

بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از الگوریتم جست‌وجوی ارگانسیم‌های هم‌زیست

عمران محمدی^۱، سیدعرفان محمدی^۲، شاهین رامتین‌نیا^۳

چکیده: بهینه‌سازی سبد سهام یکی از مهم‌ترین موضوعات تصمیم‌گیری برای شرکت‌های فعال در بازار سرمایه است. هنگامی که وضعیت و محدودیت‌های دنیای واقعی نظیر محدودیت سرمایه‌گذاری در هر یک از سهام‌ها و نیز محدودیت تعداد سهام‌های موجود در سبد سهام در نظر گرفته می‌شوند، مسئله بهینه‌سازی سبد سهام به راحتی حل نمی‌شود، از این رو استفاده از شیوه‌های فراابتکاری مد نظر قرار می‌گیرد. هدف اصلی از پژوهش حاضر، حل مسئله بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از نوعی الگوریتم فراابتکاری کاملاً جدید و نوظهور به نام الگوریتم جست‌وجوی ارگانسیم‌های هم‌زیست با در نظر گرفتن محدودیت‌های دنیای واقعی در تشکیل سبد سهام است. این الگوریتم با الهام از روابط هم‌زیستی موجود در اکوسیستم‌های گوناگونی که در طبیعت وجود دارد، در سال ۲۰۱۴ معرفی شده است. در نهایت روش و مدل مورد استفاده در این پژوهش با داده‌های واقعی حل شد و نتایج آن تجزیه و تحلیل شدند. نتایج این پژوهش نشان می‌دهد، الگوریتم جست‌وجوی ارگانسیم‌های هم‌زیست در بهینه‌سازی سبد سهام، عملکرد موثقی داشته و توانسته است به نحو مطلوبی با محدودیت‌های واقعی بازار تعامل کند.

واژه‌های کلیدی: الگوریتم جست‌وجوی ارگانسیم‌های هم‌زیست، بهینه‌سازی سبد سهام، روش‌های فراابتکاری، محدودیت‌های کاردینالیته.

۱. استادیار، گروه مهندسی صنایع، دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت، تهران، ایران

۲. کارشناس‌ارشد مهندسی صنایع، دانشکده صنایع، دانشگاه علم و صنعت، تهران، ایران

۳. کارشناس مهندسی صنایع، دانشکده صنایع، دانشگاه علم و صنعت، تهران، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۴/۱۱/۰۳

تاریخ پذیرش نهایی مقاله: ۱۳۹۵/۰۲/۲۹

نویسنده مسئول مقاله: عمران محمدی

E-mail: e_mohammadi@iust.ac.ir

مقدمه

بهینه‌سازی سبد سهام^۱، یکی از مهم‌ترین موضوعات در زمینه مسائل مالی است که در این راستا مدل‌ها و روش‌های متعددی تاکنون توسط محققان مختلف ارائه شده است. از جمله مهم‌ترین و به نوعی تأثیرگذارترین مطالعات صورت‌گرفته در این حوزه، می‌توان به مدل‌های مارکوویتز (۱۹۵۲) و شارپ (۱۹۶۳) اشاره کرد.

مارکوویتز مدل اساسی سبد سهام را ارائه کرد که این مدل مبنایی برای تئوری مدرن سبد سهام قرار گرفت. وی پیشنهاد داد علاوه بر بازده سرمایه‌گذاری، معیار ریسک نیز در انتخاب دارایی‌ها برای سرمایه‌گذاری در نظر گرفته شود. در واقع مارکوویتز اولین کسی بود که مفهوم سبد سهام و ایجاد تنوع را به صورت رسمی بیان کرد. او به صورت کمی نشان داد که چرا و چگونه متنوع‌سازی سبد سهام، می‌تواند موجب کاهش ریسک سبد سهام سرمایه‌گذار شود و همچنین مفهوم سبد سهام کارا را نیز مطرح کرد. پس از مارکوویتز، شخص دیگری به نام شارپ با پیگیری کارهای او و با هدف کاهش میزان محاسبات و برآوردهای مدل مارکوویتز، مدل تک‌شاخصی را ارائه کرد که بازده هر اوراق بهادار را به شاخص بازده بازار مرتبط می‌ساخت. شایان ذکر است که علاوه بر این دو مدل، تاکنون مدل‌های متعدد دیگری نیز ارائه شده است که هر یک نقص‌هایی داشته‌اند و هر مدل به منظور بهبود و رفع آن نقص‌ها، جایگزین مدل‌های قبلی شده است. با درک این موضوع می‌توان دریافت که همه روزه تلاش‌های گسترده‌ای برای بهبود روش‌های بررسی و تحلیل سهام در بازارهای مالی دنیا صورت می‌پذیرد. تلاش در جهت بهبود روش‌های تجزیه و تحلیل سهام، به‌ویژه در بازارهایی که شمار سهام در آنها بسیار بالاست، به پدید آمدن روش‌های حل نوینی منجر شده که در کنار روش‌های گذشته، درصدد یافتن پاسخی برای میل به حداکثرسازی سود در بازارهای مالی هستند.

مدل مارکوویتز برای نخستین بار توانست تلفیقی از بیشینه‌سازی نرخ بازده و کمینه‌سازی ریسک ارائه کند، اما در برخورد با برخی محدودیت‌های دنیای واقعی ناتوان بود. برای مثال، هنگامی که محدودیتی با نام تعداد دارایی موجود در سبد سهام^۲ مطرح باشد یا حداقلی برای میزان سرمایه‌گذاری در یک دارایی، تعیین شده باشد، مدل اولیه مارکوویتز قادر به حل مسئله نخواهد بود (منسینی، اگریسزک و اسپرانزا، ۲۰۱۴). علاوه بر آن جست‌وجوی مرز کارا^۳ با روش‌های مرسوم ریاضی تنها در حضور تعداد اندکی از دارایی‌ها در زمان مطلوب امکان‌پذیر است. به بیان

1. Portfolio Optimization
2. Cardinality Constraint
3. Efficient Frontier (EF)

دیگر، در جست‌وجوی مرز کارا هنگامی که تعداد دارایی‌های مطرح‌شده در سبد سهام از حد معینی بالاتر رود، به دلیل پیچیدگی‌های محاسباتی به‌وجودآمده، راه‌حل‌های مرسوم ریاضی کارایی خود را از دست می‌دهند. در همین رابطه و در بازارهای سرمایه که سهام‌های در دست بررسی حجم زیادی دارند، تلاش‌های بسیاری در زمینه حل مسئله یادشده صورت پذیرفته است که از آن جمله می‌توان به استفاده از روش‌های فراابتکاری^۱ اشاره کرد که در آنها با به‌کارگیری الگوریتم‌هایی برگرفته از طبیعت، به حل این‌گونه مسائل پرداخته شده است.

پیشینه پژوهش

روش‌های فراابتکاری در حوزه مالی جایگاه مناسب خود را یافته‌اند. برای نمونه می‌توان کاربرد الگوریتم ژنتیک^۲ توسط سجادی و همکارانش را در بهینه‌سازی سبد سهام با حضور داده‌های غیرقطعی نام برد که در آن از رویکردهای مختلف استوارسازی نیز استفاده شده است (سجادی، قره‌خانی و سفری، ۲۰۱۲). همچنین دنگ، لین و لو (۲۰۱۲) با به‌کارگیری الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات^۳، به بهینه‌سازی سبد سهام در حضور محدودیت کاردینالیته اقدام کردند. در ادامه نجفی و موسی‌خانی (۲۰۱۵) با ترکیب دو الگوریتم ژنتیک و بهینه‌سازی ازدحام ذرات برای بهینه‌سازی سبد سهام چند دوره‌ای با در نظر گرفتن محدودیت هزینه‌های معامله تلاش کردند. پای (۲۰۱۲) با به‌کارگیری الگوریتم کلونی مورچگان^۴ و در نظر گرفتن ریسک تأمین بودجه در فرایند سرمایه‌گذاری، تلاش کرد سبد سهام را بهینه‌سازی کند. کراما و سینز (۲۰۰۳) نیز با به‌کارگیری الگوریتم تبرید شبیه‌سازی‌شده^۵ به بهینه‌سازی سبد سهام در حضور محدودیت‌های افزوده‌شده به مدل اساسی مارکوئیتز پرداخت. در این میان و در کشورمان نیز مطالعاتی در این حوزه صورت پذیرفته است که از آن جمله می‌توان به الهی، یوسفی و زارع مهرجردی (۱۳۹۳) اشاره کرد که با به‌کارگیری الگوریتم جست‌وجوی شکار^۶ به بهینه‌سازی سبد سهام در بازار بورس تهران پرداختند. رجبی و خالوزاده (۱۳۹۳) نیز با اجرای پژوهش تحلیلی، دو رویکرد الگوریتم ژنتیک و بهینه‌سازی ازدحام ذرات چندهدفه را مقایسه کردند و کاربرد آنها را در بازار بورس

-
1. Meta-Heuristic Methods
 2. Genetic Algorithm (GA)
 3. Particle Swarm Optimization (PSO)
 4. Ant Colony Optimization (ACO)
 5. Simulated Annealing (SA)
 6. Hunting Search Algorithm (HSA)

تهران ارزیابی نمودند. علاوه بر آن، قدسی، تهرانی و بشیری (۱۳۹۴) نیز با به کارگیری الگوریتم تبرید شبیه‌سازی شده به بهینه‌سازی سبد سهام در بازار بورس تهران اقدام کردند.

در این میان، چنگ و پرایوگو (۲۰۱۴)، الگوریتم جست‌وجوی ارگانیک‌های هم‌زیست^۱ را در مجله کامپیوتر و ساختارها معرفی کردند. این الگوریتم، از رابطه بین موجودات زنده در طبیعت الهام می‌گیرد و الگوریتمی بسیار ساده و در عین حال سریع و قدرتمند است. ویژگی اصلی این الگوریتم، این است که به مرحله تنظیم پارامتر نیازی ندارد، به گونه‌ایی که تنها پارامتر دریافت شده از کاربر فقط تعداد تکرارهای لازم برای دستیابی به جواب بهینه است. روش چنگ و پرایوگو در ۲۶ مسئله مختلف بهینه‌سازی با سایر الگوریتم‌های فراابتکاری مقایسه شده است و نتایج آن، گویای سرعت و قدرت بیشتر این الگوریتم در مقایسه با سایر الگوریتم‌های فراابتکاری بوده است. از این رو، در پژوهش حاضر برآن شدیم تا با توجه به کارایی و نوظهور بودن الگوریتم جست‌وجوی ارگانیک‌های هم‌زیست و همچنین به کار نرفتن آن در فرایند بهینه‌سازی سبد سهام در مطالعات پیشین، از این الگوریتم به منظور غلبه بر پیچیدگی‌های محاسباتی ناشی از افزودن محدودیت‌های دنیای واقعی به مدل انتخاب سبد سهام بهینه، استفاده کنیم.

پس از مرور کلی بر موضوع تحقیق، ساختار مقاله به این ترتیب ادامه می‌یابد؛ در بخش بعدی به معرفی بیشتر مدل به کاررفته در این پژوهش به منظور بهینه‌سازی سبد سهام پرداخته می‌شود، سپس رویکردهای حل فراابتکاری تشریح شده و الگوریتم جست‌وجوی ارگانیک‌های هم‌زیست به منظور حل عددی مسئله بررسی می‌شود. بخش بعد به چگونگی تشکیل سبد سهام در قالب مثال عددی و با بهره‌مندی از داده‌های واقعی اختصاص یافته است و در نهایت نیز به بیان نتایج پژوهش و ارائه پیشنهادهایی برای مطالعات آتی پرداخته خواهد شد.

شرح مدل‌های بهینه‌سازی سبد سهام

دو مؤلفه مهم در تصمیم‌گیری برای سرمایه‌گذاری، میزان ریسک و بازده دارایی‌های سرمایه‌ای است. اغلب سرمایه‌گذاران به دنبال پیشینه‌سازی بازدهی خود در سطح معینی از ریسک یا کمینه کردن ریسک در سطح معینی از بازده هستند. مارکوئیتز با ارائه مدل میانگین-واریانس خود نشان داد با تشکیل سبدی از سهام می‌توان در سطح معینی از بازده، ریسک سرمایه‌گذاری را کاهش داد. این امکان به دلیل نبود همبستگی کامل بین بازده سهام‌های مختلف به وجود می‌آید. افراد مختلف بر اساس میزان مطلوبیت مورد انتظارشان دست به سرمایه‌گذاری می‌زنند و

از مصرف امروز به امید مصرف بیشتر در آینده چشم‌پوشی می‌کنند. تابع مطلوبیت هر سرمایه‌گذار با توجه به ترجیحات همان شخص تعیین می‌شود که لزوماً با سایر سرمایه‌گذاران یکسان نخواهد بود. انتخاب سبد سهام بهینه، اغلب با تبادل میان ریسک و بازده صورت می‌پذیرد و هرچه ریسک سبد سهام بیشتر باشد، سرمایه‌گذاران انتظار دریافت بازده بیشتری را خواهند داشت. از این رو، شناسایی مرز کارایی مربوط به سبد سهام این امکان را به سرمایه‌گذاران خواهد داد که بر اساس تابع مطلوبیت و میزان ریسک‌پذیری خویش، بیشترین بازده مورد انتظار را از سرمایه‌گذاری خود به‌دست آورند (کلم، توتونچو و فابزی، ۲۰۱۴).

شایان ذکر است که با توجه به وفاق و اجماعی که روی نحوه محاسبه بازده مورد انتظار از سرمایه‌گذاری وجود دارد، بیشتر مطالعات صورت‌گرفته در این حوزه حول نحوه محاسبه ریسک سرمایه‌گذاری و مداخله محدودیت‌های دنیای واقعی در فرایند حل مسئله شکل گرفته‌اند. از این رو، در ادامه ضمن بررسی سیر تکاملی مدل‌های به‌کاررفته در بهینه‌سازی سبد سهام، نقش محدودیت‌های کاربردی دنیای واقعی در فرایند بهینه‌سازی سبد سهام ارزیابی می‌شود. از جمله آن محدودیت‌ها می‌توان به حداقل یا حداکثر میزان سرمایه‌گذاری در یک دارایی اشاره کرد که بیل و فارست (۱۹۷۶) آن را به مدل اولیه مارکوئیتز اضافه کردند. در ادامه نیز با توجه به تمایل سرمایه‌گذاران به در اختیار داشتن و مدیریت سبدهای از سهام که تعداد محدودتری از دارایی‌ها را در خود جای داده باشد، محدودیت دیگری با عنوان «محدودیت کاردینالیتی» به مدل اولیه مارکوئیتز اضافه شد. در نهایت، قاسمی و نجفی (۱۳۹۱)، انواع محدودیت‌های به‌کارگرفته‌شده در بهینه‌سازی سبد سهام و مدل میانگین - واریانس مارکوئیتز را معرفی کردند؛ اما، در بسیاری از پژوهش‌های صورت‌گرفته در این حوزه، از دو محدودیت یادشده به‌عنوان مهم‌ترین و تأثیرگذارترین محدودیت‌های دنیای واقعی نام برده شده است (چنگ، میده، بیزلی و شرایپا، ۲۰۰۰). از این رو، فرناندز و گومز (۲۰۰۷) مدل مارکوئیتز را با افزودن محدودیت حدود بالا و پایین برای هر یک از سهام‌ها، اصلاح کردند و مدل میانگین - واریانس با مؤلفه‌های مقید^۱ را به‌وجود آوردند. اکنون در صورتی که محدودیت تعداد سهام‌های منتخب نیز به مسئله فوق افزوده شود، مدل یادشده به شکل زیر نشان داده خواهد شد:

$$\text{Min } \lambda \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n z_i x_i z_j x_j \sigma_{ij} \right] - (1 - \lambda) \left[\sum_{i=1}^n z_i x_i \mu_i \right] \quad \text{رابطه ۱}$$

Subjected to:

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad \text{رابطه ۲}$$

$$\sum_{i=1}^n z_i = k, \quad \text{رابطه ۳}$$

$$l_i z_i \leq x_i \leq u_i z_i, (i = 1, \dots, n) \quad \text{رابطه ۴}$$

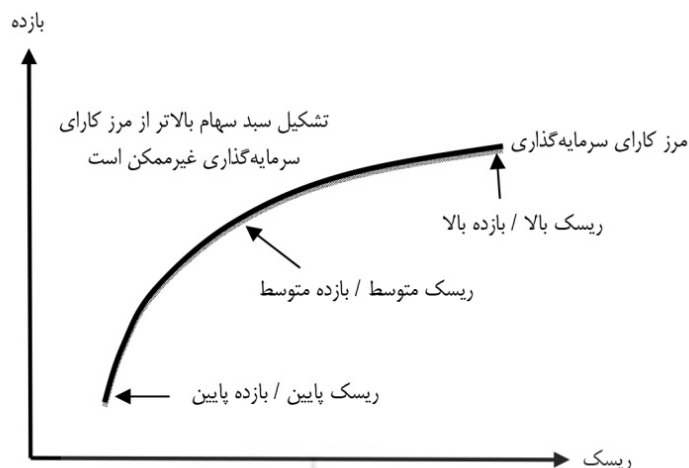
$$z_i \in [0,1], (i = 1, \dots, n) \quad \text{رابطه ۵}$$

$$x_i \geq 0, (i = 1, \dots, n) \quad \text{رابطه ۶}$$

$$x_j \geq 0. (j = 1, \dots, n) \quad \text{رابطه ۷}$$

در مدل ریاضی بالا که به عنوان مدل اصلی مقاله حاضر نیز از آن استفاده می شود، λ پارامتری است که مقدار آن در فاصله $[0, 1]$ تغییر می کند؛ به طوری که با قرار دادن $\lambda = 0$ کل مقدار ضریب وزنی به بازده تخصیص می یابد و بدون توجه به ریسک، سبد سهام دارای بیشترین بازده انتخاب می شود و با در نظر گرفتن $\lambda = 1$ کل مقدار ضریب وزنی به ریسک تخصیص می یابد و بدون توجه به بازده، سبد سهام دارای کمترین ریسک انتخاب می شود. به طبع، در فاصله بین صفر و یک، بهینه سازی سبد سهام با در نظر گرفتن هر دو عامل ریسک و بازده صورت می پذیرد. z_i متغیر تصمیم سرمایه گذاری در سهام i ام است؛ اگر z_i برابر یک باشد، به این معناست که سهام i ام در سبد قرار خواهد گرفت و اگر برابر صفر باشد، یعنی سهام i ام در سبد قرار نخواهد گرفت. مجموع تعداد سهامی که در سبد سهام بهینه قرار دارد، بنا به محدودیت دوم مسئله k سهم است و همچنین l_i و u_i به ترتیب حدود پایین و بالای سهام i ام را تشکیل خواهند داد.

پس از حل مسئله بهینه سازی سبد سهام، با در نظر گرفتن بازده های متفاوت و تعیین اوزان بهینه، نموداری شبیه شکل ۱ به وجود می آید که به آن مرز کارای سرمایه گذاری نیز اطلاق می شود. شایان ذکر است که تشکیل سبد سهام بالاتر از مرز کارای سرمایه گذاری ناممکن است و از سوی دیگر تشکیل سبد سهام در پایین تر از مرز کارای سرمایه گذاری نیز صحیح نیست؛ چرا که با همان میزان ریسک می توان بازده بالاتری را در تشکیل سبد سهام به دست آورد.



شکل ۱. مرز کارای سرمایه‌گذاری

مجموعه معادلات مدل میانگین-واریانس با مؤلفه‌های مقید ترکیبی از مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح^۱ و مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم^۲ است؛ به بیان دیگر، افزایش تعداد دارایی‌ها در فرایند تشکیل سبد سهام، در نظر گرفتن محدودیت سرمایه‌گذاری در هر یک از دارایی‌ها و نیز لحاظ کردن محدودیت کاردینالیتی، موضوع بهینه‌سازی سبد سهام را به یک مسئله ان.پی. سخت^۳ تبدیل می‌کند (چنگ و همکاران، ۲۰۰۰) که برای حل دقیق این نوع مسائل، الگوریتم‌های مؤثر و کارایی در برنامه‌ریزی ریاضی^۴ وجود ندارد. بنابراین، در این پژوهش با هدف تشکیل سبد سهام بهینه و شناسایی مرز کارای سرمایه‌گذاری، به بررسی امکان شناسایی و تشکیل این سبد توسط تکنیک فراابتکاری جست‌وجوی ارگانیسیم‌های هم‌زیست پرداخته خواهد شد.

شرح الگوریتم‌های فراابتکاری در فرایند حل مسئله

در این قسمت برخی از مهم‌ترین روش‌های فراابتکاری حل مسئله که در ادبیات موضوع اشاره شد، تشریح می‌شود و در ادامه به صورت کاملاً تفصیلی الگوریتم جست‌وجوی ارگانیسیم‌های هم‌زیست معرفی خواهد شد.

1. Integer Programming (IP)
2. Quadratic Programming (QP)
3. NP-Hard
4. Mathematical Programming (MP)

الگوریتم ژنتیک

الگوریتم ژنتیک که نخستین بار توسط جان هالند (۱۹۷۵) ارائه شد، نوعی الگوریتم جست‌وجوی مبتنی بر سازوکار انتخاب طبیعی و علم ژنتیک است. این الگوریتم قدرت بقای بهترین ساختار رشته‌ای را با عمل تعویض تصادفی اطلاعات ترکیب کرده و الگوریتم جست‌وجوی بسیار قدرتمندی را تشکیل می‌دهد. برای حل مسئله با این الگوریتم، ابتدا باید پاسخ کدگذاری شود؛ به‌گونه‌ای که در ادامه اجرای الگوریتم بتوان این پاسخ را ارزیابی کرد و عملگرهای مختلف را روی آن اعمال نمود. اجرای این الگوریتم با استفاده از یک مجموعه ابتدایی از جواب‌های تصادفی که جمعیت اولیه نام دارد، آغاز می‌شود. هر عضو در جمعیت یک کروموزوم نامیده می‌شود که نشان‌دهنده یک حل برای مسئله موجود است. یک کروموزوم رشته‌ای از اعداد است که در اصطلاح به آن ژن می‌گویند. طی هر تکرار الگوریتم، مجموعه جدیدی از کروموزوم‌ها تولید می‌شود. جمعیت در زمان معلوم را نسل می‌نامند. طی هر نسل، میزان برآزش کروموزوم‌ها با تابع برآزش - که یک کروموزوم را با توجه به تابع هدف مسئله برآورد می‌کند - تعیین می‌شود. طی فرایند بازتولید، عملگرهای ژنتیک یعنی عملگرهای زاد و ولد و عملگر جهش، بر کروموزوم‌ها اعمال می‌شوند. به کروموزوم‌هایی که از این طریق تولید می‌شوند، نوزاد می‌گویند. در این مرحله، پس از ارزیابی برآزندگی نوزادان، کروموزوم‌های بهتر به‌وسیله یکی از رویه‌های گزینش، انتخاب شده و به نسل بعد منتقل خواهند شد. برای هر یک از عملگرهای ژنتیک یک پارامتر احتمال تعریف می‌شود که عملگرها با این احتمال بر کروموزوم‌ها اعمال می‌شوند. این فرایند تا زمان دستیابی به شرط توقف الگوریتم ادامه خواهد یافت.

الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات

این الگوریتم اولین بار توسط کندی و البرهارت (۱۹۹۵) مطرح شد. در تدوین این روش، از پرواز گروهی پرندگان، شنای گروهی ماهی‌ها و زندگی اجتماعی آنان الهام گرفته شده که با استفاده از یک سری روابط ریاضی ساده فرمول‌بندی شده است. مانند هر روش فراابتکاری دیگر، این الگوریتم نیز با ایجاد یک جمعیت تصادفی اولیه آغاز می‌شود که در اینجا یک گروه از ذره‌ها نامیده می‌شود. مشخصات هر ذره در گروه، براساس مجموعه‌ای از پارامترها تعیین می‌شود که باید مقادیر بهینه آنها مشخص شود. در این روش، هر ذره مبین یک نقطه از فضای جواب مسئله خواهد بود. هر یک از ذرات دارای حافظه است، یعنی بهترین موقعیتی که در فضای جست‌وجو به آن می‌رسد را به خاطر می‌سپارد. بنابراین حرکت هر ذره در دو جهت صورت می‌پذیرد؛ ابتدا به سوی بهترین موقعیتی که تاکنون اختیار کرده است، سپس به سوی بهترین موقعیتی که همه

ذرات تا به حال اختیار کرده‌اند. بنابراین در این روش، تغییر موقعیت هر ذره در فضای جست‌وجو تحت تأثیر تجربه و دانش خود و همچنین همسایگانش خواهد بود.

الگوریتم جست‌وجوی ارگانسیم‌های همزیست

در چند سال اخیر با توجه به محدودیت‌های موجود در روش‌های حل دقیق، پژوهش‌های زیادی در زمینه استفاده از الگوریتم‌های فراابتکاری، به‌منظور بهبود بهینه‌سازی سبب سهام صورت پذیرفته است. یکی از کاراترین روش‌های مورد استفاده در این زمینه، الگوریتم جست‌وجوی ارگانسیم‌های همزیست است. الگوریتم جست‌وجوی ارگانسیم‌های همزیست توسط چنگ و پرایوگو (۲۰۱۴) برای اولین بار در مجله کامپیوتر و ساختارها معرفی شد. این روش یکی از جدیدترین روش‌های حل فراابتکاری مسئله است. الگوریتم یادشده با الهام از روابط و کنش‌های بیولوژیکی موجود در اکوسیستم، روابطی را شبیه‌سازی می‌کند که موجودات زنده برای بقا در طبیعت انجام می‌دهند. ارگانسیم‌ها در طبیعت به‌ندرت تنها زندگی می‌کنند و در طول حیاتشان بارها تحت تأثیر جانداران دیگر قرار می‌گیرند. در این بین، برخی از این فعل و انفعالات سبب بهبود زندگی آنها می‌شود و سازگاری آنها را در طبیعت بیشتر می‌کند. این روابط به‌طور خلاصه، همزیستی^۱ نامیده می‌شود. امروزه واژه همزیستی برای توضیح روابط میان دو ارگانسیم مجزا به‌کار می‌رود. این روابط ممکن است ضروری بوده و بقای دو ارگانسیم به این روابط وابسته باشد؛ یا اینکه اختیاری باشد، یعنی حیات دو جاندار به رابطه همزیستی وابسته نباشد. سه نوع رابطه همزیستی که در طبیعت زیاد دیده می‌شود عبارت‌اند از: همیاری^۲، همسفرگی^۳ و انگلی^۴.

همیاری به روابطی گفته می‌شود که در آن هر دو طرف از این رابطه بهره می‌برند. در روابط همسفرگی تنها یک طرف رابطه از آن بهره می‌برد و سازگاری بیشتری با اکوسیستم پیدا می‌کند، جاندار دیگر نسبت به آن بی‌تفاوت است و این رابطه همزیستی، سود و زیانی برایش ندارد. در روابط انگلی، یک طرف رابطه از آن بهره می‌برد و طرف دیگر به‌شدت آسیب می‌بیند، به‌نحوی که اغلب از بین می‌رود. از این رو، در الگوریتم جست‌وجوی ارگانسیم‌های همزیست، از مدل کردن این سه نوع رابطه برای بهینه‌سازی مسئله استفاده می‌شود.

-
1. Symbiosis
 2. Mutualism Relationship
 3. Commensalism Relationship
 4. Parasitism Relationship

روش شناسی پژوهش

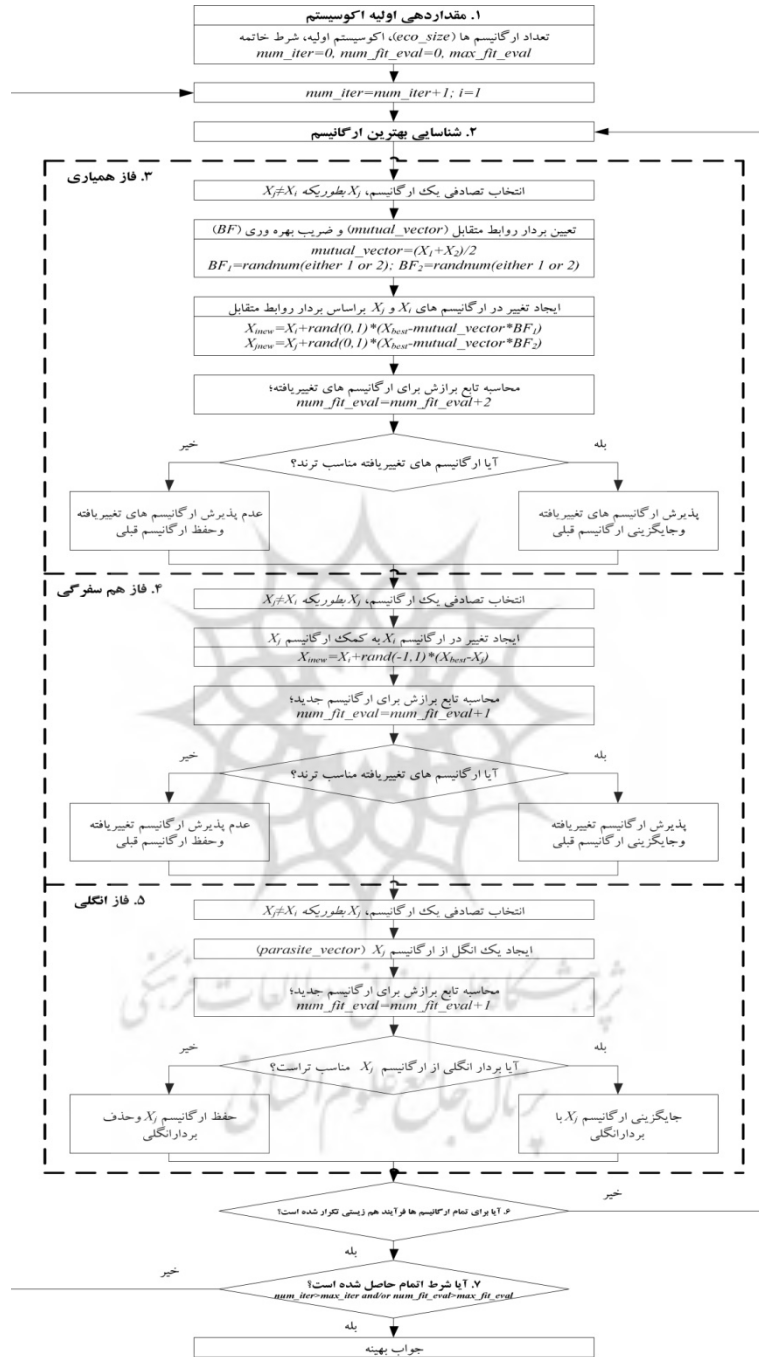
مشابه تمام روش‌های فراابتکاری، الگوریتم جست‌وجوی ارگانسیم‌های هم‌زیست نیز با یک جمعیت اولیه آغاز به کار می‌کند که به آن اکوسیستم گفته می‌شود. این الگوریتم، اکوسیستم را با سازوکار خاص خود، برای پیدا کردن جواب بهینه به کار می‌گیرد و در فضای جواب مسئله، به دنبال پاسخ‌های هرچه بهتر می‌گردد. در روش جست‌وجوی ارگانسیم‌های هم‌زیست، اکوسیستم از تعدادی ارگانسیم یا جاندار تشکیل شده است که هر یک از آنها، نماینده یک نقطه و یک کاندید برای پاسخ مسئله‌اند. در واقع هر ارگانسیم نقطه‌ای است که به تعداد متغیرهای تصمیم مسئله، مؤلفه دارد. بنابراین، می‌توان مقدار تابع هدف را برای هر ارگانسیم محاسبه کرد یا به ارزیابی آن پرداخت. مقدار تابع هدف به دست آمده، نشان‌دهنده سازگاری ارگانسیم یادشده با طبیعت است. کمابیش در تمام روش‌های فراابتکاری، مجموعه‌ای از عملیات‌ها وجود دارد که الگوریتم مد نظر با اجرای آنها روی جمعیت اولیه، جمعیت‌های بعدی و بهبود یافته را تشکیل می‌دهد. برای مثال، در الگوریتم ژنتیک، دو عملگر زاد و ولد و جهش، وظیفه تولید جمعیت جدید را بر عهده دارند. در الگوریتم جست‌وجوی ارگانسیم‌های هم‌زیست نیز، این وظیفه بر عهده سه عملگر است که هر یک از آنها نماینده یک نوع از هم‌زیستی‌های همیاری، همسفرگی و انگلی هستند. الگوریتم از سه فاز اصلی تشکیل می‌شود که به ترتیب عبارت‌اند از فازهای هم‌زیستی همیاری، هم‌زیستی همسفرگی و هم‌زیستی انگلی (چنگ و پرایوگو، ۲۰۱۴). بنابراین ساختار کلی این الگوریتم به صورت زیر خواهد بود.

- فاز تولید جمعیت اولیه
- حلقه تکرار الگوریتم
- فاز همیاری
- فاز همسفرگی
- فاز انگلی
- تکرار حلقه تا رسیدن به وضعیت پایانی.

نمای کلی الگوریتم جست‌وجوی ارگانسیم‌های هم‌زیست در شکل ۲ آمده است. در ادامه به تشریح هریک از فازهای این الگوریتم پرداخته می‌شود.

الف) فاز همیاری

از جمله روابط هم‌زیستی همیاری در طبیعت، می‌توان به رابطه زنبور عسل با گل‌ها اشاره کرد. در این رابطه، زنبور عسل از شهد گل‌ها برای تولید عسل بهره می‌برد و گل‌ها نیز با گرده‌افشانی که از طریق زنبور عسل صورت می‌پذیرد، از رابطه خود با زنبور عسل بهره‌مند می‌شوند.



شکل ۲. الگوریتم جست وجوی ارگانسیم های هم زیست

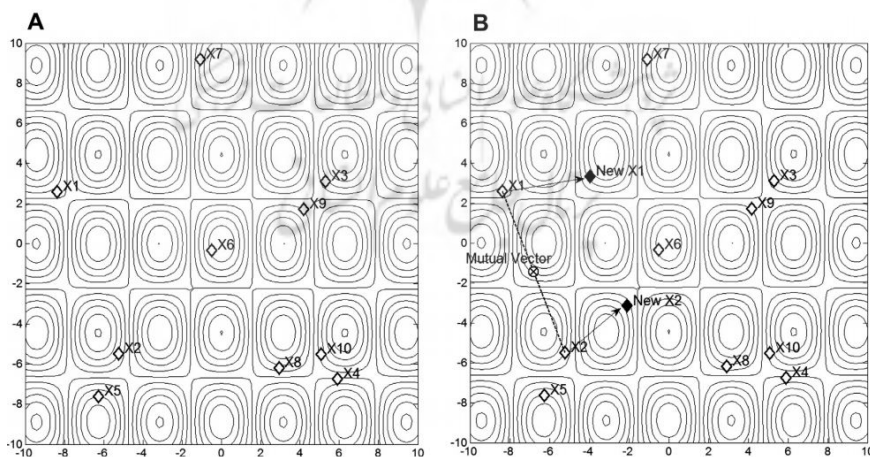
در این فاز از الگوریتم، x_i که نشان‌دهنده ارگانیسم i ام اکوسیستم و x_j نیز معرف ارگانیسم j ام اکوسیستم است، به صورت تصادفی از میان ارگانیسم‌های موجود در طبیعت انتخاب می‌شوند تا ارگانیسم‌های i ام و j ام همزیستی همیاری را با یکدیگر بیازمایند. پس از تغییرات ایجادشده از رابطه همزیستی همیاری، دوباره نقاط جدید به دست آمده ارزیابی می‌شوند و اگر تغییرات اعمال شده در جهت بهبود و سازگاری بیشتر هر دو ارگانیسم باشند، این تغییرات قطعی شده و نقاط جدید حفظ می‌شوند. در غیر این صورت، تغییرات اعمال نمی‌شوند. این عملیات برای تمام ارگانیسم‌های موجود در اکوسیستم، طبق روابط زیر تکرار خواهند شد.

$$x_{i\text{new}} = x_i + \text{rand}(0,1) \times (x_{\text{best}} - \text{Mutual_Vector} \times BF_1) \quad \text{رابطه ۸}$$

$$x_{j\text{new}} = x_j + \text{rand}(0,1) \times (x_{\text{best}} - \text{Mutual_Vector} \times BF_2) \quad \text{رابطه ۹}$$

$$\text{Mutual_Vector} = \frac{x_i + x_j}{2} \quad \text{رابطه ۱۰}$$

در روابط همزیستی همیاری، ممکن است که یک ارگانیسم از ارگانیسم دیگر بیشتر بهره‌مند شود، بنابراین باید ابزاری وجود داشته باشد تا این موضوع را نیز شبیه‌سازی کند. BF_1 و BF_2 اعدادی هستند که با مقدارگیری تصادفی از میان اعداد ۱ و ۲ موضوع مطرح شده را شبیه‌سازی می‌کنند. در قسمت $(x_{\text{best}} - \text{Mutual_Vector} \times BF_1)$ ، تلاش ارگانیسم‌ها برای رسیدن به بالاترین حد سازگاری موجود در طبیعت شبیه‌سازی می‌شود که این موضوع خود متأثر از نظریه انتخاب بهترین‌های داروین است.



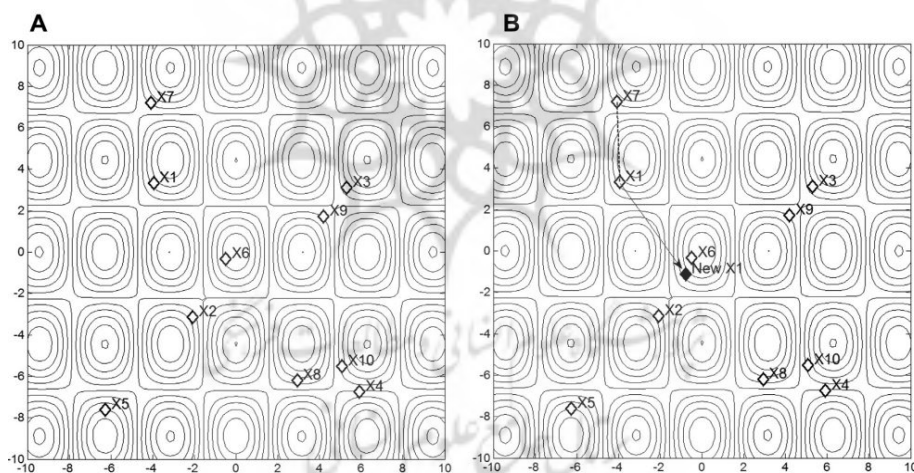
شکل ۳. عملیات همزیستی همیاری، (A) موقعیت پیش از شروع فاز، (B) موقعیت پس از اتمام فاز

ب) فاز همسفرگی

از جمله روابط همزیستی همسفرگی در طبیعت، می توان به ماهیان گوشت خواری اشاره کرد که با حرکت در کنار کوسه ها، از باقی مانده طعمه های آنها تغذیه می کنند. این ماهی ها از رابطه همسفرگی بهره زیادی می برند، در حالی که برای کوسه ها برقرار شدن یا نشدن این رابطه تفاوتی ندارد. در این قسمت نیز همانند قسمت همیاری، x_j به صورت تصادفی از جمعیت اکوسیستم برای همزیستی با x_i انتخاب می شود و عملگر همسفرگی طبق رابطه ۱۱ اجرا خواهد شود. شایان ذکر است همانند پدیده همسفرگی در طبیعت، رابطه همزیستی همسفرگی نیز تفاوتی در x_j به وجود نمی آورد.

$$x_{inew} = x_i + rand(-1,1) * (x_{best} - x_j) \quad \text{رابطه ۱۱}$$

همانند فاز همیاری، این تغییر نیز در صورتی حفظ و اعمال می شود که به بهبود تابع هدف x_i منجر شود.

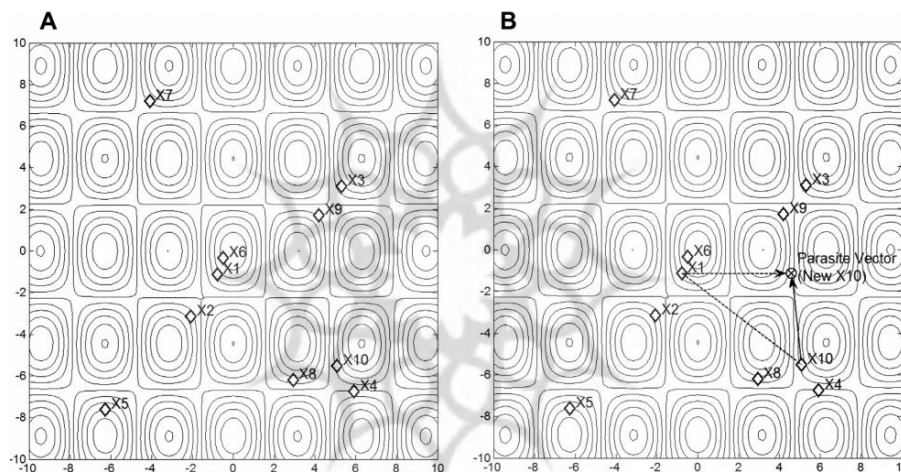


شکل ۴. عملیات همزیستی همسفرگی، (A) موقعیت پیش از شروع فاز، (B) موقعیت پس از اتمام فاز

ج) فاز انگلی

از جمله روابط همزیستی انگلی در طبیعت، می توان به انگلی با نام پلاسمودیوم یا مالاریا اشاره کرد که در بدن انسان رشد می کند و از طعام انسان بهره می برد و در صورت ادامه این روند،

انسان میزبان دچار زیان‌های اساسی می‌شود و جان خود را از دست می‌دهد. در این بخش x_i نقش انگل را بازی می‌کند که به آن بردار انگلی^۱ نیز می‌گویند. به منظور ایجاد بردار انگلی، نمونه مشابه x_i ساخته می‌شود، سپس این نمونه در جهت‌های تصادفی و با مقدارهای تصادفی در فضای جواب حرکت می‌کند. حال x_j به صورت تصادفی از میان جمعیت اکوسیستم انتخاب شده و میزبان انگل جدید می‌شود. در این حالت تابع هدف هم برای x_j و هم برای بردار شکل گرفته و محاسبه می‌شود. اگر مقدار تابع هدف برای بردار انگلی ساخته شده بهتر بود، بردار ساخته شده جایگزین x_j می‌شود و x_j از بین می‌رود. در غیر این صورت x_j بر بردار انگلی غلبه می‌کند و بردار ساخته شده از بین خواهد رفت.



شکل ۵. عملیات همزیستی انگلی، (A) موقعیت پیش از شروع فاز، (B) موقعیت پس از اتمام فاز

یافته‌های پژوهش

به منظور ارزیابی عملکرد الگوریتم جست‌وجوی ارگانیسم‌های همزیست در حل مدل میانگین - واریانس با مؤلفه‌های مقید، اقدام به پیاده‌سازی آن روی مجموعه‌ای از داده‌های واقعی نمودیم و به مقایسه نتایج آن با نتایج به دست آمده از دو روش فراابتکاری دیگر به نام‌های الگوریتم ژنتیک و بهینه‌سازی ازدحام ذرات پرداختیم. در این مطالعه از مجموعه داده‌های بازار سرمایه ژاپن (Nikkei) در فاصله زمانی مارچ ۱۹۹۲ تا سپتامبر ۱۹۹۷ که در آن اطلاعات مربوط به ۲۲۵ سهام به صورت رسمی اعلام شده، استفاده شده است. اطلاعات این مجموعه شامل میانگین بازده

1. Parasite Vector

سهام‌ها، ماتریس کواریانس میان سهام‌ها و همچنین ۲۰۰۰ نقطه از مرز کارای سرمایه‌گذاری است.^۱

به‌طور کلی معیارهایی که در تعیین کارایی یک الگوریتم نسبت به سایر الگوریتم‌ها در فرایند بهینه‌سازی سبد سهام استفاده می‌شود، عبارت‌اند از کیفیت و دقت جواب ارائه‌شده و زمان سپری‌شده به‌منظور دستیابی به جواب بهینه. کیفیت جواب ارائه‌شده به این معناست که الگوریتم مد نظر تا چه میزان توانسته است در تحقق بهینگی تابع هدف گام بردارد و مقصود از دقت این است که با توجه به وابستگی تمام روش‌های فراابتکاری به جمعیت اولیه که اغلب به‌صورت تصادفی تولید می‌شوند، الگوریتم مد نظر تا چه میزان توانسته است در همگرایی به جواب بهینه، به‌ویژه در تعداد تکرارهای بالا مناسب عمل کند. از این رو، برای هر یک از رویکردهای یادشده با در نظر گرفتن λ یکسان ($\lambda = 0/5$)، به حل مسئله با دفعات تکرار زیاد اقدام کردیم ($t = 50$). در این صورت با تعریف f_{best} ، به‌عنوان بهترین مقدار تابع هدف در تکرارهای صورت‌گرفته و f_t ، به‌عنوان مقدار تابع هدف در تکرار t ام؛ می‌توان میانگین درصد خطا^۲ را برای هر یک از رویکردهای نام‌برده به‌صورت رابطه^{۱۲} تعریف کرد (صلاحی، دائمی، لطفی و جمالیان، ۲۰۱۴):

$$\text{Mean Percentage Error} = \frac{1}{50} \sum_{t=1}^{50} \frac{f_t - f_{best}}{f_t} \times 100 \quad (\text{رابطه } 12)$$

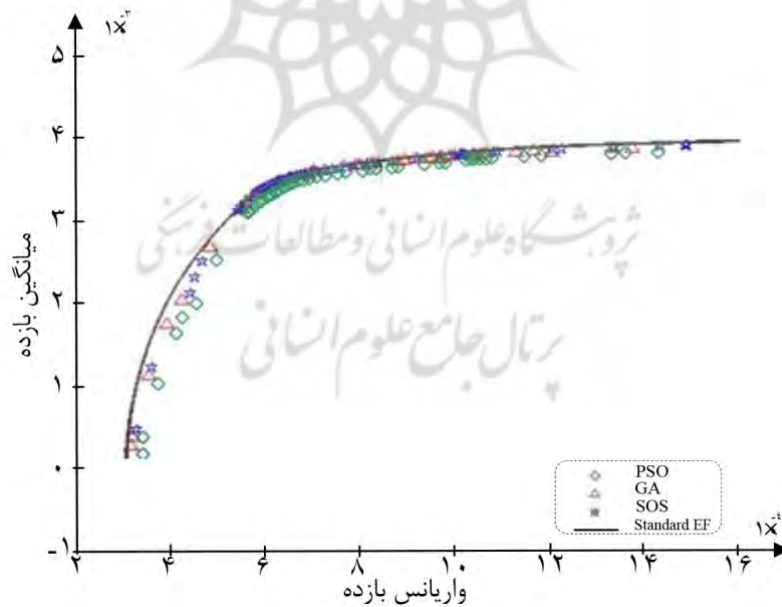
در ادامه برای ۵۱ مقدار متفاوت از λ با میزان افزایش $0/02$ در بازه $[0, 1]$ الگوریتم جست‌وجوی ارگانسیم‌های هم‌زیست به اجرا درآمد و نتایج آن ثبت شد. شایان ذکر است که در این تحقیق، محدودیت تعداد سهام‌های منتخب به‌صورت $k = 10$ و همچنین حدود پایین و بالای سهام t ام به‌ترتیب معادل $0/01$ و 1 در نظر گرفته شده است. گفتنی است، تمام محاسبات این پژوهش به‌کمک رایانه‌ای با پردازشگر پنج هسته‌ای $2/3$ گیگاهرتز و 8 گیگابایت رم انجام شده است.

در همین رابطه، مدل میانگین - واریانس با مؤلفه‌های مقید با دو رویکرد بهینه‌سازی ازدحام ذرات و الگوریتم ژنتیک نیز حل شد و علاوه‌بر ترسیم مرز کارای سرمایه‌گذاری در هر یک از رویکردهای یادشده، مقایسه‌ای تحلیلی بین عملکرد هر یک صورت پذیرفت که نتایج آن در قالب جدول‌ها و شکل‌های زیر مشاهده می‌شود.

۱. این اطلاعات از آدرس <http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/orlib/portinfo.html> به‌دست آمده است.
2. Mean Percentage Error (MPE)

جدول ۱. تنظیم پارامترها در هریک از رویکردهای فراابتکاری

الگوریتم ژنتیک (GA)	بهینه‌سازی ازدحام ذرات (PSO)
اندازه جمعیت (nPop) ۱۰۰	اندازه جمعیت (nPop) ۱۰۰
حداکثر تعداد تکرار (MaxIt) ۱۰۰	حداکثر تعداد تکرار (MaxIt) ۱۰۰
احتمال عملگر زاد و ولد (pCrossover) ۰/۷	ضریب کنترل سرعت (W) ۰/۷۲
احتمال عملگر جهش (pMutation) ۰/۲	ضریب یادگیری فردی (C _۱) ۱/۴۹
	ضریب یادگیری اجتماعی (C _۲) ۱/۴۹
	جست‌وجوی ارگانسیم‌های هم‌زیست (SOS)
	اندازه جمعیت (nPop) ۱۰۰
	حداکثر تعداد تکرار (MaxIt) ۱۰۰

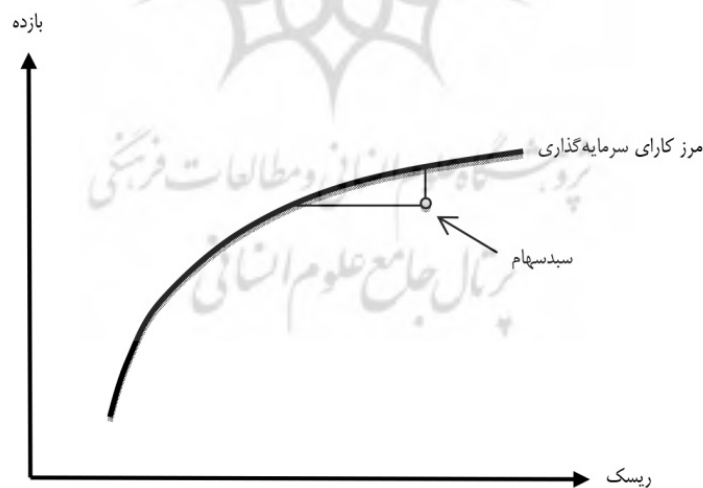


شکل ۶. مرز کارای سرمایه‌گذاری برای بازار سرمایه ژاپن (Nikkei)

جدول ۲. نتایج محاسبه حل مدل میانگین - واریانس با مؤلفه‌های مقید

الگوریتم جست‌وجوی ارگائیسیم‌های هم‌زیست (SOS)	الگوریتم ژنتیک (GA)	بهینه‌سازی ازدحام ذرات (PSO)	معیارهای ارزیابی	بازار سرمایه / تعداد سهام
۰/۱۶۹۹۱	۰/۱۷۱۳۰	۰/۱۸۳۸۳	بهینگی تابع هدف	۲۲۵/Nikkei
%۰/۱۵۵۵	%۰/۲۸۵۵	%۰/۴۲۱۳	میانگین درصد خطا	
۷۶	۹۲	۸۱	تعداد تکرار تا همگرایی	
۷۹/۷	۱۰/۱	۱۴/۴	زمان محاسبات (ثانیه)	

در ادامه و برای تحلیل بهتر نتایج، با استفاده از شاخص معرفی‌شده چنگ و همکارانش (۲۰۰۰)، به محاسبه فاصله نقاط (سبد سهام) از مرز کارای استاندارد اقدام شده است. در این شاخص هر نقطه یک سبد سهام را نشان می‌دهد و از مرز کارای استاندارد دو نوع فاصله دارد: فاصله عمودی (اختلاف در مقدار بازده) و فاصله افقی (اختلاف در ریسک سبد سهام). از این رو با توجه به بهینه‌بودن تمام نقاط روی مرز کارای استاندارد، هر نقطه‌ای که از این مرز حداقل فاصله عمودی یا افقی را داشته باشد، مطلوب‌تر است که آن را انحراف از استاندارد نیز می‌نامند. این مفهوم در شکل ۷ نشان داده شده است.

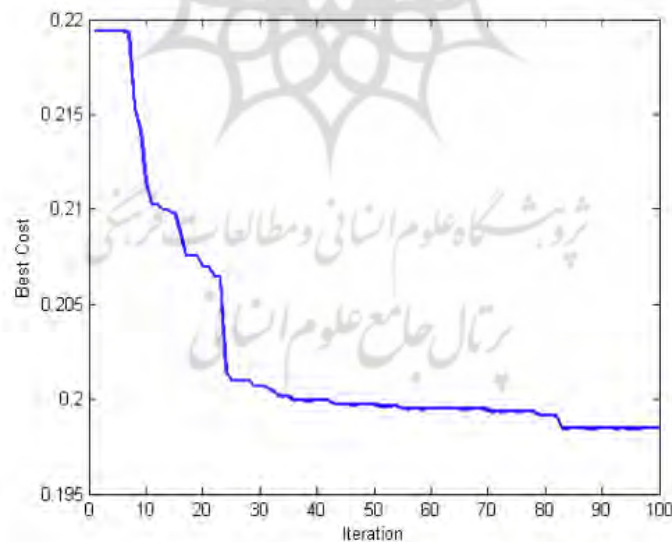


شکل ۷. محاسبه حداقل فاصله از مرز کارای استاندارد

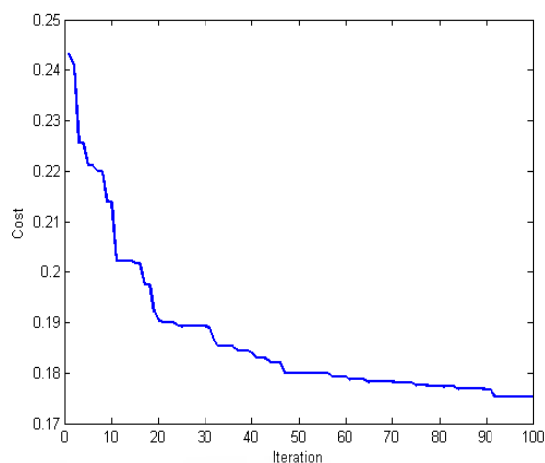
با توجه به توضیحاتی که بیان شد، فاصله مرز کارای رویکردهای یادشده با مرز کارای استاندارد، به صورت دقیق محاسبه شد. جدول ۳ مقدار این فاصله را برای آزمون کارایی انجام شده، نشان می دهد. مقادیر به دست آمده گویای آن است که الگوریتم جست و جوی ارگانیسم های همزیست برای ارائه مرز کارا، دقت زیادی دارد. همچنین برای تحلیل بهتر نتایج، روند همگرایی به جواب بهینه برای هر سه رویکرد نام برده در قالب شکل های ۸ تا ۱۰ نشان داده شده است.

جدول ۳. محاسبه حداقل فاصله از مرز کارای استاندارد

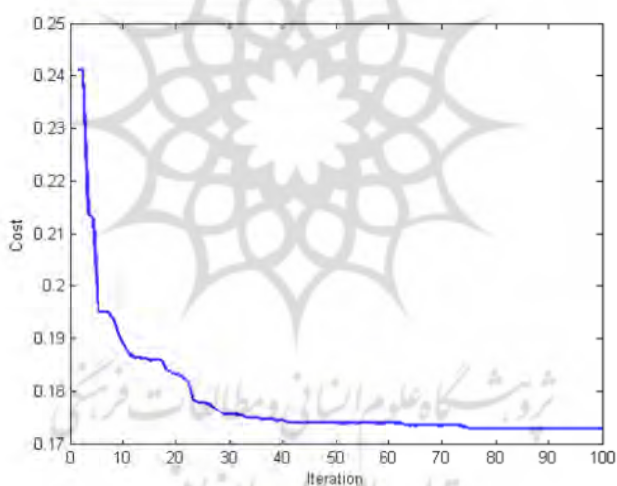
نام رویکرد	میانگین انحراف از استاندارد	میانه انحراف از استاندارد	بیشینه انحراف از استاندارد
بهینه سازی ازدحام ذرات (PSO)	۰/۰۰۰۰۸۱	۰/۰۰۰۰۵۴	۰/۰۰۰۰۲۱۲
الگوریتم ژنتیک (GA)	۰/۰۰۰۰۶۸	۰/۰۰۰۰۴۷	۰/۰۰۰۰۱۸۳
الگوریتم جست و جوی ارگانیسم های همزیست (SOS)	۰/۰۰۰۰۶۳	۰/۰۰۰۰۴۳	۰/۰۰۰۰۱۷۱



شکل ۸. روند همگرایی در بهینه سازی ازدحام ذرات (PSO)



شکل ۹. روند همگرایی در الگوریتم ژنتیک (GA)



شکل ۱۰. روند همگرایی در الگوریتم جست‌وجوی ارگانیسم‌های هم‌زیست (SOS)

شکل‌های ۸ تا ۱۰ نشان می‌دهند با توجه به تابع هدف مسئله که از نوع کمینه‌سازی است، مقدار تنزیل جواب اولیه در الگوریتم جست‌وجوی ارگانیسم‌های هم‌زیست نسبت به دو رویکرد دیگر به مراتب بیشتر است، از این رو می‌تواند در تعداد تکرارهای کمتری به جواب بهینه مسئله دست یابد. از امتیازهای دیگر این الگوریتم نسبت به دو رویکرد یادشده، می‌توان به بی‌نیازی آن به مرحله تنظیم پارامتر اشاره کرد و اینکه تنها مؤلفه دریافتی از کاربر، فقط تعداد تکرارهای لازم

تا توقف الگوریتم است که این مهم با توجه به این که در سایر رویکردهای فراابتکاری بخش قابل توجهی از زمان صرف این مرحله می‌شود، اهمیت بسیاری دارد.

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این مقاله به بهینه‌سازی سید سهام با استفاده از الگوریتم جست‌وجوی ارگانسیم‌های هم‌زیست پرداخته شد که با بهره‌مندی از روابط میان موجودات زنده در طبیعت، توانست در عین سادگی با سرعت و دقت زیادی در فرایند یافتن جواب‌های بهینه عمل کند. بدین منظور به مرور ادبیات جامع در زمینه کاربرد روش‌های فراابتکاری در بهینه‌سازی سید سهام که تاکنون ارائه شده، پرداخته شد تا نشان داده شود با این که استفاده از الگوریتم جست‌وجوی ارگانسیم‌های هم‌زیست در بهینه‌سازی و تشکیل سید سهام مزیت‌های بسیاری دارد، هنوز این روش به دلیل نوظهور بودن در کانون توجه قرار نگرفته است. پس از آن، به منظور تطبیق مناسب وضعیت بازار در فرایند تشکیل سید سهام بهینه، مدل میانگین - واریانس با مؤلفه‌های مقید برای این تحقیق انتخاب شد. این مدل با استفاده از الگوریتم جست‌وجوی ارگانسیم‌های هم‌زیست و بر مبنای داده‌های واقعی حل شد و نتایج آن با دو رویکرد شناخته‌شده فراابتکاری در حل مسائل بهینه‌سازی سید سهام با نام‌های الگوریتم ژنتیک و بهینه‌سازی ازدحام ذرات مقایسه شد که نتایج آن نشان‌دهنده کارایی و عملکرد مناسب الگوریتم جست‌وجوی ارگانسیم‌های هم‌زیست در بهینه‌سازی سید سهام بود.

در پایان، به عنوان موضوع پیشنهادی برای تحقیقات آتی باید گفت که با افزودن سایر محدودیت‌های دنیای واقعی، همچون میزان نقدشوندگی سید سهام و هزینه‌های مترتب بر معامله، می‌توان مدل میانگین - واریانس مارکوئیتز را جامع‌تر کرد و در راستای نزدیکی هرچه بیشتر به وضعیت واقعی بازار گام برداشت.

References

- Beale, E. M. L. & Forest, J. J. H. (1976). Global optimization using special ordered sets. *Mathematical Programming*, 10(1), 52-69.
- Chang, T.J., Meade, N., Beasley, J. E. & Sharaiha, Y. M. (2000). Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation. *Computers & Operations Research*, 27(13), 1271-1302.
- Cheng, M. Y. & Prayogo, D. (2014). Symbiotic organisms search: a new metaheuristic optimization algorithm. *Computers & Structures*, 139, 98-112.

- Crama, Y. & Schyns, M. (2003). Simulated annealing for complex portfolio selection problems. *European Journal of operational research*, 150(3), 546-571.
- Deng, G. F., Lin, W. T. & Lo, C. C. (2012). Markowitz-based portfolio selection with cardinality constraints using improved particle swarm optimization. *Expert Systems with Applications*, 39(4), 4558-4566.
- Eberhart, R. C. & Kennedy, J. (1995). A new optimizer using particle swarm theory. *Proceedings of the sixth international symposium on micro machine and human science*, New York, NY.
- Elahi, M., Yousefi, M. & Zare mehrjerdi, Y. (2014). Portfolio optimization with mean-variance approach using hunting search meta-heuristic algorithm. *Journal of Financial Research*, 16(1), 37-56. (in Persian)
- Fernández A. & Gómez, S. (2007). Portfolio selection using neural networks. *Computers & Operations Research*, 34(4), 1177-1191.
- Ghasemi, H.R. & Najafi, A.A. (2013). Portfolio optimization in terms of justifiability short selling and some market practical constraints. *Journal of Financial Research*, 14(2), 117-132. (in Persian)
- Holland, J. H. (1975). *Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence*, USA, University of Michigan Press.
- Kolm, P.N., Tütüncü, R. & Fabozzi, F. J. (2014). 60 Years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. *European Journal of Operational Research*, 234(2), 356-371.
- Mansini, R., Ogryczak, W. & Speranza, M. G. (2014). Twenty years of linear programming based portfolio optimization. *European Journal of Operational Research*, 234(2), 518-535.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The journal of finance*, 7(1), 77-91.
- Najafi, A. A. & Mushakhian, S. (2015). Multi-stage stochastic mean – semivariance – CVaR portfolio optimization under transaction costs. *Applied Mathematics and Computation*, 256, 445-458.
- Pai, G. V. (2012). Risk budgeted portfolio optimization using an extended ant colony optimization metaheuristic. *International Journal of Applied Metaheuristic Computing (IJAMC)*, 3(4), 25-42.
- Qodsi, S., Tehrani, R. & Bashiri, M. (2015). Portfolio optimization with simulated annealing algorithm. *Journal of Financial Research*, 17(1), 141-158. (in Persian)

- Rajabi, M. & Khaloozadeh, H. (2014). Optimal portfolio prediction in Tehran stock market using multi-objective evolutionary algorithms, NSGA-II and MOPSO. *Journal of Financial Research*, 16(2), 253-270. (in Persian)
- Sadjadi, S. J., Gharakhani, M. & Safari, E. (2012) Robust optimization framework for cardinality constrained portfolio problem. *Applied Soft Computing*, 12(1), 91-99.
- Salahi, M., Daemi, M., Lotfi, S. & Jamalian, A. (2014). *PSO and Harmony Search Algorithms for Cardinality Constrained Portfolio Optimization Problem Advanced Modeling and Optimization*, 16(3), 559-573.
- Sharpe, W. F. (1963). A simplified model for portfolio analysis. *Management science*, 9(2), 277-293.

