{u}_{t+1} = \hat{a}_0 + \sum_{i=1}^s \hat{a}_i r_{t-i+1} \quad \text{رابطه ۲۲}$$

و پیش‌بینی واریانس شرطی یک مرحله رو به جلو با استفاده از مدل مناسب GARCH(p,q) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i+1}^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i \sigma_{t-i+1}^2 \quad \text{رابطه ۲۳}$$

در مرحله دوم، EVT را برای پسماندهای استاندارد شده  $Z_t$  به کار برده و چندک دنباله تعریف شده را برآورد می‌کنیم. برآورد ارزش در معرض ریسک شرطی برای افق یک روزه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{VaR}_{1-\alpha}^t = \hat{u}_{t+1} + \sqrt{\hat{h}_{t+1}} \text{VaR}(z_{1-\alpha}) \quad \text{رابطه ۲۴}$$

که  $1 - \alpha$  سطح اطمینان و  $\text{VaR}(z_{1-\alpha})$  به وسیله معادله زیر به دست می‌آید و برای پسماندهای استاندارد شده منفی به کار می‌رود (کارماکار و شوکلا، ۲۰۱۵: ۴).

$$\text{VaR}(z_{1-\alpha}) = u + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} \left\{ \left( \frac{n}{n_u} \alpha \right)^{-\hat{\xi}} - 1 \right\} \quad \text{رابطه ۲۵}$$

و در نهایت ما نتایج به دست آمده از تئوری ارزش فرین شرطی را با دیگر مدل‌های رقیب از قبیل مدل ارزش فرین غیرشرطی، شبیه‌سازی تاریخی، نرمال ایستا (یا روش واریانس - کوواریانس) و نرمال شرطی (مدل گارچ) مقایسه می‌کنیم.

### پس آزمایی

برای انجام پس آزمایی ارزش در معرض ریسک از آزمون پوششی برنولی و استقلال تخطی استفاده کرده و برای پس آزمایی ریزش مورد انتظار از پس آزمایی مک نیل و فری و تابع زیان و آزمون رتبه بندی MCS استفاده می کنیم.

### پس آزمایی مک نیل و فری

پس آزمایی برای پیش بینی های ریزش مورد انتظار مدل های ریسک به وسیله مک نیل و فری (۲۰۰۰) ارائه شده که یکی از موفق ترین روش ها در ادبیات است. این پس آزمایی مبتنی بر سری پسماندهای تخطی استاندارد شده<sup>۱</sup> است که بر اساس رابطه زیر تعریف می شود (اولسن، ۲۰۱۵: ۲۷):

$$R_{t+1} = \begin{cases} \frac{y_{t+1} - ES_{t+1|t}^{(1-p)}}{\hat{\sigma}_{t+1}}, & \text{if } y_{t+1} < VaR_{t+1|t}^{(1-p)} \\ 0, & \text{if } y_{t+1} \geq VaR_{t+1|t}^{(1-p)} \end{cases} \quad \text{رابطه ۲۶}$$

تمایز بین بازده های تخطی کننده از VaR و پیش بینی ES در آن روز به نحوه استاندارد شدن آنها توسط انحراف معیار برآورده شده است. برآورد  $\hat{\sigma}_{t+1}$  در روش های پارامتریک و نیمه پارامتریک به وسیله هر کدام از مدل های آرچ به دست می آید، در صورتی که این برآورد برای مدل های ناپارامتریک از طریق انحراف معیار نمونه به دست می آید. این پس آزمایی متکی بر مشاهده ای است که  $R_{t+1}$  باید مانند فرایند iid با میانگین صفر رفتار کرده و اینکه ES برآوردی نارایب از امید ریاضی دنباله<sup>۲</sup> است و پویایی های فرایند بازده به درستی مدل سازی شده است. فرضیه صفر و فرضیه مقابل می تواند به صورت زیر باشد (اولسن، ۲۰۱۵: ۲۸):

$$H_0: \bar{R}_{t+1} = 0 \quad \text{رابطه ۲۷}$$

$$H_1: \bar{R}_{t+1} > 0$$

که  $\bar{R}_{t+1}$  نمایانگر میانگین بردار پسماندهای تخطی استاندارد شده، است. فرضیه مقابل یک طرفه است به طوری که میانگین مثبت نشان دهنده این است که ES کمتر برآورد شده است، که این حالت اغلب خطرناک ترین حالت است (مک نیل و فری، ۲۰۰۰). آماره آزمون مشابه نسبت t استاندارد توسط رابطه زیر به دست می آید:

1. Standardized exceedance residuals
2. Tail expectation

$$t_{R_{t+1}} = \frac{\bar{R}_{t+1}}{\hat{\sigma}_{R_{t+1}}/\sqrt{N}} \quad \text{رابطه ۲۸}$$

که  $\hat{\sigma}_{R_{t+1}}$  نمایانگر انحراف معیار  $\bar{R}_{t+1}$  و تعداد تخطی از نمونه مانند پس آزمایی VaR با N نشان داده می‌شود. از آنجا که توزیع t نامعلوم است، فرایند بوتسترپ، که پیش فرضی در مورد توزیع پسماند نمی‌کند، انجام می‌شود.

### رتبه‌بندی بر اساس روش MCS

وجود چندین تصریح مدل مختلف معتبر برای VaR و ES این سؤال را مطرح می‌کند که بهترین مدل (بهینه) کدام است. رویه آماری به کاررفته برای تعیین اینکه آیا ارزش میانگین تابع زیان یک مدل ریسک نسبت به مدل دیگر به صورت معناداری آماری بالاتر است یا خیر، رویه مجموعه اطمینان مدل (MCS) پیشنهادی توسط هانسن، لوند و ناسون (۲۰۱۱) است. رویه هانسن شامل دنباله‌ای از آزمون‌های آماری است که در آنها، مدل‌ها به لحاظ معناداری آماری و با استفاده از آزمون‌های آماره توانایی پیش‌بینی برابر (EPA) به صورت دوجه دو مقایسه شده و در نهایت مجموعه‌ای از مدل‌های برتر که در آنها فرضیه صفر آزمون EPA در سطح اطمینان  $\alpha$  رد نشده‌اند، ایجاد می‌شود. آزمون‌های آماره EPA برای هر تابع زیان اختیاری که شرایط کلی مانایی ضعیف را برآورده کند، قابل محاسبه است. ورودی‌های MCS توابع زیان مدل‌های مختلف هستند. بنابراین تابع زیان زیر بر این اساس برای مدل‌های مختلف ES محاسبه می‌شود (اولسن، ۲۰۱۵: ۳۰):

$$\psi_{(ES)t+1} = \begin{cases} 1 + (y_{t+1} - ES_{t+1|t}^{(1-p)})^2, & \text{if } y_{t+1} < ES_{t+1|t}^{(1-p)} \\ (y_{t+1} - ES_{t+1|t}^{(1-p)})^2, & \text{if } ES_{t+1|t}^{(1-p)} < y_{t+1} < VaR_{t+1|t}^{(1-p)} \\ 0, & \text{if } y_{t+1} \geq VaR_{t+1|t}^{(1-p)} \end{cases} \quad \text{رابطه ۲۹}$$

این تابع زیان تضمین می‌کند که بازده‌هایی که از ES تخطی می‌کنند،  $y_{t+1} < ES_{t+1|t}^{(1-p)}$  همیشه سخت‌تر از تخطی‌هایی که کمتر از مورد انتظار هستند، جریمه می‌شوند. بنابراین مدل ریسک دقیق باید  $\bar{\psi}_{ES} = \bar{T}^{-1} \sum_{t=0}^{\bar{T}-1} \psi_{(ES)t+1}$  را مینیمم کند و برای اینکه در مقایسه با مدل‌های رقیب مرجح باشند باید تفاوت معناداری بین توابع زیانشان وجود داشته باشد.

1. Model Confidence Set
2. Equal Predictive Ability

## یافته‌های پژوهش

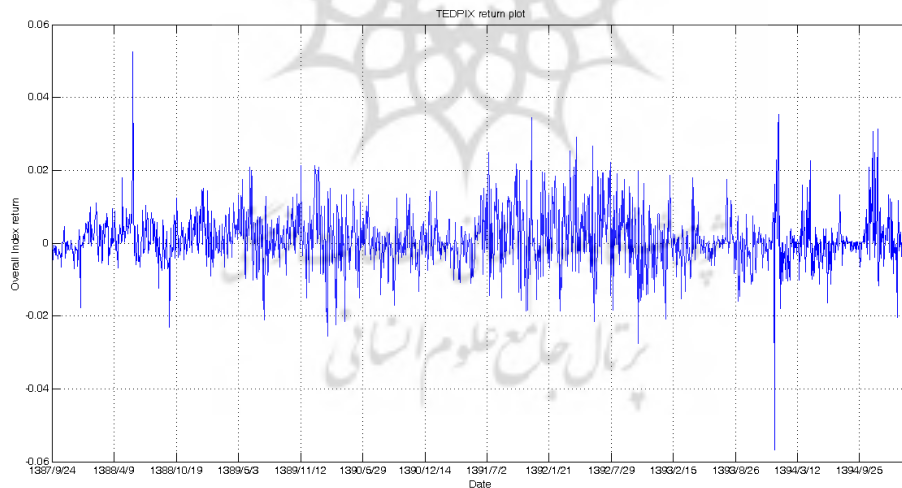
### تجزیه و تحلیل داده‌ها و تخمین ارزش در معرض ریسک و ریزش مورد انتظار

همان‌طور که در مقدمه ذکر شد در این مقاله به اندازه‌گیری ارزش در معرض ریسک بر اساس روش‌های مختلف برای داده‌های مربوط به شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران در فاصله سال‌های ۱۳۸۷ تا ۱۳۹۵ به صورت روزانه پرداخته می‌شود. کل دوره زمانی در این پژوهش، ۱۷۹۵ مشاهده روزانه از ۱۳۸۷/۰۹/۲۹ تا ۱۳۹۵/۰۲/۲۹ است. دوره زمانی درون نمونه از ۱۳۸۷/۰۹/۲۹ تا ۱۳۹۲/۰۹/۱۱ شامل ۱۲۰۰ روز و دوره زمانی برون نمونه از ۱۳۹۲/۰۹/۱۲ تا ۱۳۹۵/۰۲/۲۹ شامل ۵۹۴ روز است.

با توجه به اینکه توزیع قیمت سهام به توزیع لاگ‌نرمال<sup>۱</sup> نزدیک است برای محاسبه بازده داده‌ها از فرمول بازده لگاریتمی به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$r_t = \ln(P_t/P_{t-1}) \quad \text{رابطه ۳۰}$$

نمودار بازده شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران در کل دوره زمانی در شکل ۱ نمایش داده شده است.



شکل ۱. نمودار بازده شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران

### آمار توصیفی داده‌ها

با توجه به نتایج بالا، حداکثر و حداقل بازده روزانه به ترتیب برابر با ۵/۲۶ درصد و ۵/۶۷- درصد، میانگین بازده روزانه و انحراف معیار به ترتیب برابر با ۰/۱۲ درصد و ۰/۷۴ درصد و کشیدگی و چولگی به ترتیب برابر با ۷/۷۵ و ۰/۲۹ است که نشان‌دهنده فاصله زیاد توزیع بازده از توزیع نرمال است.

برای تخمین پارامترها باید یک مقدار منطقی برای آستانه  $u$  انتخاب کنیم. این آستانه تعیین‌کننده تعداد مشاهدات فراتر از آستانه یعنی  $n_u$  است. مبانی نظری ضعیفی برای انتخاب آستانه وجود دارد که یکی از ضعف‌های نظریه فراتر از آستانه است. بدین ترتیب این انتخاب بیشتر به قضاوت‌ها مربوط می‌شود. در زیر نحوه انتخاب آستانه را توضیح می‌دهیم.

جدول ۱. آمار توصیفی کل داده‌ها

میانگین	انحراف معیار	مینیمم	ماکسیمم	چولگی	کشیدگی
۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۷۴	-۰/۰۵۶۷	۰/۰۵۲۶	۰/۲۹۷۴	۷/۷۵۴۱

### انتخاب آستانه

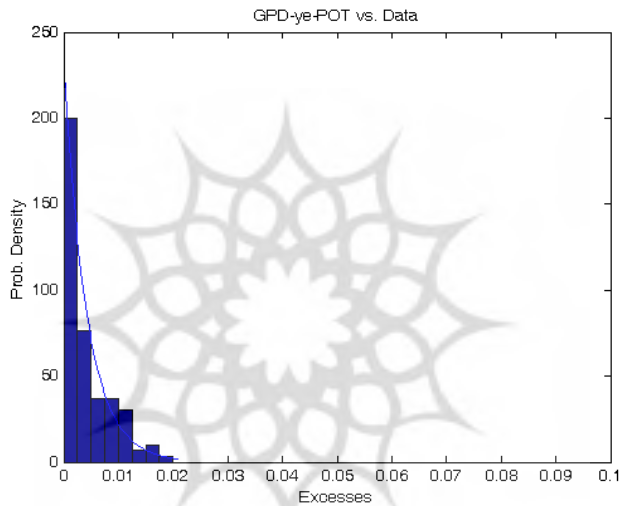
اغلب برای شناسایی آستانه در ادبیات از سه ابزار بصری شامل نمودار چندک - چندک، تابع میانگین فزونی و نمودار هیل استفاده می‌شود. برای استفاده از ابزار چندک - چندک، چندک‌های توزیع فرضی را در مقابل چندک‌های توزیع تجربی ترسیم کرده و میزان همخوانی چندک‌های دو توزیع با هم مقایسه می‌شود. اگر توزیع نمونه از توزیع فرضی به دست آمده باشد، شکل چندک - چندک خطی خواهد بود. در روش تابع میانگین فزونی، اگر این تابع را بر اساس تغییرات آستانه ترسیم کنیم، بهتر است آستانه را در جایی انتخاب کنیم که تابع میانگین فزونی پس از آن، خطی راست با شیب مثبت باشد. این تابع به صورت زیر تعریف می‌شود (ژنسی و سلوک، ۲۰۰۴: ۲۹۳):

$$MEF(u) = \frac{\sum_{i=1}^n \max(X_i - u, 0)}{\sum_{i=1}^n I_{(X_i > u)}} \quad \text{رابطه (۳۱)}$$

برآوردگر هیل میانگین  $k$  مشاهده از فرین‌ترین مشاهدات دنباله منهای  $k+1$  امین مشاهده است. برای تعیین آستانه، شکل هیل را به گونه‌ای ترسیم می‌کنیم که شاخص دنباله تخمینی  $\hat{\xi}_{n,k}^{(H)}$  تابعی از  $k$  باشد. آستانه را در جایی که شاخص دنباله نسبتاً ثابت باشد، انتخاب می‌کنیم. به عبارتی دیگر، آستانه را در جایی که تخمین‌زن هیل، به ازای مقادیر  $k$  نسبتاً افقی می‌شود، انتخاب می‌کنیم (داو، ۲۰۰۵: ۱۹۷).

$$\xi_{n,k}^{(H)} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln X_i - \ln X_{k+1} \text{ برای } 1 \leq k \leq n-1 \quad (\text{رابطه ۳۲})$$

بنابراین برای انتخاب آستانه مناسب، چندک ۰/۷ تا ۰/۹۷ بررسی شده و در نهایت با توجه به تعداد داده‌های فرین باقی‌مانده و ناریب بودن تخمین‌ها چندک ۰/۹ به‌عنوان آستانه انتخاب شد. در شکل ۲ هیستوگرام داده‌های فراتر از آستانه (چندک ۰/۹) مشاهده می‌شود که نمودار تابع چگالی توزیع پرتوی تعمیم‌یافته روی آن برازش شده است. شایان ذکر است که ما از منفی بازده شاخص استفاده کرده و بر مشاهدات فرین بالایی متمرکز می‌شویم.



شکل ۲. هیستوگرام داده‌های فرین به‌همراه نمودار تابع چگالی توزیع پرتوی تعمیم‌یافته برازش شده روی آن

تخمین‌های مربوط به پارامترهای توزیع پرتوی تعمیم‌یافته نیز به‌صورت جدول ۲ است. با توجه به نتایج جدول ۲ برای تخمین ارزش فرین پارامتر شکل برابر با ۰/۰۱۷۲، پارامتر مقیاس برابر با ۰/۰۰۴۲ و آستانه را ۰/۰۰۶۵ در نظر می‌گیریم. برای تخمین ارزش در معرض ریسک و ریزش مورد انتظار با استفاده از روش گارچ نیز ابتدا با استفاده از تشکیل ماتریس شوارتز مدل بهینه که دارای کمترین معیار اطلاعاتی شوارتز است را به‌صورت مدل  $GARCH(1,1) - ARMA(2,1)$  برای توزیع تی. استیودنت و نرمال انتخاب کرده و بدین وسیله محاسبات خود را انجام می‌دهیم.

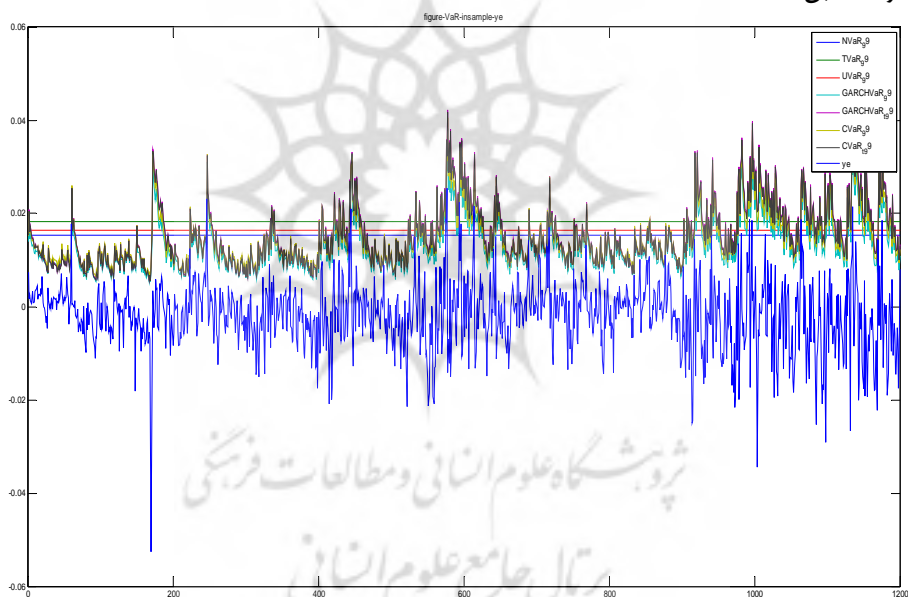


جدول ۲. پارامترهای تخمینی توزیع پرتوی تعمیم یافته

پارامتر شکل ( $\xi$ )	۰/۰۱۷۲ (۰/۱۲۶۵)
پارامتر مقیاس ( $\sigma$ )	۰/۰۰۴۲ (۰/۰۰۰۷)
آستانه ( $u$ )	۰/۰۰۶۵

### محاسبه ارزش در معرض ریسک و ریزش مورد انتظار درون نمونه

دوره زمانی درون نمونه از ۱۳۸۷/۰۹/۲۹ تا ۱۳۹۲/۰۹/۱۱ شامل ۱۲۰۰ مشاهده روزانه است. در شکل ۳ نمودار ارزش در معرض ریسک درون نمونه با مدل‌های مختلف در سطح اطمینان ۹۹ درصد قابل مشاهده است.

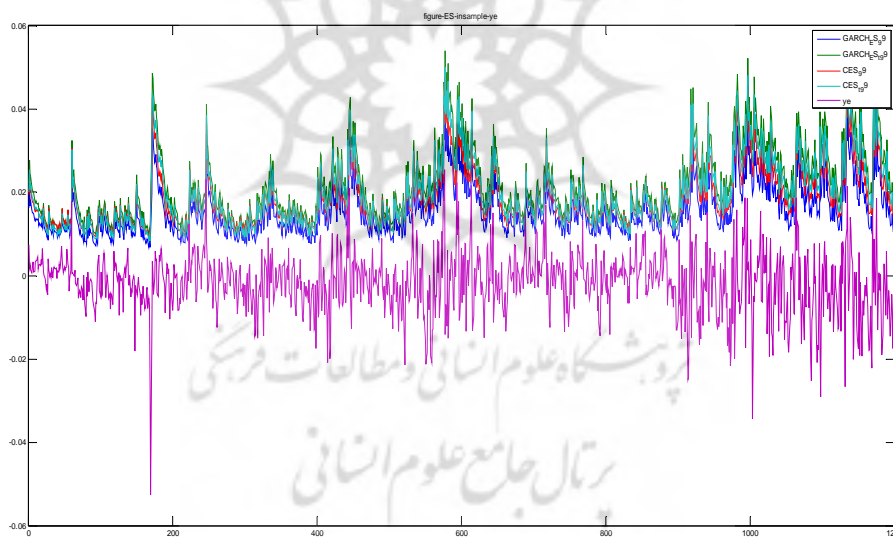


**توضیحات:** ۱. مدل با فرض توزیع نرمال غیرشرطی (NVaRf); ۲. مدل با فرض توزیع تی. استیودنت غیرشرطی (TVaRf); ۳. رویکرد ارزش فرین غیرشرطی (UVaRf); ۴. مدل ARMA-GARCH با فرض پسماندهای نرمال (GARCH-VaRf); ۵. مدل ARMA-GARCH با فرض پسماندهای تی. استیودنت (GARCH-VaR-tf); ۶. رویکرد ارزش فرین شرطی با فرض پسماندهای استانداردشده نرمال (CVaRf); ۷. رویکرد ارزش فرین شرطی با فرض پسماندهای استانداردشده تی. استیودنت (CVaR-tf); ۸. مشاهدات واقعی منفی بازده شاخص کل (ye).

شکل ۳. نمودار ارزش در معرض ریسک درون نمونه

همان‌طور که در شکل ۳ مشخص است از میان روش‌های به‌کارگرفته‌شده در این مقاله، سه روش مدل با فرض توزیع نرمال غیرشرطی، مدل با فرض توزیع تی. استیودنت غیرشرطی و رویکرد ارزش فرین غیرشرطی حساسیت نسبت به تغییر در شرایط بازده ندارند، از این رو واقعیت‌های مربوط به ریسک را به‌خوبی انعکاس نمی‌دهند، بنابراین نمی‌توانند سنجه‌های مناسبی برای اندازه‌گیری ارزش در معرض ریسک باشند. در مقابل روش‌های رویکرد ارزش فرین شرطی با فرض پسماندهای استاندارد شده تی. استیودنت، مدل ARMA-GARCH با فرض پسماندهای تی. استیودنت، رویکرد ارزش فرین شرطی با فرض پسماندهای استاندارد شده نرمال، مدل ARMA-GARCH با فرض پسماندهای نرمال، با توجه به وضعیت اقتصاد و نوسانات موجود در بازده‌ها طی زمان تغییر می‌کند. از این رو وضعیت ریسکی موجود در شاخص را بهتر از سایر سنجه‌ها منعکس می‌کند.

در شکل ۴ ریزش مورد انتظار درون نمونه با مدل‌های مختلف در سطح اطمینان ۹۹ درصد قابل مشاهده است.



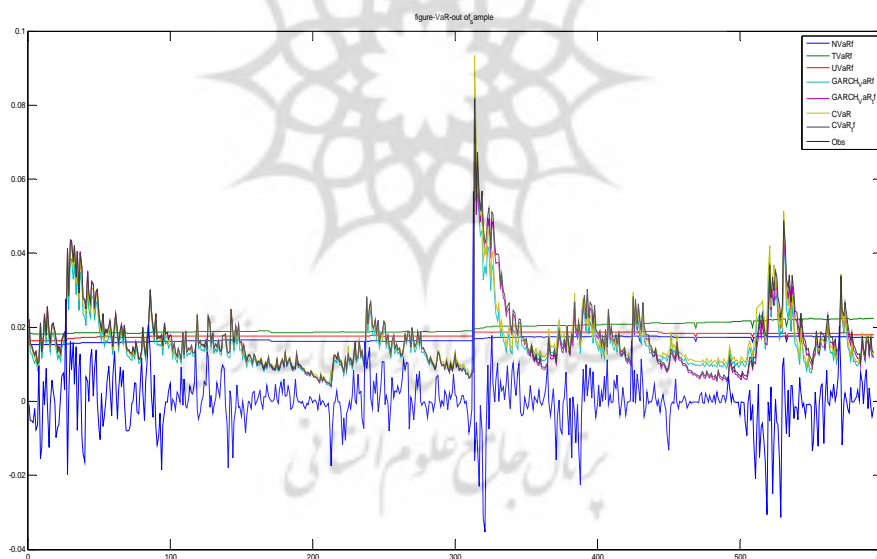
**توضیحات:** ۱. مدل ARMA-GARCH با فرض پسماندهای نرمال (GARCH-ES-99); ۲. مدل ARMA-GARCH با فرض پسماندهای تی. استیودنت (GARCH-ES-t-99); ۳. رویکرد ارزش فرین شرطی با فرض پسماندهای استاندارد شده نرمال (CES-99); ۴. رویکرد ارزش فرین شرطی با فرض پسماندهای استاندارد شده تی. استیودنت (CES-t-99); ۵. مشاهدات واقعی منفی بازده شاخص کل (ye)

شکل ۴. نمودار ریزش مورد انتظار درون نمونه

### محاسبه ارزش در معرض ریسک و ریزش مورد انتظار برون نمونه

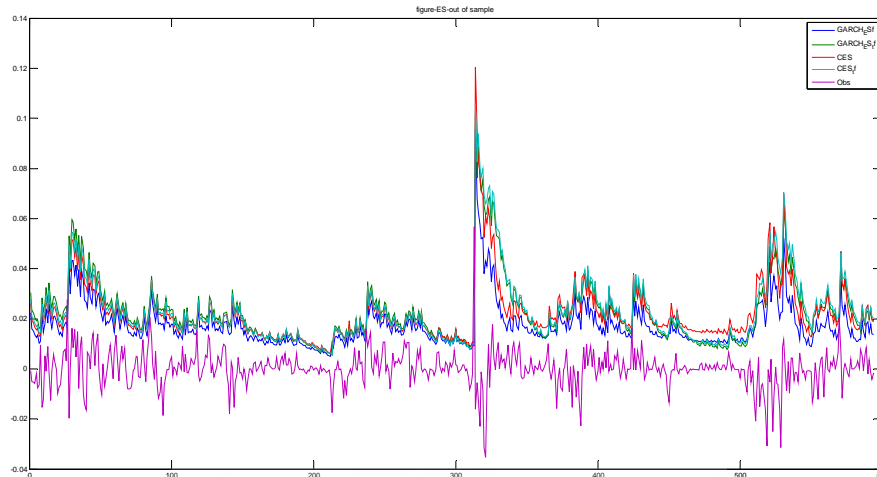
دوره زمانی برون نمونه از ۱۳۹۲/۰۹/۱۲ تا ۱۳۹۵/۰۲/۲۹ شامل ۵۹۴ مشاهده روزانه است. در شکل ۵ نمودار ارزش در معرض ریسک برون نمونه با مدل‌های مختلف در سطح اطمینان ۹۹ درصد قابل مشاهده است.

در خصوص محاسبه ارزش در معرض ریسک و ریزش مورد انتظار به صورت برون نمونه‌ای نیز ملاحظه می‌شود که سه روش مدل با فرض توزیع نرمال غیرشرطی، مدل با فرض توزیع تی. استیودنت غیرشرطی و رویکرد ارزش فرین غیرشرطی تغییرات لازم متناسب با تغییرات بازار را نشان نمی‌دهند. به عنوان نمونه در هنگامه شوکی که در اوایل سال ۱۳۹۴ (داده ۳۰۰ تا ۳۵۰) رخ داد، ریسک در بازار به شدت افزایش یافته است، در حالی که سه روش مدل با فرض توزیع نرمال غیرشرطی، مدل با فرض توزیع تی. استیودنت غیرشرطی و رویکرد ارزش فرین غیرشرطی هیچ‌گونه واکنشی نسبت به این تغییر شرایط ریسکی نشان نمی‌دهند. اما روش‌های ارزش فرین شرطی و گارچ به خوبی میزان ریسک را متناسب با تغییر شرایط بازار نشان می‌دهند.



شکل ۵. نمودار ارزش در معرض ریسک برون نمونه

در شکل ۶ نمودار ریزش مورد انتظار برون نمونه با مدل‌های مختلف در سطح اطمینان ۹۹ درصد قابل مشاهده است.



شکل ۶. نمودار ریزش مورد انتظار برون نمونه

### پس آزمایی مدل‌های ارزش در معرض ریسک

در قسمت بالا به برآورد ارزش در معرض ریسک با استفاده از چندین رویکرد پرداخته شده است. اما سؤال مهم بررسی پس‌آزمایی این روش‌ها است. برای این منظور در این قسمت برای بررسی اعتبار مدل‌های ارزش در معرض ریسک از دو آزمون پس‌آزمایی پوشش برنولی و استقلال خطی (دنیلسون، ۲۰۱۱: ۱۵۵ و ۱۵۷) استفاده می‌شود.

جدول ۳. پس‌آزمایی مدل‌های مختلف ارزش در معرض ریسک در سطح اطمینان ۹۹ درصد

آزمون استقلال تختی		آزمون پوشش برنولی		نوع روش پس‌آزمایی
pvalue	آماره آزمون	pvalue	آماره آزمون	
۰/۶۷۰۸	۰/۱۸۰۷	۰/۶۸۲۶	۰/۱۶۷۲	با فرض توزیع نرمال
۰/۱۸۰۲	۰/۷۹۶۱	۰/۸۶۱۳	۰/۰۳۰۵	با فرض توزیع تی. استیودنت
۰/۳۹۵۱	۰/۷۲۳۱	۰/۸۱۵۷	۰/۰۵۴۳	با فرض VaR غیرشرطی GPD
۰/۴۱۹۸	۰/۶۵۰۹	۰/۶۳۹۹	۰/۲۱۸۸	با فرض رویکرد GARCH برای توزیع نرمال
۰/۲۴۰۹	۱/۳۷۵۲	۰/۵۹۸۴	۰/۲۷۷۴	با فرض رویکرد GARCH برای توزیع تی. استیودنت
۰/۶۷۰۸	۰/۱۸۰۷	۰/۶۸۲۶	۰/۱۶۷۲	با فرض VaR شرطی GPD برای توزیع نرمال
۰/۶۷۰۸	۰/۱۸۰۷	۰/۶۸۲۶	۰/۱۶۷۲	با فرض VaR شرطی GPD برای توزیع تی. استیودنت

با توجه به این که تمام pvalue ها بزرگتر از ۵ درصد هستند بنابراین تمام مدل‌های VaR اعتبار دارند.

### پس آزمایی مدل های ریزش مورد انتظار

پس آزمایی برای پیش بینی های ریزش مورد انتظار مدل های ریسک به وسیله مک نیل و فری (۲۰۰۰) ارائه شد.

جدول ۴. پس آزمایی ریزش مورد انتظار سطح ۹۹ درصد

پس آزمایی مک نیل و فری		نوع روش پس آزمایی
احتمال	آماره آزمون	
۰/۰۲۲۰	۰/۳۲۷۹	روش GARCH براساس توزیع نرمال
۰/۰۹۸۸	۰/۸۵۲۰	روش GARCH براساس توزیع تی. استیودنت
۰/۰۷۲۳	۰/۰۵۷۷	روش GPD بر اساس توزیع نرمال
۰/۰۷۶۱	۰/۰۴۸۷	روش GPD براساس توزیع تی. استیودنت

همان گونه که از جدول بالا مشخص است تنها رویکرد ARMA-GARCH براساس توزیع نرمال در آزمون پس آزمایی از اعتبار برخوردار نیست. بنابراین در مرحله رتبه بندی مدل های مختلف با استفاده از تابع MCS این رویکرد حذف شده و سایر مدل های معتبر وارد می شوند. حال سه روش معتبر GARCH براساس توزیع تی. استیودنت، روش GPD بر اساس توزیع نرمال و روش GPD بر اساس توزیع تی. استیودنت بر اساس روش MCS و تابع زیان اولسن و در سطح اطمینان ۹۹ درصد رتبه بندی می کنیم. بر اساس نتایج به دست آمده رتبه های اول تا سوم به ترتیب روش GPD بر اساس توزیع تی. استیودنت، روش GPD بر اساس توزیع نرمال و GARCH بر اساس توزیع تی. استیودنت هستند.

### نتیجه گیری و پیشنهادها

در این پژوهش به برآورد ارزش در معرض ریسک و ریزش مورد انتظار با توجه به روش های نوین با تأکید بر رویکرد ارزش فرین شرطی و مقایسه آنها با عملکرد رویکردهای پارامتریک پرداخته شد. روش های معرفی شده برای محاسبه ریسک بازار برای شاخص کل بورس اوراق بهادار تهران در دوره ۱۳۸۷ تا ۱۳۹۵ انجام شده است. در این پژوهش ارزش در معرض ریسک و ریزش مورد انتظار درون نمونه و برون نمونه را با مدل های مختلف در سطح اطمینان ۹۹ درصد محاسبه کرده و نمودار روزانه ارزش در معرض ریسک و ریزش مورد انتظار را ترسیم کردیم. از میان روش های به کار گرفته شده در این پژوهش و با توجه به نمودار ترسیم شده، سه مدل با فرض توزیع نرمال غیرشرطی، مدل با فرض توزیع تی. استیودنت غیرشرطی و رویکرد ارزش فرین غیرشرطی حساسیت نسبت به تغییر در شرایط بازار ندارند. از این رو واقعیت های مربوط به

ریسک را به خوبی انعکاس نمی‌دهند و نمی‌توانند سنج‌های مناسبی برای اندازه‌گیری ارزش در معرض ریسک و ریزش مورد انتظار باشند. در مقابل روش‌های رویکرد ارزش فرین شرطی با فرض پسماندهای استاندارد شده تی. استیودنت، مدل ARMA-GARCH با فرض پسماندهای تی. استیودنت، رویکرد ارزش فرین شرطی با فرض پسماندهای استاندارد شده نرمال، مدل ARMA-GARCH با فرض پسماندهای نرمال، با توجه به وضعیت اقتصاد و نوسانات موجود در بازده‌ها طی زمان تغییر می‌کند و بنابراین وضعیت ریسکی موجود در شاخص را بهتر از سایر سنج‌ها منعکس می‌کند. برای بررسی و مقایسه الگوها از روش‌های پس‌آزمایی مانند آزمون استقلال تخطی‌ها، آزمون پوشش برنولی، آزمون مک نیل و فری و آزمون MCS استفاده شده است. با توجه به نتایج به دست آمده برای پس‌آزمایی ارزش در معرض ریسک، همه مدل‌های VaR اعتبار دارند. از آنجا که VaR معیار زیرجمع‌پذیری (به این معنا که VaR پرتفوی کمتر از VaR مجموع دارایی‌های فردی داخل پرتفوی نیست) از اصول موضوعه معیارهای ریسک منسجم (یکنواختی، همگنی مثبت، پایای انتقال و زیرجمع‌پذیری) را رعایت نمی‌کند. مورد دیگر و شاید خطرناک‌تر، این است که VaR از زیان‌های بالقوه ماورای نقطه چندک مد نظر چشم‌پوشی می‌شود در حالی که ریزش مورد انتظار منسجم است، بنابراین در این پژوهش از معیار ریزش مورد انتظار به عنوان سنج اصلی ریسک استفاده شده است و یکی از نوآوری‌های این پژوهش پس‌آزمایی ریزش مورد انتظار و محاسبه ارزش فرین شرطی است. برای پس‌آزمایی ریزش مورد انتظار نیز از آزمون مک نیل و فری استفاده کردیم. طبق نتایج به دست آمده دریافتیم که تنها رویکرد ARMA-GARCH بر اساس توزیع نرمال در آزمون پس‌آزمایی از اعتبار برخوردار نیست. همچنین در این تحقیق برای پس‌آزمایی ریزش مورد انتظار از تابع زیان جدیدی استفاده شد که تطابق بیشتری با تابع مطلوبیت عوامل اقتصادی دارد. در این پژوهش برای رتبه‌بندی مدل‌ها از تابع MCS استفاده شد. تابع MCS، زیان‌های مدل‌های مختلف را به لحاظ معناداری آماری و به صورت دوجه‌دو مقایسه کرده و در نهایت رتبه‌بندی می‌کند. این در حالی است که در اکثر تحقیقات گذشته تنها از یک معیار میانگین زیان‌ها، برای مقایسه و رتبه‌بندی مدل‌ها استفاده شده است. در مرحله رتبه‌بندی مدل‌های مختلف با استفاده از تابع MCS رویکرد ARMA-GARCH بر اساس توزیع نرمال حذف شده و سایر مدل‌های معتبر وارد می‌شوند. سپس سه روش معتبر GARCH بر اساس توزیع تی. استیودنت، روش GPD بر اساس توزیع نرمال و روش GPD بر اساس توزیع تی. استیودنت بر اساس روش MCS و تابع زیان اولسن و در سطح اطمینان ۹۹ درصد رتبه‌بندی کردیم. بر اساس نتایج به دست آمده رتبه‌های اول تا سوم به ترتیب روش GPD بر اساس توزیع تی. استیودنت، روش GPD بر اساس توزیع نرمال و

GARCH بر اساس توزیع تی. استیودنت است. در ادامه به تحلیل مقایسه‌ای مهم‌ترین نتایج با تحقیقات مشابه می‌پردازیم. دیمیتریکوپولس و همکاران (۲۰۱۰)، موتو و همکاران (۲۰۱۱)، سینگ و همکاران (۲۰۱۳) و کارماکار، شوکلا (۲۰۱۵) در پژوهش‌های خود نشان دادند که تئوری ارزش فرین نسبت به سایر رویکردها عملکرد بهتری دارد، که ما نیز به همین نتیجه در پژوهش خود رسیدیم. مطابق با تحقیقات مولر و همکاران (۱۹۹۸) و موتو و همکاران (۲۰۱۱) که روش EVT را به همراه مدل گارچ متغیر در زمان به کار بردند، ما نیز در این پژوهش رویکرد ارزش فرین را با مدل گارچ با فرض توزیع نرمال و تی. استیودنت مقایسه کرده و به این نتیجه رسیدیم که تئوری ارزش فرین شرطی با فرض پسماندهای با توزیع تی. استیودنت نتیجه بهتری نسبت به مدل گارچ دارد.

## References

- Acerbi, C., & Tasche, D. (2002). Expected Shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk. *Economic notes*, 31(2), 379-388.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. & Heath, D. (1999). Coherent Risk Measures. *Mathematical Finance*, 9(3), 203-228.
- Bajalan, S., Raei, R. & Mohammadi, S. (2016). Modeling Insurance Claims Distribution through Combining Generalized Hyperbolic Skew-t Distribution with Extreme Value Theory. *Journal of Financial Research*, 18(1), 39-58. (in Persian)
- Bali, T.G. & Neftci, S.N. (2003). Disturbing extremal behavior of spot rate dynamics. *Journal of Empirical Finance*, 10(4), 455-477.
- Danielsson, J. & de Vries, C. G. (1997). Tail index and quantile estimation with very high frequency data. *Journal of empirical Finance*, 4(2), 241-257.
- Dimitrakopoulos, D. N., Kavussanos, M. G., & Spyrou, S. I. (2010). Value at risk models for volatile emerging markets equity portfolios. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 50(4), 515-526.
- Dowd, K. (2005). *Measuring market risk*. England, John Wiley & Sons.
- Falahtalab, H., Azizi, M. (2014). Application of Extreme Value Theory in Value at Risk forecasting. *Journal of Investment Knowledge*, 3(12), 159-180. (in Persian)
- Fallahpour, S., Yar-Ahmadi, M., (2013). Estimation of Value at Risk by using Extreme Value Theory in Tehran Stock Exchange. *Journal of Financial Engineering and Portfolio Management*, 4(13), 133-158. (in Persian)

- Gencay, R. & Selcuk, F. (2004). Extreme value theory and Value-at-Risk: Relative performance in emerging markets. *International Journal of Forecasting*, 20(2), 287-303.
- Gençay, R. & Selçuk, F. (2006). Overnight borrowing, interest rates and extreme value theory. *European Economic Review*, 50(3), 547-563.
- Hansen, P., Lunde, A. & Nason, J. (2011). The model confidence set. *Econometrica*, 79 (2), 453-497.
- Ho, L. C., Burrige, P., Cadle, J. & Theobald, M. (2000). Value-at-risk: Applying the extreme value approach to Asian markets in the recent financial turmoil. *Pacific-Basin Finance Journal*, 8(2), 249-275.
- Hull, J. (2015). *Risk Management and Financial Institutions*. (Vol. 733). John Wiley & Sons.
- Karmakar, M. & Shukla, G. K. (2015). Managing extreme risk in some major stock markets: An extreme value approach. *International Review of Economics & Finance*, 35, 1-25.
- Longin, F. M. (1996). The asymptotic distribution of extreme stock market returns. *Journal of business*, 69(3), 383-408.
- McNeil, A. J., & Frey, R. (2000). Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach. *Journal of empirical finance*, 7(3), 271-300.
- Müller, U. A., Dacorogna, M. M., & Pictet, O. V. (1998). Heavy tails in high-frequency financial data. A practical guide to heavy tails: Statistical techniques and applications, 55-78. ISBN: 0-8176-3951-9.
- Mutu, S., Balogh, P. & Moldovan, D. (2011). The efficiency of value at risk models on central and eastern European stock markets. *International Journal of Mathematics and Computers in Simulation*, 5(2), 110-117.
- Olsen, N.N. (2015). *The Application of Historical Simulation in Expected Shortfall Prediction: An Empirical Analysis of Risk Models' Forecasting Accuracy*. Thesis for Master of Science in Finance, School of Business and Social Sciences Aarhus University.
- Ray, C. I. (2010). *Extreme risk management: revolutionary approaches to evaluating and measuring risk*. McGraw-Hill.
- Ren, F. & Giles, D. E. (2010). Extreme value analysis of daily Canadian crude oil prices. *Applied Financial Economics*, 20(12), 941-954.
- Sajjad, R., Hedayati, S., Hedayati, S. (2014). Estimation of Value at Risk by using Extreme Value Theory. *Journal of Investment Knowledge*, 3(9), 133-158. (in Persian)
- Singh, A. K., Allen, D. E., & Robert, P. J. (2013). Extreme market risk and extreme value theory. *Mathematics and computers in simulation*, 94, 310-328.