تحقیقات مالی
دانشکدهٔ مدیریت دانشگاه تهران
دورهٔ ۱۷، شمارهٔ ۱
بهار و تابستان ۱۳۹۴
ص. ۱۵۸- ۱۴۱

بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از روش تبرید شبیه‌سازی‌شده

سعید قدوسی[۱]، رضا تهرانی[۲]، مهدی بشیری[۳]

چکیده: مسئلهٔ بهینه‌سازی مارکویتز و تعیین مرز کارای سرمایه‌گذاری، هنگامی‌که وضعیت و محدودیت‌های دنیای واقعی در نظر گرفته شود، به سادگی با استفاده از شیوه‌های دقیق ریاضی، مانند برنامه‌ریزی درجهٔ دوم، حل نمی‌شود. از سوی دیگر، اغلب مدیران ترجیح می‌دهند به جای مدیریت سبد بسیار بزرگ، سبد کوچکی از دارایی‌ها را اداره کنند. این مسئله را می‌توان به محدودیت‌های کاردینال، یعنی محدودیت‌های حداقل و حداکثر تعداد دارایی‌های سبد تشبیه کرد. پژوهش پیش رو با بهره‌مندی از الگوریتم فراابتکاری تبرید شبیه‌سازی‌شده، به حل مسئلهٔ بهینه‌سازی سبد با محدودیت‌های کاردینال پرداخته است. بدین منظور با استفاده از اطلاعات سهام پنجاه شرکت فعال‌تر در بورس اوراق بهادار تهران در فاصلهٔ زمانی اول فروردین ۱۳۸۹ تا پایان فروردین سال ۱۳۹۱، مرز کارای سبدهای مختلف ۱۰ تا ۵۰ سهمی ترسیم شده است. نتایج پژوهش موفقیت الگوریتم تبرید شبیه‌سازی‌شده را در حل مسئلهٔ فوق نشان می‌دهد. همچنین با انتخاب درست سهام و تعیین وزن‌های مناسب از آن، می‌توان سبدهای کوچک‌تری که عملکرد مناسب‌تری دارند، انتخاب کرد.

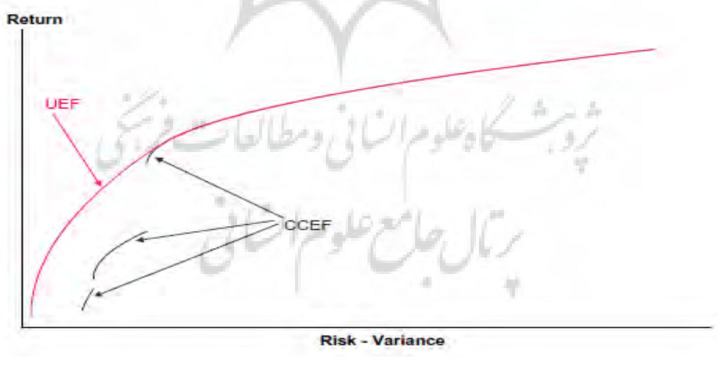
واژه‌های کلیدی:* *بهینه‌سازی سبد، تبرید شبیه‌سازی‌شده، محدودیت‌های کاردینال، مدل میانگین ـ واریانس، مرز کارا.

۱. کارشناس‌ارشد مدیریت مالی، دانشگاه تهران، تهران، ایران
۲. دانشیار مدیریت مالی، دانشکدهٔ مدیریت دانشگاه تهران، تهران، ایران
۳. دانشیار مهندسی صنایع، دانشکدهٔ فنی دانشگاه شاهد، تهران، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۳/۰۲/۱۶
تاریخ پذیرش نهایی مقاله: ۱۳۹۳/۱۲/۱۰
نویسندهٔ مسئول مقاله: سعید قدوسی
E-mail: saeed_ghodousi@yahoo.com

مقدمه

بهینه‌سازی سبد سهام، به مفهوم انتخاب ترکیبی بهینه از دارایی‌هاست که می‌تواند در کنار بیشینه‌سازی نرخ بازده مورد انتظار، ریسک نرخ بازده را به‌طور همزمان کمینه کند (اوریاخی و لوکاس، ۲۰۱۱). مارکویتز ۱۹۵۲ با ارائهٔ مدلی برای بهینه‌سازی سبد سهام، نشان داد با تشکیل سبدی از دارایی‌های مالی، می‌توان در سطح معینی از بازده ریسک را کاهش داد. به همین دلیل سرمایه‌گذاران تمایل دارند با شناخت و انتخاب ترکیب بهینهٔ دارایی‌های مالی در سبد سهام خود، بازده مورد انتظارشان را بیشینه کنند و ریسک را به حداقل برسانند. اگرچه مدل مارکویتز برای نخستین‌بار در تلفیق بیشینه‌سازی نرخ بازده و کمینه‌کردن ریسک موفق بود، در برخورد با محدودیت‌های دنیای واقعی مانند تعداد دارایی سبد یا حداقل و حداکثر مقدار هر یک از دارایی‌های سبد (محدودیت کاردینال) کارا نبود. علاوه‌براین، جست‌وجوی مرز کارا به‌کمک روش‌های دقیق ریاضی با مقدار اندک دارایی، در زمان مطلوب امکان‌پذیر است. روش‌های قطعی مانند برنامه‌ریزی درجهٔ دوم، در حل مسئلهٔ مقید بهینه‌سازی سبد سهام براساس محدودیت‌های مطرح‌شده، کارایی زیادی ندارند. با توجه به اینکه الگوریتم‌های قطعی عموماً براساس مشتق تابع هدف به سمت نقطهٔ بهینه حرکت می‌کنند، در موقعیت‌هایی که منطقهٔ موجه گسستگی دارد یا نقاط بهینهٔ موضعی فراوانی در فضای جست‌وجو قرار دارد، نمی‌توانند به خوبی جواب بهینهٔ کلی را شناسایی کنند؛ برای مثال به شکل ۱ توجه کنید.



شکل ۱. مرز کارای استاندارد (UEF)[1] و مقید (CCEF)[2] سبد

منبع: اوریاخی و لوکاس، ۲۰۱۱

1. Unconstrained Efficient Frontier
2. Cardinality Constrained Efficient Frontier

پژوهش پیش رو به‌کمک الگوریتم فراابتکاری تبرید شبیه‌سازی‌شده، به انتخاب سبد سهام و تعیین مرز کارا می‌پردازد. این الگوریتم برگرفته از روش تبرید تدریجی در علم فیزیک آماری است که شامل قراردادن ماده در دمای بالا و سپس کاهش تدریجی دماست. این روش نوعی جست‌وجوی فراابتکاری ساده و اثربخش در حل مسائل بهینه‌سازی ترکیبی است. در ایران تاکنون هیچ مطالعه‌ای در زمینهٔ بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از این روش دیده نشده است. علاوه‌براین، نتایج پژوهش حاضر که از نوعی روش کدنویسی ابتکاری بهره می‌برد، نشان می‌دهد از سرعت و دقت بالایی در یافتن مرز کارای سبد سهام برخوردار است.

پژوهش پیش رو در شش بخش سازمان‌دهی شده است؛ پس از مقدمه‌ای کوتاه، در بخش دوم به بررسی پیشینهٔ نظری و تجربی و مدل پژوهش پرداخته شده است. در بخش سوم روش‌شناسی پژوهش بیان می‌شود، بخش چهارم روش الگوریتم تبرید شبیه‌سازی‌شده و داده‌ها را بررسی می‌کند و در ادامه به الگوریتم مدل طراحی، خروجی‌ها و یافته‌های پژوهش می‌پردازد. نتیجه‌گیری و پیشنهادهای پژوهش در بخش پنجم دنبال می‌شود و در بخش پایانی، منابع به‌کاررفته معرفی می‌شوند.

پیشینهٔ پژوهش

پیشینهٔ نظری

مدل میانگین ـ واریانس مارکویتز، هستهٔ اصلی پژوهش‌های بسیاری از پژوهشگران این حوزه بوده است. مدل اصلی مارکویتز مدل ریاضی ساده‌ای است، اما مزیت اصلی آن قابلیت افزودن محدودیت‌های جدید برای بررسی وضعیت واقعی بازار است (اوراخی و لوکاس، ۲۰۱۱). از دیدگاه نظری، انتخاب سبد سهام با محدودیت‌های دنیای واقعی (انتخاب تعداد محدودی دارایی از جامعهٔ دارایی‌ها؛ به‌گونه‌ای که ارزش دارایی‌ها حداکثر باشد و وزن آنها از بودجهٔ سرمایه‌گذاری بیشتر نشود) را می‌توان مانند نوعی مسئلهٔ کوله‌پشتی در نظر گرفت. در این پژوهش فرض می‌شود سرمایه‌گذاران می‌توانند از بین یک دارایی بدون ریسک و حداکثر k دارایی ریسکی، سبد خود را انتخاب کنند و همچنین سرمایه‌گذاران می‌خواهند ریسک‌شان را به حداقل برسانند. علاوه‌بر محدودیت‌های فوق، در این مقاله محدودیت‌های جدیدی اضافه شده است که سرمایه‌گذار را وادار می‌کند در چند دارایی خاص، کمترین مقدار را سرمایه‌گذاری کند و در چند دارایی خاص دیگر، بیشتر از مقدار تعیین‌شده سرمایه‌گذاری نکند (مشابه محدودیت‌های سرمایه‌گذاری در صندوق‌های سرمایه‌گذاری مشترک). اندازهٔ چنین مسئله‌ای با افزایش تعداد دارایی‌ها بزرگ‌تر

می‌شود و آن را به مسئلهٔ ان. پی. سخت[1] تبدیل می‌کند (مارینگر،۲۰۰۵). از سوی دیگر با افزودن محدودیت‌های دنیای واقعی، سرمایه‌گذاری منطقهٔ موجه جواب با گسستگی‌های فراوانی روبه‌رو می‌شود یا نقاط بهینهٔ محلی فراوانی به‌دست می‌دهد که روش‌های دقیق مؤثری برای یافتن نقطهٔ بهینهٔ سراسری نخواهد بود. از آنجاکه هیچ‌یک از این روش‌ها ترکیب‌های غیر بهینه را حذف نمی‌کنند، به جای انتخاب سبد بهینهٔ کلی فقط یک سبد بهینهٔ محلی را پیدا می‌کنند. روش جایگزین برای حل چنین مسائلی، بهره‌مندی از الگوریتم‌های فراابتکاری است که محققان بسیاری برای بهبود این مدل‌ها تلاش کرده‌اند.

پیشینهٔ تجربی

روش‌های دقیق

از مهم‌ترین کارهای انجام‌گرفته در سال‌های اخیر، مطالعهٔ شاو، لیو و کوپمن (۲۰۰۸) است. آنها برای بهینه‌سازی از روش لاگرانژ استفاده کردند با این تفاوت که محدودیت کاردینال را به‌صورت نامساوی در نظر گرفتند؛ اما با اینکه مدل چهار ساعت زمان صرف کرد با شکست مواجه شد. در سال ۲۰۰۸، ویلما، احمد و نماسر از الگوریتم شاخه و کران[2] برای حل مدل استفاده کردند. آنها نیز محدودیت کاردینال را به‌صورت نامساوی در نظر گرفتند. برتسیما و شیودا (۲۰۰۹) در پژوهشی از الگوریتم معرفی‌شدهٔ لمسک و هوسون (۱۹۶۴) بهره بردند و بیان کردند روش‌های دقیق در زمان محدود به شکست منتهی خواهد شد. گولپینار و مویینی در سال ۲۰۱۰ به‌کمک روش برنامه‌ریزی توابع محدب با انتخاب بدترین سناریوی ممکن، به بهینه‌سازی اقدام کردند. در مدل پیشنهادی آنها محدودیت کاردینال به‌صورت تساوی در نظر گرفته شده است.

روش‌های فراابتکاری

از مهم‌ترین کارهای انجام‌گرفته می‌توان به پژوهش چانگ، بازلی و شریحا (۲۰۰۰) اشاره کرد. آنها از الگوریتم‌های ژنتیک، جست‌وجوی ممنوعه و تبرید شبیه‌سازی، با توجه به ویژگی ناپیوسته‌بودن آن و محدودیت کاردینال، برای یافتن مرز کارا استفاده کردند. در سال ۲۰۰۳ کراما و چیگر به‌کمک الگوریتم تبرید شبیه‌سازی‌شده، به یافتن مرز کارا همراه با محدودیت‌های معامله مربوط به تعداد سهام پرداختند. پژوهشگرانی همچون مورال (۲۰۰۶)، چانگ (۲۰۰۹)، سلیمان (۲۰۰۹)، آگنوتوپولوس (۲۰۱۰) و هان‌هونگ (۲۰۱۱) از الگوریتم ژنتیک برای حل مدل و تعیین مرز کارای سبد استفاده کردند. در سال ۲۰۱۱، اوریاخی و لوکاس از سه الگوریتم ژنتیک،

1. NP Hard
2. Branch-and-bound

جست‌وجوی ممنوعه و تبرید شبیه‌سازی‌شده برای تعیین مرز کارای مدل مارکویتز استفاده کردند. نکته‌ای که در تمام تحقیقات دیده می‌شود، اینکه هیچ‌یک از پژوهشگران مدلی اضافه‌تر از مدل چانگ ارائه نکرده‌اند و تنها به مقایسه و توسعهٔ روش‌های مذکور برای یافتن مرز کارای مناسب با عملکرد بهتر، دست زده‌اند.

عبدالعلی‌زاده و مشقی (۱۳۸۲) با استفاده از الگوریتم ژنتیک، به یافتن سبد بهینه دست زدند محمدی استخری (۱۳۸۶) به‌کمک الگوریتم ژنتیک، به انتخاب سبد سهام از بین ۲۰ سهم موجود در بازار اقدام کرد. وی در مدل پیشنهادی خود محدودیت کاردینال را وارد نکرد. تقوی‌فرد، منصوری و خوش‌طینت (۱۳۸۶) با افزودن محدودیت‌های دیگری (محدودیت تعداد سهام به عدد صحیح و محدودیت وزن دارایی‌ها در بازهٔ مشخص) به مدل‌های قبلی، با استفاده از الگوریتم ژنتیک به یافتن مرز کارا اقدام کردند. اسلامی بیدگلی (۱۳۸۸) با بهره‌مندی از الگوریتم مورچگان مدل شارپ را بهینه‌سازی کرد. راعی و علی بیکی در سال ۱۳۸۹ به‌کمک روش حرکت تجمعی ذرات، سبد بیست‌سهمی را بهینه‌سازی کردند. همین پژوهشگران در سال ۱۳۹۰ از الگوریتم جست‌وجوی هارمونی با رویکرد میانگین ـ نیم واریانس استفاده کردند (راعی و علی بیکی، ۱۳۹۰). الهی و یوسفی (۱۳۹۲) به‌کمک الگوریتم ابتکاری جست‌وجوی شکار، سبد سهام را با رویکرد میانگین ـ واریانس بهینه‌سازی کردند.

پژوهش حاضر با افزودن محدودیت‌های ذکرشده به مدل، توانایی الگوریتم تبرید شبیه‌سازی‌شده برای بهینه‌سازی سبد سهام را با در نظر گرفتن حداقل بازده مطلوب مورد انتظار سرمایه‌گذار بررسی می‌کند.

مدل مفهومی

بهینه‌سازی پرتفوی، یعنی انتخاب بهترین ترکیب از دارایی‌های مالی؛ به‌گونه‌ای که سبب شود بازده سبد سرمایه‌گذاری تا حد ممکن حداکثر شود و ریسک سبد به حداقل برسد. ایدهٔ اساسی نظریهٔ مدرن سبد بر این پایه است که اگر در دارایی‌هایی که به‌طور کامل با هم همبستگی ندارند سرمایه‌گذاری شود، ریسک آن دارایی‌ها یکدیگر را خنثی می‌کنند؛ بنابراین می‌توان بازده ثابتی را با ریسک کمتر به‌دست آورد. مارکویتز در سال ۱۹۵۲ برای اولین‌بار الگوی حل مسئلهٔ انتخاب مجموعهٔ بهینه دارایی‌ها (نظریهٔ میانگن ـ واریانس) را ارائه داد. وی مسئله را به‌صورت برنامه‌ریزی درجهٔ دوم با هدف کمینه‌سازی واریانس مجموعهٔ دارایی‌ها با این شرط مطرح کرد که بازده مورد انتظار با مقدار ثابتی برابر باشد. ریسک‌گریزبودن تمام سرمایه‌گذاران، فرض اصلی این مدل است. این مسئله محدودیت کارکردی دیگری نیز دارد که براساس آن، مجموع اوزان

دارایی‌ها باید برابر با یک شود و وزن هریک از دارایی‌های سبد باید عـددی حقیقـی و غیرمنفـی باشد.

فرناندز و گومز (۲۰۰۷) مدل مارکویتز را با افزودن محدودیت‌هـای حـد بـالا و پـایین بـرای متغیرها، اصلاح کردند و مدل CCMV[1] با میانگین ـ واریانس را با مؤلفـه‌هـای مقیـد بـه‌وجـود آوردند. چنانچه محدودیت تعداد دارایی‌های منتخب به مسئلهٔ فوق اضافه شود، مدل به‌شکل زیـر تغییر می‌کند.

$$Min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$$ رابطهٔ ۱)

$$subject\ to \sum_{i=1}^{n} w_i r_i = R^*$$ رابطهٔ ۲)

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$ رابطهٔ ۳)

$$w_i \geq 0 \ \ (i = 1, \dots, n)$$ رابطهٔ ۴)

$$l_i w_i \leq w_i \leq u_i w_i , \qquad i = 1, \dots, n$$ رابطهٔ ۵)

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i = k \ , \quad \delta_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, i = 1, \dots, n$$ رابطهٔ ۶)

در مدل ریاضی فوق که مدل اصلی این پژوهش نیز به‌شمار می‌رود، پارامترها به‌صـورت زیـر تعریف می‌شوند:

N: تعداد کل دارایی‌ها؛

r_i: بازده مورد انتظار دارایی i؛

σ_{ij}: کوواریانس بین بازده دارایی i و دارایی j؛

R: سطح بازده مورد انتظار مطلوب؛

1. Cardinality Constrained Mean-Variance

K: تعداد دارایی‌های نگهداری‌شده در سبد؛

l_i: حداقل نسبت کل سرمایه‌گذاری در دارایی i، اگر در دارایی i سرمایه‌گذاری شود؛

u_i: حداکثر نسبت کلی که می‌توان در دارایی i سرمایه‌گذاری کرد؛

w_i $(0 \leq w_i \leq 1)$: متغیر تصمیم نسبت سرمایه‌گذاری در دارایی i؛

δ_i: متغیر تصمیم که اگر در دارایی i سرمایه‌گذاری شود برابر با ۱ است؛ در غیر این صورت صفر می‌شود.

مجموعهٔ معادلات مدل CCMV، ترکیبی از مسئلهٔ برنامه‌ریزی عدد صحیح و مسئلهٔ برنامه‌ریزی درجهٔ دوم است که برای حل دقیق این نوع مسائل الگوریتم‌های مؤثر و کارایی در برنامه‌ریزی ریاضی وجود ندارد. با توجه به اینکه الگوریتم‌های قطعی عموماً براساس مشتق تابع هدف به سمت نقطهٔ بهینه حرکت می‌کنند، در موقعیت‌هایی که منطقهٔ موجه گسستگی دارد یا فضای جست‌وجو نقاط بهینهٔ موضعی فراوانی داشته باشد، نمی‌توانند به خوبی جواب بهینهٔ کلی را شناسایی کنند. تمام مطالعاتی که در این زمینه انجام گرفته است، به دو دستهٔ عمده تقسیم می‌شوند. روش‌های دقیق حل مدل و روش‌های فراابتکاری که در ادامه به مهم‌ترین آنها اشاره خواهد شد.

روش‌شناسی پژوهش

الگوریتم تبرید شبیه‌سازی‌شده (SA)[1] از کارهای کریک پاتریک و کرنی در سال‌های ۱۹۸۳ و ۱۹۸۵ است. کریک پاتریک و کرنی، متخصصانی در زمینهٔ فیزیک آماری بودند. آنها برای حل مسائل سخت بهینه‌سازی، روشی مبتنی بر تبرید تدریجی[2] پیشنهاد کردند. مهندسان مواد برای رسیدن به حالتی که در آن مادهٔ جامد به خوبی مرتب و انرژی آن کمینه‌شده باشد، از روش تبرید تدریجی استفاده می‌کنند. این روش شامل قراردادن ماده در دمای بالا و کاهش تدریجی دماست. الگوریتم SA، جست‌وجوی فراابتکاری ساده و اثربخشی در حل مسائل بهینه‌سازی ترکیبی است. روش تبرید شبیه‌سازی‌شده، فرایند تبرید تدریجی را برای حل مسئلهٔ بهینه‌سازی، شبیه‌سازی می‌کند. تابع هدف مسئله مشابه انرژی ماده‌ای است که باید به‌کمک تعریف دمای مجازی کمینه شود. دما در این حالت پارامتری در الگوریتم است که می‌توان آن را کنترل کرد. الگوریتم SA تا زمانی که سیستم به حالت تعادل همگرا شود، تغییرات انرژی را در فرایند تبرید شبیه‌سازی می‌کند. این طرح را متروپلیس در سال ۱۹۵۳ ارائه کرد.

1. Simulated Annealing (SA)
2. Annealing

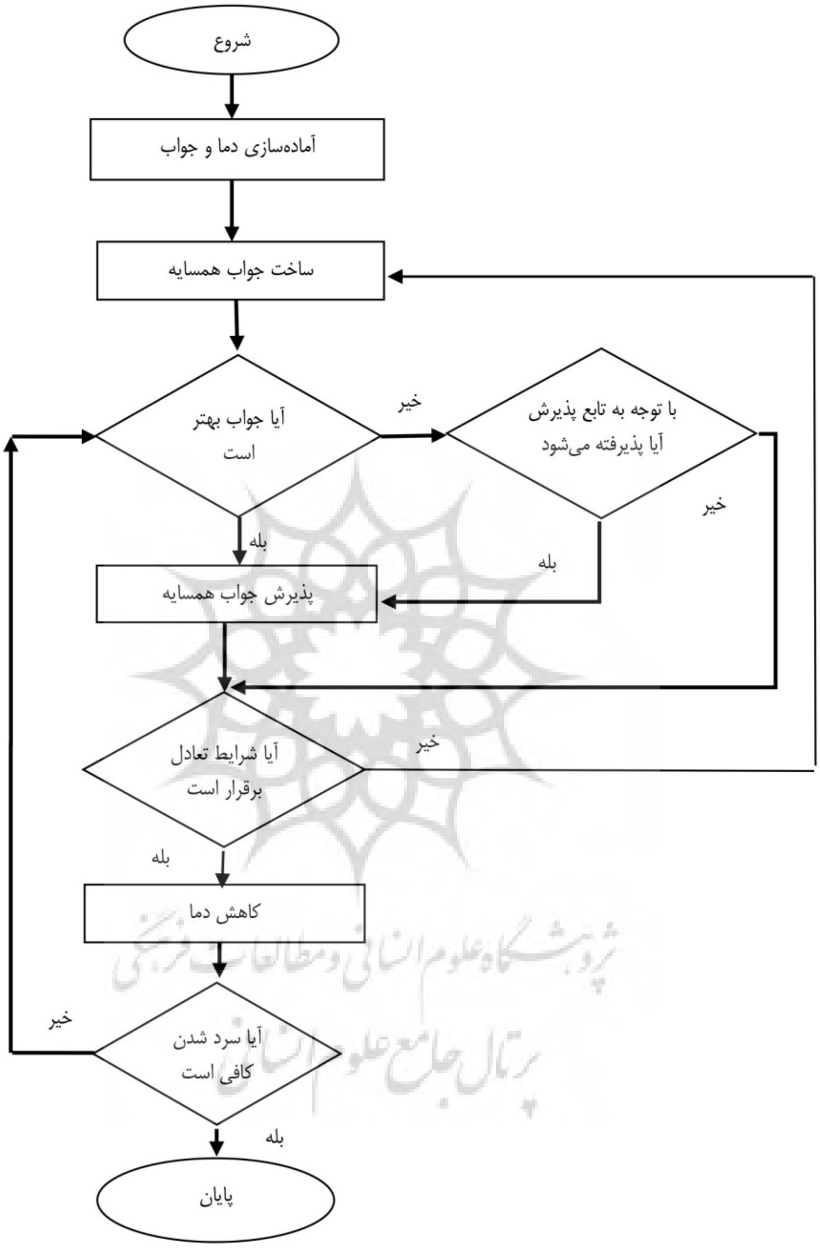
تابع هدف مسئله، همان سطح انرژی سیستم است. هر جواب مسئلهٔ بهینه‌سازی، به یک حالت سیستم اختصاص دارد. متغیرهای تصمیم با ساختار مولکولی مرتبط هستند. بهینهٔ کلی، حالت پایدار[1] سیستم است. یافتن جواب بهینهٔ محلی به این معناست که حالتی شبه‌پایدار به‌دست آمده است. الگوریتم SA، یک الگوریتم احتمالی است که در آن، سازوکاری برای خروج از بهینه‌های محلی ارائه شده است.

قالبی برای الگوریتم تبرید شبیه‌سازی‌شده

از قانون متروپلیس می‌توان برای شبیه‌سازی فرایند تبرید برای حل مسائل بهینه‌سازی استفاده کرد. با شروع از حالت اولیه، سیستم تحت تأثیر تغییری قرار می‌گیرد. اگر این تغییر به کاهش تابع هدف (انرژی) منجر شود، پذیرفته می‌شود و اگر سبب افزایش تابع هدف شود، با احتمال $\exp(-\Delta E/T)$ پذیرفته می‌شود. در واقع فرایند پذیرش هنگامی که تابع هدف بدتر شود، بدین ترتیب است؛ عددی به‌صورت تصادفی از بازهٔ صفر تا یک انتخاب می‌شود؛ سپس اگر عدد تصادفی کمتر یا مساوی مقدار $\exp(-\Delta E/T)$ بود، تغییر پذیرفته می‌شود و در غیر این صورت رد خواهد شد. با انجام متوالی قانون پذیرش، از حالت‌های (جواب‌های) مختلف توالی‌ای به‌دست می‌آید و می‌توان نشان داد در هر دمای معین، هنگامی که طول توالی ایجادشده بی‌نهایت باشد، سیستم می‌تواند به تعادل گرمایی برسد.

در قانون متروپلیس نقش دما را می‌توان به‌سادگی درک کرد. در دمای بالا (T بزرگ)، مقدار احتمال $\exp(-\Delta E/T)$ نزدیک به یک است، بنابراین بیشتر حرکت‌ها پذیرفته می‌شوند و الگوریتم به جست‌وجوگر تصادفی تبدیل می‌شود. در دمای پایین، مقدار احتمال $\exp(-\Delta E/T)$ نزدیک به صفر می‌شود، بنابراین بیشتر حرکت‌ها که سطح انرژی را افزایش می‌دهند (حرکت‌های بد) رد می‌شوند و در نتیجه الگوریتم بسیار حریصانه[2] می‌شود. در دماهای متوسط، الگوریتم به‌طور متناوب اجازهٔ حرکت‌های نامناسب را می‌دهد. هنگامی که در دمایی مفروض به تعادل گرمایی رسید، دما خیلی آرام کاهش داده می‌شود و زنجیره‌ای جدید از جواب‌ها را در دمای جدید تولید می‌کند. هنگامی که حالت تعادلی حاصل شد، دما با توجه به برنامهٔ تبرید کاهش می‌یابد که این کاهش موجب می‌شود تعداد کمتری از جواب‌های نامطلوب پذیرفته شود. شکل ۲ نمودار جریان الگوریتم SA را نشان می‌دهد.

1. Ground State
2. Greedy



شکل ۲. جریان الگوریتم تبرید شبیه‌سازی‌شده

اجزای اصلی الگوریتم تبرید شبیه‌سازی‌شده

تابع پذیرش: الگوریتم از طریق احتمال پذیرش، بستگی بـه دمـای T و میـزان تغییـرات تـابع هدف (انرژی ΔE) دارد. تابع پذیرش در الگوریتم های SA به‌صورت رابطهٔ ۷ تعریف می‌شود.

$$exp\left(-\frac{\Delta E}{T}\right)$$ دمای اولیه رابطهٔ ۷)

اگر دمای اولیه بسیار بالا باشد، جست‌وجو کم و تصادفی می‌شود و برعکس، هنگامی که دما بسیار کم باشد، جست‌وجو تا حدودی به جست‌وجوی محلی تبدیل می‌شود. بنابراین باید بین این دو حالت تعادل ایجاد شود. دمای اولیـه نبایـد خیلـی بـالا باشـد؛ زیـرا بـرای تکرارهـای زیـادی جست‌وجوی تصادفی صورت می‌گیرد، اما در عین حال باید به اندازهٔ کافی بـالا باشـد تـا فضـای جواب به خوبی جست‌وجو شود.

حالت تعادل: برای رسیدن به تعادل در هر دما، باید چندین تکرار انجام گیرد. از لحـاظ نظـری، تعداد تکرارها در هر دما باید با توجه به اندازهٔ مسئله به‌صورت نمایی افـزایش یابـد کـه درعمـل پیاده‌سازی این راهبرد امکان‌پذیر نیست. تعداد تکرارها با توجـه بـه انـدازهٔ نمونـهٔ مسـئله تعیـین می‌شود و باید نسبت قابل قبولی از اندازهٔ همسایه $|N(S)|$ باشد.

تابع تبرید: در الگوریتم SA، دما به‌صورت تدریجی به‌گونه‌ای کاهش می‌یابد که کیفیت جـواب و سرعت تبرید نسبت به هم حالت معکـوس داشـته باشـند. اگـر دمـا بسـیار آرام کـاهش یابـد، جواب‌های بهتری به‌دست می‌آید، اما زمان محاسبات بالا می‌رود.

شرط خاتمه: شرط خاتمه که در حالـت نظـری پیشـنهاد مـی‌شـود، پایـان الگـوریتم در زمـان صفرشدن دما است، اما درعمل می‌توان جست‌وجو را زمانی متوقـف کـرد کـه احتمـال پـذیرش جواب، بسیار کوچک و ناچیز شود.

تابع برازندگی: تابع برازندگی یکی از مهم‌ترین قسمت‌های الگویتم فراابتکاری است کـه سـهم عمده‌ای از زمان اجرای الگوریتم را به خود اختصاص می‌دهـد. وظیفـهٔ ایـن تـابع یـافتن میـزان برازندگی هریک از پاسخ‌ها است. با توجه به اینکه در این پژوهش، هدف بهینه‌سـازی سـبدی از سهام براساس معیار میانگین ـ واریانس مارکویتز است. تابع برازندگی به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\sigma^2 = W_i \sigma_{ij} \acute{W_i}$$ رابطهٔ ۸)

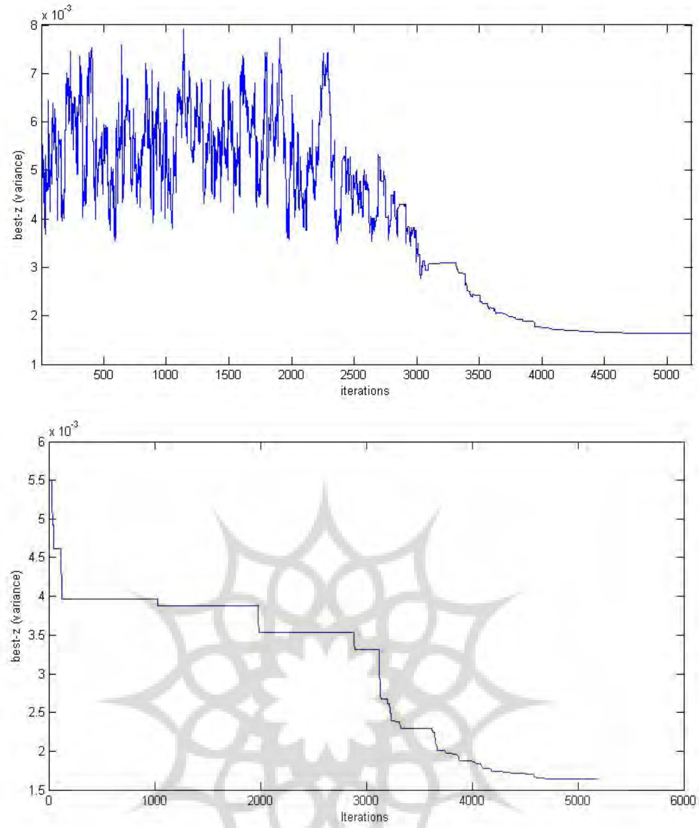
در رابطهٔ ۸؛ ماتریس W_i ماتریس وزن سهام، σ_{ij} ماتریس کواریانس بین هر یک از سهام و $\acute{Wi}$ ترانهادهٔ ماتریس Wi است.

یافته‌های پژوهش

داده‌های مسئله، بازده ماهانهٔ سهام ۵۰ شرکت منتخب (۵۰ شرکت فعال‌تر) از ابتدای فروردین ۱۳۸۹ تا پایان فروردین ۱۳۹۱ است. پس از استخراج بازده ماهانهٔ این سهام از نرم‌افزار ره‌آورد نوین، ریسک آنها بر اساس معیار واریانس در نظر گرفته‌شده، برآورد شد. ماتریس کواریانس بین بازده سهام در نرم‌افزار MATLAB برآورد شده است. داده‌های مذکور داده‌های ورودی مدل هستند. در ادامه به شرح الگوریتم SA مدل پژوهش پرداخته می‌شود.

در مرحلهٔ بعد، پارامترهای ورودی مدل، مانند تعداد سهام (n) و مقدار k (تعداد سهام نگهداری‌شده در سبد) را به مدل اضافه می‌کنیم. همان‌طور که اشاره شد K عددی است که سبب محدودیت تعداد سهام نگهداری‌شده در سبد می‌شود. برای مثال، اگر در سبد ۳۰ سهم نگهداری شود، k = ۳۰ است. حال باید جواب اولیه‌ای به نام ماتریس w تولید شود. در طراحی این مدل، تلاش شد محدودیت‌ها به‌صورت خرده‌الگوریتم کدگذاری‌شده وارد مدل شوند. با توجه به اینکه الگوریتم SA جواب تصادفی اولیه را مبنا قرار می‌دهد و بر این مبنا به بهبود و جست‌وجوی فضا اقدام می‌کند، بنابراین جواب اولیهٔ تولیدشده باید محدودیت‌های مد نظر مدل را داشته باشد و بعد الگوریتم اقدام به بهبود جواب کند.

پس از تعیین مقادیر ورودی مدل با اعمال محدودیت‌های ذکرشده، به تعیین پارامترهای اصلی الگوریتم SA اقدام شده است. این پارامترها دمای اولیه (ذوب)، دمای انجماد (T)، ضریب سردشدن، تعداد دفعات قبول‌کردن بردار استقرار و تعداد تکرار الگوریتم در هر دما را شامل می‌شود. نوع مسئله و بزرگی داده‌ها نیز در تعیین دمای اولیه مؤثرند. برای تعیین دمای اولیهٔ مسئله، ابتدا عدد ۱۰۰ و پس از آن ۱۰، ۲، ۱، ۰/۱ در نظر گرفته شد و با توجه به بزرگی داده‌ها که اعدادی کوچکتر از ۰/۲ هستند، ۱۰ مناسب‌ترین عدد انتخاب شد؛ چرا که الگوریتم اجازه دارد حدود ۲۰۰۰ مرتبه تکرار جواب‌های بد را انتخاب کند و از میان آنها بهینه‌های محلی را خارج کند (شکل ۳).



شکل ۳. نمودار روند مقدار جواب بهینه درSA برای سبد ۳۰ سهمی

برای تعیین تابع تبرید یا میزان سردشدن، ابتدا از تابع تبرید هندسی ۰/۹۹۹۹ = r آغاز شد و با ۰/۹۹۹ = r و ۰/۹۹ = r ادامه یافت تا ۰/۹ = r رسید، بهترین مقدار ۰/۹۹۵= r انتخاب شد؛ زیرا با دمای بالاتر، زمان حل مدل بسیار افزایش پیدا کرد و نتایجی بهتری حاصل نشد و با دمای کمتر، کیفیت جواب‌ها کمتر شد. برای شرط دمای انجماد، مقدار ۰/۰۱ برای شروع مد نظر قرار گرفت و سپس مقادیر ۰/۰۰۱، ۰/۰۰۰۱ تا ۰/۰۰۰۰۰۰۱ امتحان شد که بهترین عدد با توجه به کیفیت جواب‌ها و همگراشدن الگوریتم $۱۰^{-۷}$ انتخاب شد.

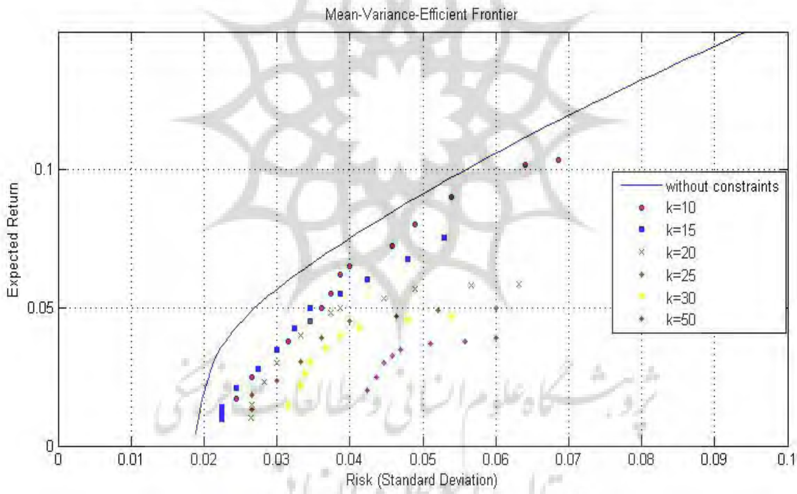
همواره ریسک سبد با افزایش k یا میزان تنوع در سبد، کاهش پیدا نمی‌کند؛ زیرا با افزایش تنوع، ممکن است ابتدا ریسک سبد کاهش پیدا کند، اما در ادامهٔ این کار، ریسک سبد افزایش پیدا خواهد کرد و درنتیجه سرمایه‌گذار می‌تواند با انتخاب وزن مناسبی از سهام در سبدهای

کوچک‌تر در ازای بازده مورد انتظار، ریسک کمتری را تحمل کند. به‌علاوه هزینه‌های مدیریتی چنین سبدی به مراتب کمتر از سبدهای بسیار متنوع است.

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

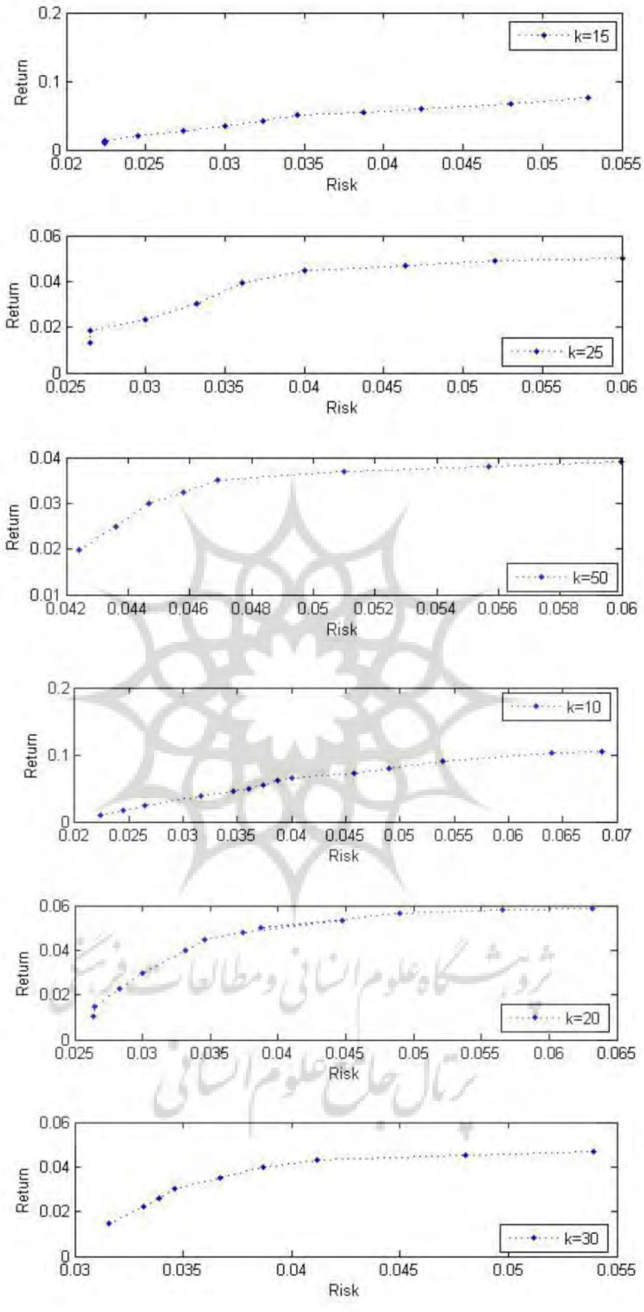
مهم‌ترین نتایج این پژوهش به شرح زیر آمده است:

۱. بر اساس بررسی خروجی‌های الگوریتم و مقایسهٔ آن با سایر مطالعات مشابه، الگوریتم تبرید شبیه‌سازی‌شده در بهینه‌سازی سبد با توجه به اعمال محدودیت‌های مد نظر موفق بوده است. در حالتی که محدودیت‌ها به‌صورت خرده‌الگوریتم به الگوریتم اصلی وارد شوند، سرعت همگرایی و رسیدن به جواب بسیار بیشتر می‌شود. مطابق شکل ۴ با اعمال محدودیت‌ها، منحنی مرز کارا از حالت قبلی خود فاصله می‌گیرد و به سمت راست نمودار حرکت می‌کند و میزان تحدب آن بیشتر می‌شود.



شکل ٤. روند جابه‌جایی منحنی مرز کارا با افزایش محدودیت‌ها

۲. بر اساس خروجی‌های به‌دست‌آمده که در شکل ۵ نیز نمایش داده شده است، با افزایش مقدار k منحنی مرز کارا از منحنی استاندارد فاصله می‌گیرد و به سمت راست نمودار متمایل می‌شود، میزان تحدب آن بیشتر می‌شود و زمان حل مسئله با بیشترشدن مقدار k، افزایش پیدا می‌کند. محدودهٔ جواب‌های شدنی یا به تعبیری، محدودهٔ بازده مطلوب مورد انتظار سرمایه‌گذاران کاهش می‌یابد و در نتیجه سرمایه‌گذاران نمی‌توانند بازده‌های بیشتری را انتظار داشته باشند.



شکل ۵. نمودار مرز کارای پرتفوهای مقید ۱۰ تا ۵۰ سهمی

۳. همچنین بر اساس نتایج به‌دست‌آمده از خروجی‌ها، هرچه محدودیت‌های مدل کمتر باشد و به مدل اجازه داده شود که جواب‌های شدنی بیشتری تولید کند، مرز کارای به‌دست‌آمده به مرز کارای استاندارد نزدیک‌تر خواهد شد. همچنین نتایج نشان می‌دهد چنانچه سرمایه‌گذاران به کسب بازده‌ای با حداقل ریسک تمایل داشته باشند، باید محدودیت‌های سرمایه‌گذاریشان را در بخش‌هایی تعدیل کنند.

۴. بر اساس نتایج به‌دست‌آمده و بررسی و مطالعات انجام‌گرفته، الگوریتم SA در حل مسائل بزرگ نسبت به سایر روش‌ها از موفقیت بیشتری برخوردار است. از مقایسهٔ نتایج مدل پژوهش با سایر مطالعات مشابه، نتایج زیر به‌دست آمده است:

پژوهشگرانی همچون چانگ (۲۰۰۰ و ۲۰۰۹)، اوریهاکی (۲۰۱۱)، راعی (۱۳۸۹)، گیوانگ (۲۰۱۱) و الهی (۱۳۹۲) از روش‌های فراابتکاری برای بهینه‌سازی سبد استفاده کردند و نتایج به‌دست‌آمده از مدل پژوهش آنها نشان می‌دهد عملکرد زمانی الگوریتم این پژوهش در مقایسه با روش آنها بسیار بهتر بوده است (جدول ۱).

جدول ۱. مقایسهٔ عملکرد زمانی الگوریتم پژوهش حاضر با سایر مطالعات مشابه

SA	HSU	PSO	TS	GA	تعداد سهام	زمان (ثانیه)*
۷۹	-	–	۷۴	۱۷۲	۳۱ سهمی Hang Seng	چانگ و همکاران (۲۰۰۰)
–	-	–	–	۳۰۰	۳۱ سهمی Hang Seng	چانگ و همکاران (۲۰۰۹)
۹۹	-	–	۸۵	۷۶	۳۱ سهمی Hang Seng	اوریاخی و همکاران (۲۰۱۱)
–	-	۴/۹	–	–	۳۱ سهمی Hang Seng	گانگ فنگ (۲۰۱۲)
–	-	۱۸	–	–	۲۰ سهمی	راعی و علی بیکی
-	۵/۴۶	-	-	-	۳۱ Hang Seng سهمی	الهی، یوسفی و زارع
۲/۵–۵		–	–	–	۱۰ تا ۵۰ سهمی	قدوسی، تهرانی و بشیری**

* البته باید سخت‌افزارهای به‌کاربرده‌شده در هریک از مطالعات نیز مد نظر قرار گیرد.

** مشخصات سخت‌افزاری که در این پژوهش از آن استفاده شده است: CORE i3 CPU ۲/۱۳ گیگاهرتز با ۳ گیگا بایت ram.

References

Abdul Ali Zadeh Shahir, S. & Eshghi, K. (2003). Application of genetic algorithms to select assets in the stock exchange. *Journal of Economic Research*, (17): 175-192. (*in Persian*)

Anagnostopoulos, K.P., Mamanis, G. (2010). A portfolio optimization model with three objectives and discrete variables. *Computers & Operations Research,* 37 (7): 1285-1297.

Bashiri M. & Karimi, H. (2010). *Application of heuristic and meta-heuristic algorithm for designing industrial systems*. Tehran: Shahed University. (*in Persian*)

Bertsimas, D., Shioda, R. (2009). Algorithm for cardinality-constrained quadratic optimization. *Computational Optimization and Applications* (43): 1–22.

Cerny, V. (1985). A thermodynamically approach to the traveling salesman problem: An efficient simulation algorithm. *Journal of Optimization Theory and Application*, (45): 41-45.

Chang, T.J., Meade, N., Beasley, J.E., Sharaiha, Y.M., (2000). Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation. *Computers & Operations Research,* (27): 1271–1302.

Chang, T.J., Yang, S.C., Chang, K.J. (2009). Portfolio optimization problems in different risk measures using genetic algorithm. *Expert Systems with Applications,* (36): 10529–10537.

Crama, Y., Schyns, M. (2003). Simulated annealing for complex portfolio selection problems. *European Journal of Operational Research,* (150): 546-571.

Deng, G.F., Lin, W.T. & Lo, Ch.Ch. (2012). Markowitz-based portfolio selection with cardinality constraints using improved particle swarm optimization. *Expert Systems with Applications,* 39 (4): 4558-4566.

Elahi, M., Yousefi, Zare Mehrjerdi, Y. (2014). Portfolio optimization with mean-variance approach using hunting search meta-heuristic algorithm*. Financial Research,* 16 (1): 37-56. (*in Persian*)

Eslami Bidgoli, GH., Vafi Sani, J., Bajelan, M. (2009). Portfolio Optimization and Examination of the Effect of Diversification on Its Performance through Using Ant Colony Algorithm. *Quarterly Journal of Securities Exchange,* 2 (5): 57-75. (*in Persian*)

Fernandez, A., Gomez, S. (2007). Portfolio selection using neural networks. *Computers & Operations Research*, (34): 1177–1191.

Gulpinar, N., An, L.T.H., Moeini, M. (2010). Robust investment strategies with discrete asset choice constraints using DC programming. *Optimization*, (59): 45-62.

Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D. & Vecchi, M. P. (1983). Optimization by simulated annealing. *Science*, (220): 671-680.

Maringer, D. (2005). *Portfolio Management with Heuristic Optimization*. Germany: Graw-Hill. Published by Springer.

Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance*, (7): 77-91.

Markowitz, H.M. (1956). The optimization of a quadratic function subject to linear constraints. *Naval Research Logistics Quarterly*, (3): 111–133.

Modares, SA. & Estakhri Nazanin, M. (2007). Selecting a portfolio from listed companies in Tehran Stock Exchange by using Optimized Genetic Algorithm. *Journal of Development and Investment*, 1(1): 71-92. (*in Persian*)

Moral-Escudero, R., Ruiz-Torrubiano, R., Suarez, A. (2006). Selection of optimal investment portfolios with cardinality constraints. In: Proceedings of the 2006 IEEE Congress on Evolutionary Computation, 2382–2388. DOI: 10.1109/CEC.2006.1688603.

Raei, R. & Alibeiki, H. (2010). Portfolio optimization using particle swarm optimization method. *Financial Research*, 12 (29): 21-40. (*in Persian*)

Raei, R., Mohammadi, S., Alibeiki, H. (2011). Mean-Semivariance Portfolio Optimization Using Harmony Search Method. *Management Research in Iran*, 15 (3): 105-128. (*in Persian*)

Shaw, D.X., Liu, S. & Kopman, L. (2008). Lagrangian relaxation procedure for cardinality-constrained portfolio optimization. *Optimization Methods & Software*, (23): 411-420.

Soleimani, H., Golmakani, H.R., Salimi, M.H. (2009). Markowitz-based portfolio selection with minimum transaction lots, cardinality constraints and regarding sector capitalization using genetic algorithm. *Expert Systems with Applications*, (36): 5058-5063.

Taqavifard, M., Mansouri, T. & Khosh-Tinat, M. (2007). A Meta-heuristic Algorithm for Portfolio Selection Problem under Cardinality and Bounding Constraints. *The Economic Research*, 7 (4): 49-69. (*in Persian*)

Vielma, J.P., Ahmed, S., Nemhauser, G.L. (2008). A lifted linear programming branchand-bound algorithm for mixed-integer conic quadratic programs. *INFORMS Journal on Computing*, (20): 438-450.

Woodside-Oriakhi, M., Lucas, C. & Beasley, J.E. (2011). Heuristic algorithms for the cardinality constrained efficient frontier. *European Journal of Operational Research*, 213 (3): 538-550.

Zhu, H., Wang, Y., Wang, K., Chen, Y. (2011). Particle Swarm Optimization (PSO) for the constrained portfolio optimization problem. *Expert Systems with Applications* 38 (8): 10161–10169.