*Research in Logic*, **Institute for Humanities and Cultural Studies (IHCS)**
**Biannual Journal, Vol. 12, No. 1, Spring and Summer 2021, 59-99**
**Doi: 10.30465/lsj.2021.36264.1359**

# On many-valued logics

**Seyed Mohammad Amin Khatami*** 
**Esfandiar Eslami****

## Abstract

In the early 19th century, the "principle of bivalence" of the Aristotelian logic was challenged. Of course, Aristotle himself was questioned the applicability of this principle to propositions concerning future contingents, and he answered it via something like as modalities of possibility. However, Aristotle did not abandon the principle and it has not received much attention till the Renaissance. From Renaissance to the early 19th century, some philosophical considerations to this issue were developed. Rejecting the principle of bivalence implies alternative accounts of various kinds of logics such as many-valued logics in the context of logic. In this article, we first survey the development of many-valued logics by reviewing motivational ideas behind many-valued logics together with examining the aims and scopes of some of these logics. Then, we devote the rest of the paper to study various aspects of "truth value sets" and "interpretation of logical connectives" in many-valued logics to obtain a more comprehensive view on these logics.

**Keywords:** many-valued logic, fuzzy logic, principle of bivalence, principle of excluded middle, law of non-contradiction.

* Assistant Professor of Mathematical Logic, Department of Computer Science, Birjand University of Technology, Birjand, Iran (Corresponding Author), khatami@birjandut.ac.ir

** Professor of Mathematical Logic, Department of Pure Mathematics, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran, esfandiar.eslami@uk.ac.ir

Date received: 20/05/2021, Date of acceptance: 18/08/2021

*منطق‌پژوهی*، پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
دوفصل‌نامهٔ علمی (مقالهٔ علمی ـ مروری)، سال دوازدهم، شمارهٔ اول، بهار و تابستان ۱۴۰۰، ۶۱ – ۹۹

# تأملی بر منطق‌های چند ارزشی گزاره‌ای

**سید محمدامین خاتمی***

**اسفندیار اسلامی****

## چکیده

در اوایل قرن بیستم، ایده‌هایی مبنی بر تخطی از «اصل دو ارزشی» منطق ارسطویی شکل گرفت. البته خود ارسطو نیز با اشاره به مسئله صدق یا کذب جملاتی که در مورد آینده اطلاعی می‌دهند، به این موضوع که بعضی جملات نه ارزش «راست» و نه ارزش «دروغ» دارند اشاره کرده بود. اما این مسئله تقریباً تا دوره رنسانس بطور کلی فراموش شد و از دوره رنسانس تا اوایل قرن بیستم، بعضی مبانی فلسفی برای آن بیان شد. تخطی از «اصل دو ارزشی» پای منطق‌های مختلفی از جمله منطق‌های چندارزشی را به حوزه منطق باز کرد. در این مقاله، پس از مرور مختصر سیر تکاملی ایده‌های مربوط به منطق‌های چند ارزشی در قرن بیستم و بررسی اهدافی که بعضاً این منطق ها بدنبال آن هستند، با مداقه روی مجموعه ارزش‌های درستی و عملگرهای مختلفی که نقش تعابیر رابط های منطقی را بازی می‌کنند، سعی می‌کنیم دید جامع‌تری نسبت به منطق‌های چند ارزشی کسب کنیم.

**کلیدواژه‌ها:** منطق چندارزشی، منطق فازی، اصل دوارزشی، اصل طرد شق ثالث، اصل امتناع تناقض.



* استادیار، منطق ریاضی، گروه علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی بیرجند، بیرجند، ایران (نویسندهٔ مسئول)،
khatami@birjandut.ac.ir

** استاد تمام، منطق ریاضی، بخش ریاضی محض، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران،
esfandiar.eslami@uk.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۲/۳۰، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۵/۲۷

## ۱. مقدمه

علم منطق به نوعی علمِ مطالعه گزاره‌ها و تشخیص صحتِ یک گـزاره از روی مجموعـه‌ای از گزاره‌ها بر اساس قوانین و قواعد استنتاج است. برداشت‌های مختلف افراد از یـک گـزاره در زبان روزمره، در نگاه اول ممکن اسـت بیـانگر روش‌هـای مختلـف و متفـاوت افـراد در استنتاج کردن باشد، اما حقیقتِ امر این است که گزاره‌های اولیه‌ی صادقی که افـراد مختلـف موقع استنتاج در اختیار دارند، باعثِ اصلی برداشت‌های مختلف از یک گزاره خـاص اسـت، و روش‌های افرادِ مختلف در امرِ تفکر و استنتاج تا حدودی یکسان است.

در دوران معاصر و بخصوص بعد از انقلاب صنعتی، علم منطق علاوه بر روشن سـاختن قوانین و قواعد استنتاج، افق‌های گسترده‌ای را در ارتبـاط ماشـین و انسـان و یـا بـه عبـارت امروز در مـورد «هـوش مصـنوعی» پـیش روی بشـر گذاشـته اسـت. روش‌هـای مختلـفِ رویکردهای علمی، رویکردهای مختلف حل مسئله، تنـوع بسـیار گسـترده الهامـاتِ بشـر از رویدادهای طبیعت برای حل مسائل، شاخه‌های مختلفِ علم، و ... منجر به پیدایش رده‌هـای گسترده و بسیار متنوعی از منطق‌ها شده است. در عین اینکه به نظر می‌رسد یکـی از اهـداف تمام منطق‌های مورد مطالعه، تلاش برای ماشینی کردن زبان و روش تفکرِ انسـان اسـت، امـا به نظر نمی‌رسد هیچ منطقی، توانایی مدل‌سازی تمامِ زبان روزمـره انسـان‌هـا و روش تفکـر آن‌ها را داشته باشد.

توسعه منطق تا قرن بیستم، چه از دید ریاضی و چه از نگاه فلسفی با ایـن عقیـده همـراه بوده است که ارزش هر گزاره یا راست است و یا دروغ است و نه هـر دو. ایـن موضـوع را در منطق به اصل «دو ارزشی بـودن» (principle of bivalence) مـی‌شناسـند و البتـه بـا اصـل «طـرد شـق ثالـث» (principle of excluded middle) فـرق دارد. اصـل طـرد شـق ثالـث سومین اصل از اصول سه‌گانه تفکـر (laws of thought)، کـه افلاطـون و شـاگردش ارسـطو آن‌ها را بیان کرده‌اند، می‌باشد. صورت‌بندی منطقی این اصول که تـا حـدودی نشـان دهنـده روش تفکر و استنتاجِ یکسانِ اکثریت انسان‌ها است، به این شکل است:

۱. اصل این‌همانی (law of identity): «هر چیزی برابر خودش است»،

۲. اصـل امتنـاع تنـاقض (principle of non-contradiction): «گـزاره‌هـای متنـاقض در آن واحد با همدیگر ارزشِ راست ندارند»،

۳. اصل طرد شق ثالث: «از هر دو گزاره متنـاقض، یکـی راسـت و یکـی دروغ اسـت و شق ثالثی متصور نیست».

ارسطو در مثالی که به «پارادکس جنگ دریایی» (paradox of the sea battle) مشهور است با اشاره به پیش‌بینیِ رخ دادن یک جنگ دریایی، اشاره می‌کند که صدق یا کذبِ جمله «رخ دادن جنگ دریایی در آینده‌ای مشخص مثل فردا»، منجر به تناقض می‌شود. لذا جملاتی که در مورد اخبار آینده اطلاع می‌دهند، نه ارزش «راست» و نه ارزش «دروغ» دارند (McKeon, 1941: 40-61).

اما تا قرن پانزدهم میلادی، و البته شاید به دلیل اینکه در کتب الهی جملاتی بودند که اخباری از آینده می‌دادند، نه فلاسفه اسلامی (مثل فارابی و ابن‌سینا) و نه فلاسفه مسیحی (مثل آکویناس) به این موضوع نپرداختند. بالاخره در اواسط دوره رنسانس ابتدا اوکهام (William of Ockham)، فیلسوف شهیر انگلیسی در قرن ۱۴ (Boehner, 1945: 58-69) و سپس ریوو (Peter de Rivo) یکی از اساتید دانشگاه لوونِ بلژیک در قرن ۱۵ مجدداً به این مسئله پرداختند (Baudry, 1989). این مسئله تا اوایل قرنِ بیستم، ولی بیشتر با مباحث فلسفی، توسط افرادی همچون لاک (John Locke)، لایبنیتز(Gottfried Wilhelm Leibniz)، دمورگان (Augustus De Morgan) و مینُنگ(Alexius Meinong) نیز مورد بحث و بررسی قرار گرفت.

در اوایل قرن بیستم و بعد از انقلاب صنعتی و ظهور ماشین‌ها، اولین انگاره‌های منسجم منطقیِ تخطی از «اصل دو ارزشی بودن» شکل گرفتند. سه منطق‌دان اسکاتلندی، آمریکایی و روسی به نام‌های مک‌کال (Hugh MacColl)، پیرس (Charles Sanders Peirce) و واسیلف (Nikolai A. Vasil'ev) در سال‌های ۱۸۹۸، ۱۹۰۹ و ۱۹۱۲ به طور جداگانه اولین ایده‌ها را در این زمینه منتشر کردند. مک‌کال منطق گزاره‌ای را طراحی کرده بود که گزاره‌ها می‌توانستند مقادیر دیگری علاوه بر مقادیر راست و دروغ داشته باشند و البته او سه ارزش وجهی "حتمی"، "غیرممکن" و "متغیری" را نیز برای گزاره‌هایی مثل $2 = 2$ ، $2 = 3$ و $x = 2$ قائل شده بود (MacColl, 1906). پیرس با توجه به مسئله ارسطو در مورد تعیین ارزش برای حوادث آینده (problem of future contingents)، قائل به یک ارزشِ درستی خنثی علاوه بر ارزش‌های راست و دروغ شده بود (Hartshorne and Weiss, 1933, 248–262). واسیلف استاد دانشگاه کازان روسیه بود و شاید بتوان گفت با الهام از لباچفسکی که او هم از اساتید کازان بود، منطقی به نام منطق موهومی ابداع کرد و ایده اصلی‌اش این بود که به موازات جهان ما که با منطق ارسطویی قابل توصیف است، جهان‌های دیگری هم هستند که منطق ارسطویی قادر به توصیفشان نیست. بخصوص او بر روی یک منطق

سه ارزشی کار کرد که در آن اصل امتناع تناقض و اصل طرد شق ثالث برقرار نبودند (Venanzio and Vergauwen, 1997).

شروع واقعی دوره منطق‌های چند ارزشی را باید سال ۱۹۲۰ دانست که در آن دو مقاله پیشگام و بطور کاملاً مستقل توسط جان لوکاسیویچ (Jan Lukasiewicz) و امیل پُست (Emil L. Post) در مورد دو سیستم منطقی از منطق‌های چند ارزشی منتشر شد.

در ابتدای متن، سیر تکاملی منطق‌های چند ارزشی را با معرفی منطق‌هایی که تا سال ۱۹۶۵ ابداع شدند، بیان می‌کنیم. سپس به بررسیِ تحلیلیِ برخی از خواص مجموعه ارزش‌های درستی و رابط‌های منطقی در منطق‌های چند ارزشی می‌پردازیم. سعی کرده‌ایم بیش‌تر دلایلی که منجر به انتخاب یک مجموعه ارزشِ درستی و یا منجر به انتخاب یک تعبیر خاص برای یک رابط منطقی می‌شوند را بررسی کنیم. در راستای مداقه روی مجموعه ارزش‌های درستی و عملگرهای مختلفی که نقش تعابیر رابط‌های منطقی را بازی می‌کنند، منطق‌های چند ارزشیِ مبتنی بر نرم مثلثی را نیز معرفی می‌کنیم.

تصاویر مربوط به جدول ارزشِ رابط‌های منطقیِ دو موضعی در منطق‌های بی‌نهایت ارزشی، معمولاً به صورت سه بعدی ترسیم می‌شوند. ما این تصاویر را با تکیه بر تغییر رنگ نقاط به شکل دو بعدی ترسیم کرده‌ایم. این تصاویر، تعبیرِ رابط‌های منطقی را نسبت به تصاویر سه‌بعدی، بهتر نشان می‌دهند. بعلاوه برخی از خواصِ توابعِ درستیِ رابط‌های منطقی مانند پیوستگیِ آنها را نیز خیلی خوب نمایش می‌دهند.

## ۲. سیستم منطقی لوکاسیویچ

لوکاسیویچ در سال ۱۹۲۰ با انتشار یک کار فلسفی (Łukasiewicz, 1920 و Borkowski, 1970: 87-88)، منطق چند ارزشی را به عنوان سلاحی برای مقابله با استدلال‌های مؤید جبرگرایی معرفی کرد. وی در سخنرانی‌ای که در سال ۱۹۱۸ برای معرفی منطق سه ارزشی‌اش ارائه کرد می‌گوید

> من اعلام می‌کنم که قصد به راه انداختن یک جنگ معنوی علیه جبرهایی را دارم که فعالیت‌های خلاق بشر را محدود می‌کنند. این جبرها بیشتر بر دو نوع فیزیکی ... و منطقی ... استوار هستند...بعضی از این جبرهای منطقی به اصول تفکر ارسطویی برمی‌گردند (Borkowski, 1970: 84-86).

لوکاسیویچ و همکارانش در طول یک دهه نوعی خاص از منطق‌های چند ارزشی که امروزه به منطق‌های لوکاسیویچ مشهور هستند را در حالت‌های سه ارزشی، $n$–ارزشی ($n > 3$) و بی‌نهایت ارزشی توسعه دادند.

لوکاسیویچ در مدرسه منطق لووف–ورشو تحصیل کرده بود و سپس به مقام استادی گروه فلسفه دانشگاه ورشو رسید، و لذا در اصل بدلیل علقه‌های فلسفی‌اش بخصوص در مخالفت با جبرگرایی، منطق سه ارزشی خودش را ابداع می‌کند. جبرگرایی در اینجا به این معنی است که «اگر A در لحظه t، b باشد آنگاه در هر زمانِ قبل از t نیز این گزاره که A در لحظه t، b است راست است». به عقیده او هر کسی که این اعتقاد را بپذیرد، نمی‌تواند با آینده متفاوتِ از گذشته رفتار کند و دیگر چیزی برای انجام دادن وجود ندارد. او سپس در مورد یک ارزش درستیِ سوم بحث می‌کند که می‌توان آن را به گزاره‌های در مورد وقایع آینده اختصاص داد و جبرگرایی در این منطق سه ارزشی دیگر رخ نمی‌دهد (Borkowski, 1970: 113-114).

منطق لوکاسیویچِ سه ارزشی که توسط خود لوکاسیویچ معرفی شد، مبتنی بر یک مجموعه درستیِ سه ارزشی بود. در واقع لوکاسیویچ علاوه بر ارزش‌های «راست» و «دروغ»، یک ارزش «ممکن» را نیز برای گزاره‌هایی که در زمان آینده هستند و ارزش درستی آنها هنوز معلوم نیست، در نظر گرفت. در عین حال شبیه منطق کلاسیک سعی کرد که منطقش را بر مبنای دو رابط منطقی نقیض و استلزام پایه‌ریزی کند.

لوکاسیویچ علی‌رغم حمله‌اش به منطق ارسطویی، مشابه منطق کلاسیک برای تعابیر رابط‌های منطقی قائل به این بود که تعابیر رابط‌های منطقی کاملاً مشخص باشند. یعنی به ازای هر رابط منطقیِ مثلاً دوموضعیِ *، اولاً ارزش گزاره مرکب $A * B$ از روی ارزش $A$ و $B$ و با توجه به تعبیر * مشخص باشد، و ثانیاً با معلوم بودنِ ارزش $A * B$، چنان‌چه به جای $A$ و $B$ دو گزاره دیگر و هم‌ارزش با خود $A$ و $B$ قرار دهیم، ارزش گزاره جدید با ارزش $A * B$ برابر باشد. شاید بتوان گفت دلیل لوکاسیویچ برای این دو فرض اخیر، این بود که معنی‌شناسی منطق چند ارزشی شبیه حساب احتمالات نشود. زیرا در حساب احتمالات، تابع احتمال نقشی شبیه تابع ارزش در منطق چند ارزشی دارد، ولی مقدار تابع احتمال در مورد بعضی از عملگرها مثل اجتماع به صورت دقیق مشخص نیست، درحالی‌که لوکاسیویچ فرض کرد مقدار تابع ارزش تحت هر عملگر کاملاً معلوم باشد.

او برای تعبیر نقیض، شبیه منطق کلاسیک سعی داشت که قاعده نقیض مضاعف (double negation) شبیه منطق کلاسیک برقرار باشد و لذا تعبیر آن را به صورت زیر درنظر گرفت:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\varphi$ | T | I | F |
| $\neg\varphi$ | F | I | T |

**شکل ۱. تعبیر رابط منطقی نقیض**

نمادهای ذکر شده در شکل ۱ عبارتند از: «T» برای راست، «F» برای دروغ، و «I» برای ارزش سوم که نه راست و نه دروغ است و در مورد گزاره‌های آینده می‌تواند با «ممکن» تعبیر می‌شود.

در مورد عملگر استلزام، اولاً شبیه عملکرد این عملگر در حالت کلاسیک، فرض کرد جملات شرطی به انتفاء مقدم راست باشند. بعلاوه برای حالتی که مقدم «راست» ولی تالی «ممکن» باشد و نیز برای حالتی که مقدم «ممکن» و تالی «راست» باشد، ارزش گزاره $\varphi \to \psi$ را برابر «ممکن» تعریف کرد. همچنین شبیه منطق کلاسیک برای حالتی که مقدم «راست» و تالی «دروغ» است، ارزش $\varphi \to \psi$ را «دروغ» تعریف نمود. در انتها هم باتوجه‌به این واقعیت که در منطق کلاسیک گزاره $A \to A$ یک همانگو است، برای ارزش $\varphi \to \psi$ به هنگام «ممکن» بودنِ هر دو گزاره $\varphi$ و $\psi$، ارزش «راست» را درنظر گرفت.

| $\varphi \backslash \psi$ | T | I | F |
|---|---|---|---|
| T | T | I | F |
| I | T | T | I |
| F | T | T | T |

**شکل ۲. تعبیر رابط منطقی $\varphi \to \psi$**

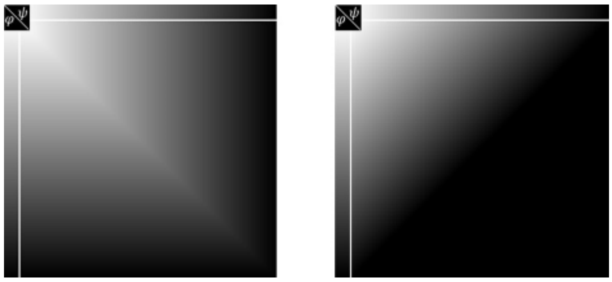
او تعبیرهای سایر رابط‌های منطقی مشهور که در منطق کلاسیک مورد استفاده قرار می‌گیرند را بر اساس این دو رابط منطقی تعریف کرد. اگر با تسامح تعبیر رابط‌های منطقی را با خود آنها نمایش دهیم، تعاریفِ $x \vee y := (x \to y) \to y$ و $\mathrm{x} \wedge \mathrm{y} := \neg(\neg x \vee \neg y)$ و $x \leftrightarrow y := (x \to y) \wedge (y \to x)$ توسط لوکاسویچ بکار رفتند.

گرچه او در اولین کارش از نماد "۲" برای نشان دادن ارزشِ درستی سوم استفاده کرد ولی در ادامه تحقیقاتش از مجموعه ارزش‌های درستی $\mathrm{W}_3 = \{0,1/2,1\}$ برای مجموعه ارزش‌های درستی در حالت سه ارزشی استفاده کرد و بطور کلی در حالت $m$ ارزشی مجموعه $\mathrm{W}_m = \left\{\frac{k}{m-1} : 0 \leq k \leq m-1\right\}$ را به عنوان مجموعه ارزش‌های درستی مورداستفاده قرار داد. در سال ۱۹۳۰ او و تارسکی (Alfred Tarski) حالت بی‌نهایت ارزشی منطق لوکاسیویچ را با در نظر گرفتن دو مجموعه ارزش درستیِ $\mathrm{W}_{\aleph_1} = [0,1]$ و $\mathrm{W}_{\aleph_0} = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ معرفی کردند (Borkowski, 1970: 131-152).

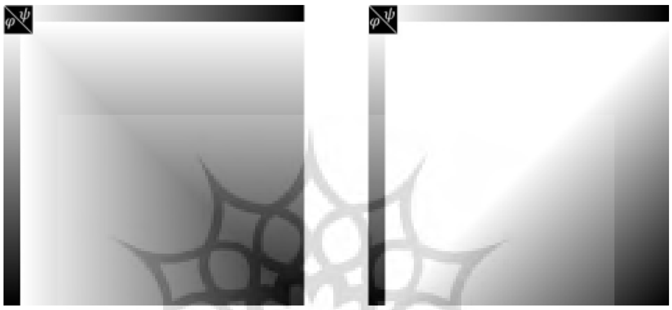
اما در همه منطق‌های لوکاسیویچ مبتنی بر هر مجموعه ارزشی، تعبیر رابط منطقی استلزام و رابط منطقی نقیض به ترتیب $x \to y = \min(1 + y - x, 1)$ و $\neg x = 1 - x$ می‌باشد. و البته این دو رابط منطقی در کنار هم، قادر به ساختن مجموعه گسترده‌ای از رابط‌های منطقی هستند که بعضی از آنها عبارتند از:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **«یا» قوی** | $x \oplus y$ | $:= \neg x \to y$ | $= \min(1, x + y)$ |
| **«و» قوی** | $x \,\&\, y$ | $:= \neg(\neg x \oplus \neg y)$ | $= \max(0, x + y - 1)$ |
| **«یا» ضعیف** | $x \vee y$ | $:= (x \to y) \to y$ | $= \max(x, y)$ |
| **«و» ضعیف** | $x \wedge y$ | $:= x \,\&\, (x \to y)$ | $= \min(x, y)$ |
| **تفاضل** | $x \ominus y$ | $:= x \,\&\neg y$ | $= \max(0, x - y)$ |
| **هم‌ارزی** | $x \leftrightarrow y$ | $:= (x \to y)\&(y \to x)$ | $= 1 - \lvert \mathrm{x} - \mathrm{y} \rvert$ |

تصاویر مربوط به تابع درستی رابط‌های منطقی (به جز رابط نقیض که با روش ترسیم اتخاذ شده، تصویر یک بعدی دارد) را در حالت بی‌نهایت ارزشی در شکل ۳ مشاهده می‌کنید.




**شکل ۱.۳. «و» قوی و «و» ضعیف**




**شکل۲.۳. «یا» قوی و «یا» ضعیف**


**شکل۳.۳. استلزام، تفاضل و هم‌ارزی**

به عنوان مثال، همانطور که مشاهده می‌کنید، وقتی ارزش دو گـزاره $\varphi$ و $\psi$ نزدیـک هـم باشد، ارزش $\varphi \leftrightarrow \psi$ به راست نزدیک‌تر است. لذا ارزش $\varphi \leftrightarrow \psi$ بنوعی تعیین کننده فاصـله بین گزاره‌ها است و وقتی ارزش آن راست‌تر باشد، ارزش دو گزاره $\varphi$ و $\psi$ به هم نزدیک‌تـر بوده است.

فرض کنید $\|\varphi\|_e$ ارزشِ گزاره $\varphi$ تحت تابع ارزش $e$ باشد. لوکاسیویچ درجه راستی گزاره $\varphi$ را به صورت $\{e$ ارزش تابع $:\|\varphi\|_e\} \|\varphi\| = min$ تعریف کرد. او بعد از معرفی منطق ۳ ارزشی‌اش به این نکته پی می‌برد که برخی از همانگوهای منطق کلاسیک در منطق ۳ ارزشی او درجه راستی کمتر از ۱ دارند و با توجه به این موضوع معیاری برای تشخیص استقلالِ همانگوهای منطق کلاسیک توسط منطق چند ارزشی معرفی می‌کند (Łukasiewicz, 1925).

لوکاسیویچ همچنین در حالت ۳ ارزشی، رابط وجهی امکان را نیز تعریف کرده بود (Borkowski, 1970: 153-178). این رابط منطقی یک موضعی را اگر با نماد $\Diamond$ نمایش دهیم، دارای جدول ارزشی به صورت زیر است:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\varphi$ | ۰ | ۰.۵ | ۱ |
| $\Diamond\varphi$ | ۰ | ۱ | ۱ |

که در واقع نشان می‌دهد، $\Diamond\varphi$ برای هر گزاره‌ای که ارزش دروغ ندارد و ممکن است راست باشد، دارای ارزش راست است و برای «دروغ محض» دارای ارزش دروغ است. او به کمک $\Diamond$ گزاره‌هایی مثل «$\varphi$ ممکن است»، «$\varphi$ ضروری است»، «$\varphi$ غیرممکن است» را نیز بیان می‌کند. او بعلاوه نشان می‌دهد هیچ گزاره‌ای که در منطق کلاسیک یک همانگو باشد، نمی‌تواند در منطق معرفی شده ارزشِ دروغ محض را اختیار کند و بنابراین به ازای هر همانگوی $\varphi$ از منطق کلاسیک، $\Diamond\varphi$ یک همانگو است، یعنی همواره دارای ارزش درستیِ «راست محض» است. به عنوان مثال، گرچه $\varphi \vee \neg\varphi$ در منطق ۳ ارزشیِ لوکاسیویچ یک همانگو نمی‌باشد، ولی $\Diamond(\varphi \vee \neg\varphi)$ یک همانگو است. لوکاسیویچ عملکرد رابط $\Diamond$ را با تابعِ درستیِ آن به صورت کامل تعریف می‌کند و این موضوع با نگاه امروزی در منطق وجهی که در آن تابع درستیِ رابط‌های وجهی کاملاً مشخص نیست فرق دارد، ولی باید توجه داشت که معنی‌شناسیِ مدرن کریپکی برای منطق وجهی حدود دهه ۱۹۶۰ معرفی شد.

یکی دیگر از مباحث جالبی که خود لوکاسیویچ شروع کننده آن است، بحث در مورد مجموعه همانگوها است. اگر فرض کنیم $Taut(W)$ مجموعه همانگوهای منطق چند ارزشیِ لوکاسیویچ با مجموعه ارزش‌های درستیِ W است و بعلاوه $Taut(\mathrm{W}_2)$ را مجموعه همانگوهای منطق کلاسیک فرض کنیم، او نشان می‌دهد اگر $n-1$ مقسوم‌علیه $m-1$ باشد، آنگاه $Taut(\mathrm{W}_m) \subseteq Taut(\mathrm{W}_n)$. بعلاوه برای حالت بی‌نهایت ارزشی

نشان می‌دهد $Taut(W_{\aleph_0}) = \cap_{n=2}^{\infty} Taut(W_n)$. اکثر نتایج مرتبط با این مبحث نیز در گزارش سال ۱۹۳۰ او و تارسکی آمده‌اند (Borkowski, 1970: 131-152). این بحث در منطق لوکاسیویچ بعداً بخصوص توسط تارسکی، لیندنبام (Adolf Lindenbaum)، و رز (Alan Rose) پیگیری شد. مثلاً لیندنبام نشان می‌دهد اگر $\varphi \notin Taut(W_3)$ آنگاه یا $Taut(W_3) \cup \{\varphi\}$ ناسازگار است و یا معادل $Taut(W_2)$ است که تارسکی در همان دهه ۱۹۳۰ و بعداً رز در دهه ۱۹۵۰ این نتیجه را تعمیم می‌دهند.

یکی دیگر از مباحث مهم برای هر منطقی، اصل موضوعی کردن آن می‌باشد. در مورد منطقِ لوکاسیویچِ ۳ ارزشی، وایسبرگ (Mordchaj Wajsberg) در سال ۱۹۳۱ یک سیستم اصل موضوعی شامل ۴ اصل موضوع به همراه قاعده وضع مقدم و قاعده جانشانی باتوجه‌به مفهومِ رایج اثبات معرفی کرد (Wajsberg, 1931). این اصول موضوعه عبارتند از:

| | |
|---|---|
| ۱) | $\varphi \to (\psi \to \varphi)$ |
| ۲) | $(\varphi \to \psi) \to [(\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)]$ |
| ۳) | $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$ |
| ۴) | $[(\varphi \to \neg\varphi) \to \varphi] \to \varphi$ |

وایسبرگ نشان داد یک فرمول در دستگاه اثباتِ مبتنی بر اصول موضوعه فوق قابل‌اثبات است اگر و فقط اگر متعلق به $Taut(Ł_3)$ باشد. بعداً لیندنبام این حکم را برای منطق لوکاسیویچِ متناهی ارزشی نیز با همین سیستم اصل موضوعی ثابت کرد. در دهه ۱۹۵۰ میلادی کارهای رز و روسر(J.Barkly Rosser) منجر به معرفی یک سیستم اصل موضوعی کامل برای منطق لوکاسیویچ گزاره‌ای بینهایت ارزشی شد. این سیستم اصل موضوعی شامل قاعده وضع مقدم و قاعده جانشانی و اصول ۱–۳ بالا به همراه دو اصل موضوع زیر بود (Rose, Rosser, 1958).

| | |
|---|---|
| ۴) | $[(\varphi \to \psi) \to \psi] \to [(\psi \to \varphi) \to \varphi]$ |
| ۵) | $[(\varphi \to \psi) \to (\psi \to \varphi)] \to (\psi \to \varphi)$ |

در همان سال مِردیت (Carew A. Meredith) و نیز چنگ (Chen Chung Chang) نشان می‌دهند که اصل (۵) از روی بقیه اصول قابل اثبات و لذا قابل حذف است (Meredith, 1958 و Chang, 1958). در عین حال ایده‌های چنگ کاملاً متفاوت از مردیت، رز، و روسر بود. چنگ با الهام گرفتن از اثبات قضیه تمامیت در منطق کلاسیک به کمک جبرهای بول (Stone, 1936)، نوعی جبر برای منطق لوکاسیویچ به نام MV–جبر ابداع کرد

که بعداً این ایده‌اش در اصل‌بندی منطق‌های چند ارزشیِ دیگر نیز به شکل فراوان مورداستفاده قرار گرفت. تحقیقات روسر روی حساب محمولاتِ منطق لوکاسیویچ، در سال ۱۹۶۳ منجر به اثبات قضیه تمامیت برای منطق لوکاسیویچِ مرتبه اول و ادامه این تحقیقات در سال ۱۹۶۶ منجر به معرفی منطق پیوسته توسط چنگ و کیسلر (Jerome Keisler) شد (Chang, Keisler, 1966). سیر تکاملِ منطق پیوسته را می‌توانید در (خاتمی، پورمهدیان، ۱۳۸۸) ببینید.

شاید بتوان در کنار ایده ناب لوکاسیویچ برای منطق چندارزشی‌اش، یکی از دلایل استقبال از منطق لوکاسیویچ و تحقیقات فراوان حول آن را به مدرسه منطق ورشو نسبت داد که خود لوکاسیویچ هم بنوعی از پیشکسوتان این مدرسه بود. با اندکی کنکاش در مسیر توسعه منطق لوکاسیویچ می‌بینیم اکثر افرادی که تا دهه ۱۹۶۰ روی منطق لوکاسیویچ و توسعه آن کار می‌کردند بنوعی به این مرکز تحقیقاتی موثر در حوزه منطق مرتبط هستند.

## ۳. سیستم منطقی پُست

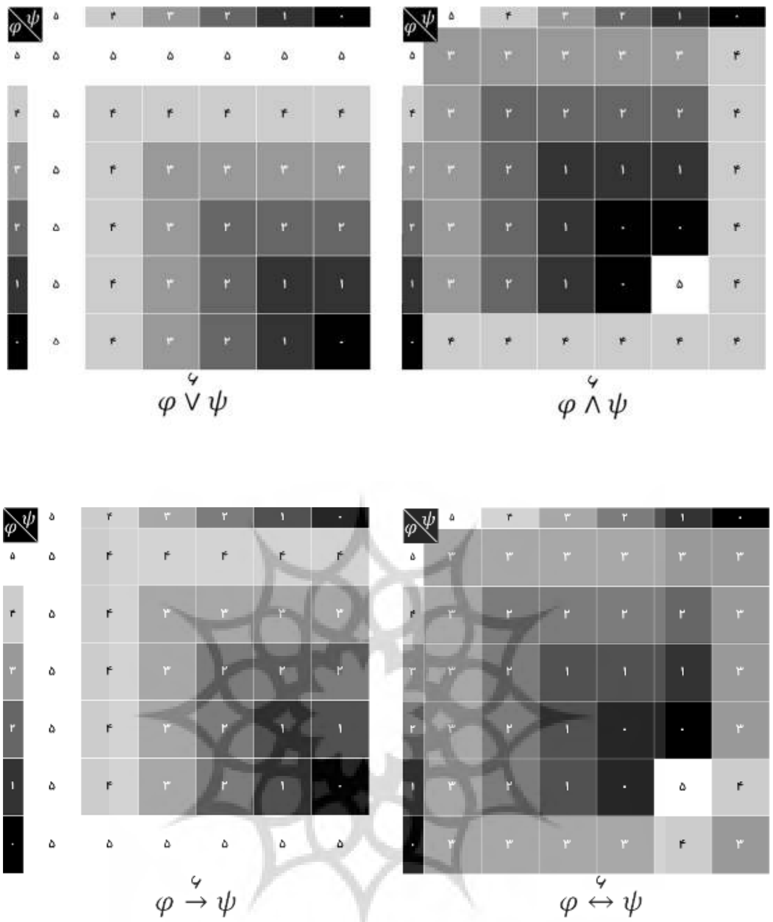
امیل پُست در سال ۱۹۲۱ و همزمان با لوکاسیویچ، یک سیستم منطقی $m$ ارزشی را با مجموعه ارزش‌های درستیِ $\{0,1,2,\dots,m-1\}$ معرفی کرد که مبتنی بر دو رابط منطقی پایه‌ای $\overset{m}{\neg}$ و $\overset{m}{\vee}$ با توابعِ درستی زیر بود (Post, 1921):

$$\overset{m}{\neg}x = \begin{cases} x-1 & x>0 \\ m-1 & x=0 \end{cases} \quad ، \quad x \overset{m}{\vee} y = max\,(x,y).$$

در اینجا $m-1$ راست محض و $0$ دروغِ محض است. توجه دارید $\overset{m}{\neg}x$ به صورت انتقالِ هر ارزشِ درستی به ارزشِ درستی کوچکتر از خودش به شکل دوری است. سایر رابطهای منطقی معمول در منطق کلاسیک را نیز در اینجا پُست به صورت زیر تعریف کرد:

| | | |
|---|---|---|
| $x \overset{m}{\wedge} y$ | $:= \overset{m}{\neg}(\overset{m}{\neg}x \overset{m}{\vee} \overset{m}{\neg}y)$ | |
| $x \overset{m}{\rightarrow} y$ | $:= \overset{m}{\neg}x \overset{m}{\vee} y$ | |
| $x \overset{m}{\leftrightarrow} y$ | $:= \left(x \overset{m}{\rightarrow} y\right) \overset{m}{\wedge} (y \overset{m}{\rightarrow} x)$ | |

در حالت دو ارزشیِ منطق پُست، تعبیر رابطهای منطقی مثل منطق کلاسیک است. اما در حالت چند ارزشی، توابع درستی رابطهای منطقی، ممکن است انتظارِ برخی افراد را از رابطهای منطقی برآورده نکنند. به عنوان مثال همانطور که شکل ۵ نشان می‌دهد در منطق ۶ ارزشی پُست، ترکیب عطفی دو مقدار تقریباً دروغِ 1 برابر مقدار راستِ 5 شده است.




**شکل ۴. منطق پُست ۶ ارزشی**



هم‌چنین می‌بینید در عین اینکه $x \overset{6}{\leftrightarrow} y = y \overset{6}{\leftrightarrow} x$ ولی با توجه به شکل ۵ در بعضی جاها که دو گزاره $\varphi$ و $\psi$ دارای یک ارزش درستی هستند، ارزشِ $\overset{6}{\leftrightarrow}$ راست و یا حتی نزدیک به راست نیست، مثلاً $3 \overset{6}{\leftrightarrow} 3 = 1$ که اصلاً به «راستِ محض» که ۵ می‌باشد نزدیک نیست و یا $2 \overset{6}{\leftrightarrow} 2$ بجای اینکه «راست محض» باشد «دروغ محض» است.

پُست البته نشان داد که هر تابعِ $f:\{0,1,\dots,m-1\}^n \to \{0,1,\dots,m-1\}$ توسط توابع درستی دو رابط منطقی $\overset{m}{\neg}$ و $\overset{m}{\vee}$ قابل تولید است، و لذا توابع درستی مناسب برای هر رابط منطقی قابل تصوری، در منطق وی وجود دارند. به عبارت دیگر مشابه آنچه در منطق کلاسیک اتفاق می‌افتد، مجموعه رابط‌های منطقی $\{\overset{m}{\neg}, \overset{m}{\vee}\}$ یک مجموعه کارساز از رابط‌های

منطقی است. لذا گرچه $\overset{m}{\wedge}$ و $\overset{m}{\rightarrow}$ و $\overset{m}{\leftrightarrow}$ بعضی از تعابیر مورد انتظارِ منطقیون را ندارنـد، ولـی قطعاً برای ∧ و → و ↔ تعابیر مناسبی بـر حسـب دو رابـط منطقـی پایـه وجـود دارد. لـذا به لحاظ قدرت بیانی، منطـق $m$ ارزشـی لوکاسـیویچ در واقـع بخـش خاصـی از منطـق $m$ ارزشی پُست است و هر عضوِ $Taut(W_m)$ یک همانگو در منطق پُسـت $m$ ارزشـی اسـت. برای مطالعه بیشتر در مورد منطق پُست می‌توانید (Gottwald, 2001) را ببینید.

در مـــورد کارســـاز بـــودن مجموعـــه رابـــطهـــای منطقـــی در منطـــق لوکاســـیویچ، اسلوپکی(Slupecki, J) در سال ۱۹۳۶ با توسیع منطق لوکاسـیویچ ۳ ارزشـی، کارسـاز بـودن مجموعه رابط‌های منطقی را به شکل دیگـری در منطـق لوکاسـیویچ ۳ ارزشـی انجـام داد و به‌علاوه منطق حاصله را اصل‌بندی نیز نمود (McCall, 1967: 335-337). همچنـین در منطـق پیوسته بن‌یاکوف و همکارانش که توسیعی از منطق لوکاسـیویچِ بـی‌نهایـت ارزشـی اسـت، مجموعه رابط‌های منطقی بنوعی کارساز هستند (Ben Yaacov, et al., 2008: 347).

## ٤. منطق دامِت – گودل

هیتینگ (Arend Heyting) در سال ۱۹۳۰ بعد از معرفی منطق شهودی برای اینکه نشـان دهـد اصل طرد شق ثالث در منطق شهودی درست نیست، از یـک معنـی‌شناسـی مبتنـی بـر یـک منطق ۳ ارزشی به صورت شکل ۵ استفاده کـرد ولـی سـازگاری اصـول منطـق شـهودی را نتوانست نتیجه بگیرد (Mancosu, 1998: 311-327).

**شکل ۵. تصویر رابط‌های منطقی ¬ ,→ ,∨ ,∧ در منطق گودل ۳ ارزشی**

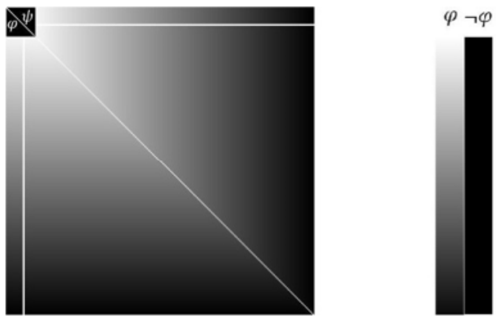
گودل (Kurt Gödel) در سال ۱۹۳۲ با استفاده از خانواده‌ای از رابط‌های منطقی نشـان داد اثبات سازگاریِ اصول منطق شهودی با یک معنـی‌شناسـیِ مبتنـی بـر یـک مجموعـه ارزشِ درستیِ شامل تعداد متناهی ارزش ممکن نیست (Feferman, et al., 2001: 223-225).

معنی‌شناسی‌های مورد استفاده هیتینگ و گودل مشابه هم بودند که این هم بخاطر این بود که باید اصول منطق شهودی در این منطق‌ها درست می‌بود. ادامه تحقیقات هیتینگ و گودل در دهه ۱۹۵۰ توسط دامِت (Michael Dummett) روی این منطق باعث شد آن را منطق دامِت – گودل بنامند (Dummett, 1959). این منطق نیز مانند منطق لوکاسیویچ در حالت‌های چند ارزشی و بی‌نهایت ارزشی قابل تعریف است. علاوه بر این رابطه‌های منطقی مورد استفاده در این منطق خیلی ساده هستند و لذا یکی از ساده‌ترین منطق‌های چند ارزشی به حساب می‌آید.

گودل برای حالتِ متناهی ارزشی مجموعه‌های مثل $W_m$ را و دامت برای حالت نامتناهی ارزشی مجموعه $W_{\aleph_0}$ را به عنوان مجموعه ارزش‌های درستی در نظر گرفتند، ولی می‌توان هر زیر مجموعه بسته از بازه واحد [0,1] را به عنوان مجموعه ارزش‌های درستی درنظر گرفت. رابطهای منطقی در این منطق عبارتند از {¬ ,↔,∧,∨,→}. تعبیر رابطه‌های منطقی در منطق گودل به صورت زیر است و برای $W_{\aleph_1}$ در شکل ۶ نشان داده شده است.

| | |
|---|---|
| $x \wedge y$ | $= \min(x, y)$ |
| $x \vee y$ | $= \max(x, y)$ |
| $x \rightarrow y$ | $= \begin{cases} 1 & x \le y \\ y & x > y \end{cases}$ |
| $x \leftrightarrow y$ | $= \begin{cases} 1 & x = y \\ \min(x, y) & x \ne y \end{cases}$ |
| $\neg x$ | $= \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$ |

**شکل ۱.۶. تصویر رابطه‌های منطقی ∧,∨,→ در منطق گودل بی‌نهایت ارزشی**




**شکل ۲.۶. تصویر رابطهای منطقی ¬,↔ در منطق گودل بی‌نهایت ارزشی**

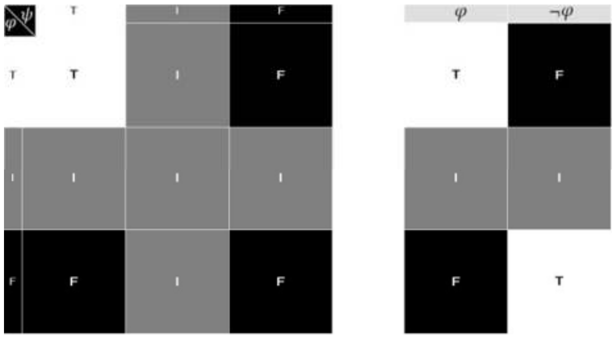
در اینجا نیز مثل منطق لوکاسیویچ، بعضی از رابطهای منطقی را می‌توان به کمک بقیه رابطهای منطقی تعریف کرد. مثلاً اگر $\{\bar{0}\} \cup \{\wedge, \rightarrow\}$ را به عنوان رابطهای منطقی پایه درنظر بگیریم، که $\bar{0}$ یک رابط منطقی هیچ‌موضعی با تعبیر دروغ محض، یعنی 0 باشد، آنگاه

| | |
|---|---|
| $x \vee y$ | $:= [(x \rightarrow y) \rightarrow y] \wedge [(y \rightarrow x) \rightarrow x]$ |
| $x \leftrightarrow y$ | $:= (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$ |
| $\neg x$ | $:= x \rightarrow \bar{0}$ |

دامِت همچنین منطق گودل-دامت گزاره‌ای بی‌نهایت ارزشی را اصل‌بندی کرد و قضیه تمامیت را برای این منطق ثابت کرد.

## ۵. منطق ۳ ارزشیِ بُچوار

در سال ۱۹۳۸ یک منطق‌دان روسی به نام بُچوار (Dmitri A. Bochvar) منطقی ۳ ارزشی را برای توضیح بعضی پارادکس‌هایی که در ریاضیات آن زمان بوجود آمده بودند (مثل پارادکس راسل)، ارائه داد (Bochvar, 1938). وی برای گزاره‌ها سه ارزشِ «راست»، «دروغ» و «بی‌معنی» را در نظر گرفته بود. او برای گزاره‌هایی مثل «این گزاره دروغ است» ارزش درستیِ «بی‌معنی» را قرار داده بود. اگر مجموعه ارزش‌های درستی را با $\{T, F, I\}$ نمایش دهیم، آنگاه ارزش $I$ به لحاظ ترتیبی با $T$ و $F$ قابل مقایسه نیست. جدول درستی نقیض مانند منطق لوکاسیویچ ۳ ارزشی است. برای ترکیب عطفی، وقتی یکی از گزاره‌ها «بی‌معنی» باشد، نتیجه ترکیب عطفی نیز «بی‌معنی» خواهد بود.



**شکل ۷. جدول درستی «نقیض» و «ترکیب عطفی» در منطق بُچوار**

سایر رابطه‌های منطقی را شبیه منطق کلاسیک، از روی دو رابـط منطقـی فـوق مـی‌تـوان تعریف کرد. نکته مهم در اینجا این است که با این جداول درستی، هـیچ همـانگویی در ایـن منطق وجود ندارد. بُچوار دو رابط منطقی تک موضعی «تاییـد بیرونـی» (external assertion) و «انکار بیرونی» (external denial) نیز به مجموعه رابطه‌های منطقی اضافه کرد. تایید بیرونـی روی مقادیر «راست» برابر «راست» و روی مقادیر غیر «راست» برابر «دروغ» است. این رابـط کمی شبیه رابط وجهی «امکان» در منطق لوکاسیویچ ۳ ارزشی است. اگر «تاییـد بیرونـی» را با نماد $A$ و «انکار بیرونی» را بـا نمـاد $D$ نمـایش دهـیم، تعبیـر آنهـا در شـکل ۸ نشـان داده شده است.

| $\varphi$ | $T$ | $I$ | $F$ |
|---|---|---|---|
| $D\varphi$ | $F$ | $F$ | $T$ |

| $\varphi$ | $T$ | $I$ | $F$ |
|---|---|---|---|
| $A\varphi$ | $T$ | $F$ | $F$ |

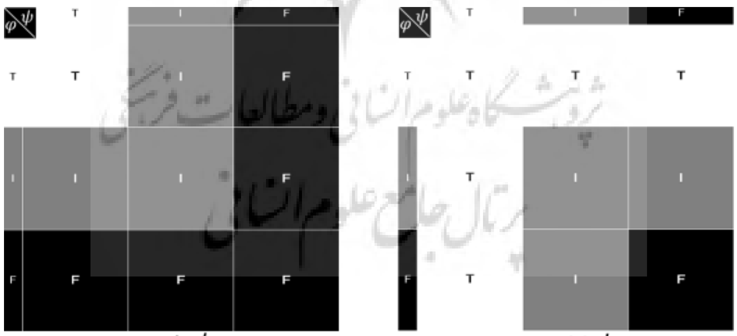
**شکل ۸ «انکار بیرونی» و «تایید بیرونی» یک گزاره در منطق بُچوار**

با وجود این رابط‌های منطقی جدید، به ازای هـر همـانگویی در منطـق کلاسـیک، یـک همانگو در منطق بُچوار نیز خواهیم داشت. کافی‌است به جای هـر گـزاره $\varphi$ در آن همـانگو، تعبیر خارجی آن، یعنی، $A\varphi$ را قرار دهیم. به عنوان مثال چـون $[\varphi \wedge (\varphi \rightarrow \psi)] \rightarrow \psi$ یـک همانگو در منطق کلاسیک است، $[A\varphi \wedge (A\varphi \rightarrow A\psi)] \rightarrow A\psi$ یک همانگو در منطق بُچـوار می‌باشد. البته همانگوهای زیاد دیگری هم در منطـق بُچـوار هسـتند کـه معـادلی در منطـق کلاسیک ندارند. مثلاً $A(A\varphi \rightarrow \varphi) \rightarrow A\varphi$ یک همانگو است که معادلی در منطـق کلاسـیک ندارد. بُچوار در ادامه کارش اظهار می‌کند که گرچه سازگاری سیستم منطقـی‌اش را نتوانسـته

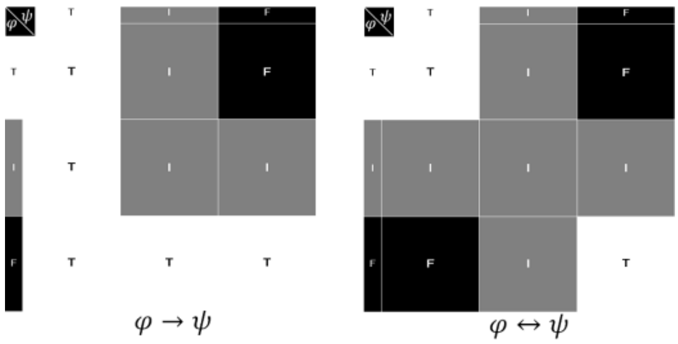
ثابت کند ولی نتیجه‌ای مثل پارادکس راسل در این منطق یافت نمی‌شود. در سال ۱۹۵۴ یک منطق‌دان چینی، ایده بُچوار برای خلاصی از پارادکس‌ها را با تغییراتی بر روی منطق لوکاسیویچ ۳ ارزشی نیز به کار برد (Moh, 1954). اگرچه شاید بتوان بُچوار را شروع کننده مبحثِ رهایی از پارادکس‌ها توسط منطق چند ارزشی دانست، ولی کارهای زیاد دیگری در همین رابطه چه به صورت ۳ ارزشی و چه به صورت چند ارزشی بعد از او انجام شده است.

## ٦. منطق ۳ ارزشیِ کِلین

کِلین بر خلاف بُچوار نه به دلایل هستی‌شناسانه بلکه به دلایل معرفت‌شناسانه، منطق ۳ ارزشی خود را در سال ۱۹۳۸ معرفی کرد (Kleene, 1938). او برای توضیح بعضی سوالات آن زمان مثل مسئله پیوستار که هنوز جواب آنها معلوم نشده بود، اظهار داشت که این گزاره‌ها بی‌معنی نیستند و بلکه ارزش درستی آنها هنوز معلوم نشده است. از طرفی کلین از پیشگامان نظریه محاسبه و از شاگردان چرچ بود و در مطالعه توابع بازگشتی جزئی که خودش آنها را معرفی کرده بود، نیز با سوالات بی‌پاسخی مواجه بود. با توجه به این موضوع، وی ارزش‌های درستی را مجموعه $\{T, F, I\}$ در نظر گرفت. او معنی‌شناسی نقیض را همانند لوکاسیویچ و بُچوار تعریف کرد و جدول درستی سایر رابطه‌های منطقی را به صورت شکل ۹ تعیین کرد.




$\varphi \wedge \psi$    $\varphi \vee \psi$




**شکل ۹. رابط‌های منطقی در منطق کِلین**

توجه دارید که در اینجا بر خلاف منطق لوکاسیویچ $\varphi \rightarrow \varphi$ یک همانگو نمی‌باشد. بـرای توجیه معنی‌شناسی مد نظر وی، فرض کنیـد ارزش گـزاره $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ بـه صـورت زیـر تعیین شده باشد:

$\psi(x) = T$ اگر و فقط اگر $4 \leq \frac{1}{x-1} \leq 1$ و $T$ = $\varphi(x)$ اگر و فقط اگر $1 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{4}$

در این صورت

- برای $x \in [1,4]$ ارزش $\varphi(x)$ راسـت اسـت، و همچنـین بـرای $x \in [1.25,2]$ ارزش $\psi(x)$ راست است،
- بـه ازای $x = 0$ ارزش $\varphi(x)$ و بـه ازای $x = 1$ ارزش $\psi(x)$ تعریـف نشـده و لـذا برابر $I$ است،
- بـــه ازای $x \in \mathbb{R} - (\{0\} \cup [1,4])$ ارزش $\varphi(x)$ دروغ اســـت. همچنـــین بـــرای $x \in \mathbb{R} - (\{1\} \cup [1.25,2])$ ارزش $\psi(x)$ دروغ است.

با توجـه بـه معنـی‌شناسـی مـذکور $\varphi(0) \wedge \psi(1)$ تعریـف نشـده، $\varphi(5) \wedge \psi(1)$ دروغ و $\varphi(0) \rightarrow \psi(1)$ تعریف نشده هستند که در واقع نیز در اینجا، همین معنی به ذهـن متبـادر می‌شود. البته کِلین در ادامه مطالعاتش روی توابع بازگشـتیِ جزئـی، شـکل ضـعیف‌تـری از رابط‌های منطقی را نیز تعریف کرد که دقیقاً مثل رابط‌های منطقی در منطـق بُچـوار بودنـد و در عوض تعابیر رابط‌های منطقـی در شـکل ۹ را صـورت قـویِ رابـط‌هـای منطقـی نامیـد (Kleene, 1952: 332-335). منطق ۳ ارزشیِ کلینِ امروزه به عنوانِ یکی از منطق‌هـای پایـه در مطالعه منطق‌های جزئی (partial logics) اهمیت دارد.

## ۷. منطق فازی

در دهه ۱۹۶۰ مفهومی به نام مجموعه‌های فازی توسط لطفی عسکرزاده(Lotfi A. Zadeh) (مشهور به زاده) یکی از اساتید گروه برق دانشگاه کالیفرنیا-برکلی معرفی شد (Zadeh, 1965). مجموعه $A \subseteq X$ را می‌توان با تابع مشخصه

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

معرفی نمود. مجموعه فازی $A \subseteq X$ بوسیله تابع عضویت $\mu_A: X \to [0,1]$ معرفی می‌شود که $\mu_A(x)$ درجه عضویت $x$ را در مجموعه $A$ مشخص می‌کند و گاهی اوقات آن را به شکل $[\![x \in A]\!]$ نمایش می‌دهند. زاده اعمال جبری بین مجموعه‌های فازی، مفهوم رابطه، اعداد فازی و خیلی مفاهیم دیگر را معرفی کرد. گوگن (Joseph Goguen)، یکی از شاگردهای زاده در اواخر دهه ۱۹۶۰ دو مقاله منتشر کرد که واژه «منطق فازی» در آنها برای اولین بار بکار رفته بود (Goguen, 1968-69). او در این مقاله‌ها، مفهوم «مشبکه‌های مانده‌ای» (residuated lattices) را به عنوان ساختاری طبیعی برای مجموعه ارزش‌های درستی نیز تعریف کرد. کارهای گوگن در کنار زاده تاثیر بسیار چشمگیری بر پیشرفت منطق فازی داشت.

ایده‌های شکل‌گیری مجموعه‌های فازی و منطق فازی البته با ایده‌های لوکاسیویچ، گودل، بُچوار، و کلین کاملاً فرق دارد. همانطور که گفته شد لوکاسیویچ بدلایل علایق فلسفی‌اش بخصوص در مخالفت با جبرگرایی، گودل برای مطالعه منطق شهودی و این‌که منطق شهودی دارای معنی‌شناسیِ مبتنی بر یک مجموعه ارزشِ متناهی نیست، بُچوار برای حل پارادکس‌های پیش‌آمده در بعضی از حوزه‌های ریاضی، و کلین برای سعی در پاسخ‌گویی به برخی سوالات بی‌پاسخ، به منطق‌های چند ارزشی روی آوردند. در واقع از سال ۱۹۲۰ افراد زیادی با اهداف و ایده‌های مختلف منطق‌های چند ارزشیِ مختلف را ابداع می‌کردند و یا از آنها استفاده می‌کردند. مجموعه‌های فازی و در ادامه آن منطق فازی برای مطالعه مفاهیم مبهم، غلبه بر پیچیدگی‌های مدلسازی ریاضیِ جهان واقعی، و استدلال تقریبی توسط زاده معرفی شدند. گرچه قبلاً هم معدود کارهایی با این هدف دیده می‌شود، ولی‌زاده توانست این هدف را با یک ایده کاملاً روشن برای برآورده کردنش معرفی کند. جذابیت زیادِ ایده‌های زاده در کارهای کاربردی را می‌توان نقطه عطفی در تاریخ منطق‌های چند ارزشی محسوب کرد. از طرفی از آنجا که بیشتر منطق‌های چند ارزشیِ رونمایی شده تا آن زمان را نیز می‌توان برای مطالعه مفاهیم مبهم بکار برد، این موضوع باعث شد تا این

منطق‌ها را نیز منطق فازی بنامند. لذا منطق فازی در واقع دارای دو معنی است. «منطق فازیِ وسیع» (wide sense of fuzzy logic) که بنوعی همان نظریه مجموعه‌های فازی می‌باشد و برای مطالعه مفاهیم مبهم به‌کار می‌رود، و «منطق فازی محدود» (narrow sense of fuzzy logic) که به مطالعه سیستم‌های منطقی چندارزشی و فراریاضیاتِ استدلال‌ها در آن می‌پردازد.

«منطق فازیِ وسیع» حاصل پیشرفت‌های علوم مهندسی و بویژه مهندسی کنترل و مهندسی دانش است. این شکل از منطق فازی با مجموعه‌های فازی و هر روش دیگری که با رتبه‌بندی و درجه‌بندی در علوم مختلف مربوط می‌شود سروکار دارد، ولی با ایده‌های منطق کلاسیک سنخیتی ندارد. در عوض صورت محدود منطق فازی به توسیع خاصی از منطق‌های چند ارزشیِ مبتنی بر مجموعه ارزش‌های درستی [0,1] اشاره دارد که در آن‌ها نوعی نتیجه‌گیری و استلزام مدرج (graded conclusions) وجود دارد. این صورتِ منطق فازی را منطق فازیِ ریاضی (mathematical fuzzy logic) نیز می‌نامند.

قبل از معرفی منطق فازیِ ریاضی و تا حدود سال ۱۹۷۵، مفاهیمی مثل صدق، اثبات، گزاره همانگو و ... بر مبنای «راستی محض» بیان می‌شدند. مثلاً گزاره‌ای همانگو است که همواره ارزش درستیِ «راست محض» داشته باشد، و یا ارزیابی[1] $e$ را یک مدل تئوری $\Sigma$ می‌نامند هرگاه ارزش همه جملات $\Sigma$ تحت $e$ برابر «راست محض» باشد. منطق فازی درواقع ایده‌های اثبات و نتیجه‌گیری در منطق‌های چند ارزشی تا آن زمان را، با مفاهیم مجموعه‌های فازی ادغام نمود. فرض کنید در منطق چند ارزشی $\mathcal{A}$، استنتاجی مثل $R$ داریم که از مجموعه مفروضات $H_1, H_2, \dots, H_n$ حکمی مثل $H$ نتیجه شده باشد. این استنتاج به این معنی است که با فرض «راست محض» بودن مفروضات و با توجه به اصول موضوعه که «همانگو» هستند و با توجه به قواعد اثبات که بر مبنای «راستیِ محض» تعریف شده‌اند ارزش درستیِ گزاره $H$ برابر «راست محض» است. بنابراین با نمایش فازی،

اگر $[\![H_1]\!] = [\![H_2]\!] = \cdots = [\![H_n]\!] = 1$ آنگاه $[\![H]\!] = 1$.

اما با نمایش فازی، می‌توان نوعی درجه درستی برای استنتاج‌ها تعریف کرد. اگر & یک ترکیب عطفی باشد، آنگاه می‌توان گفت درجه درستی استنتاج $R$ را برابر با کم‌ترین درجه درستی $(H_1 \& H_2 \& \dots \& H_n) \to H$ می‌توان تعریف کرد

$$[\![R]\!] = \inf_{\text{همه ارزیابی‌های روی گزاره‌ها}} [\![(H_1 \& H_2 \& \dots \& H_n) \to H]\!].$$

و لذا وقتی تحت هر ارزیابی داشته باشیم $[\![(H_1\&H_2\&\ldots\&H_n) \to H]\!] = 1$، آنگاه درجه درستی $R$ نیز برابر ۱ است، که به معنی همان استنتاج رایج در منطق کلاسیک است.

## ۸. برخی از ویژگی‌های ساختاری منطق‌های چند ارزشی

از موقع پیدایش منطق‌های چند ارزشی، با توجه به کاربردهای مختلف این منطق‌ها، منطق‌های چند ارزشی مختلفی توسط محققینی که با جنبه‌های کاربردی سروکار دارند، معرفی شده‌اند. اغلب منطق‌هایی که به عنوان منطق چند ارزشی شناخته می‌شوند، دارای چند مشخصه بارز هستند.

### ۱.۸ مجموعهٔ ارزش‌های درستی

مجموعه ارزش‌های درستی یک مجموعه مرتب است که $T$ (راست محض) از سایر ارزش‌های درستی بزرگتر و $F$ (دروغ محض) از سایر ارزش‌های درستی کوچکتر است. در همه منطق‌های معرفی شده بجز منطق کلین و بُچوار این موضوع را می‌توان از روی مجموعه ارزش‌های درستی و یا با توجه به جدول درستی رابط‌های منطقی دریافت. در منطق ۳ ارزشی کلین و نیز بُچوار، لزومی ندارد ارزش $I$، با «راست محض» و یا «دروغ محض» قابل مقایسه باشد. البته این موضوع که «راستِ محض» بزرگترین مقدار و «دروغ محض» کوچکترین مقدار باشد، در طول زمان برگزیده شده است، ولی گاهی اوقات نیز بعضی محققین دقیقاً ترتیب عکس را برگزیده‌اند. مثلاً دامِت در اثبات قضیه تمامیت برای منطق دامِت–گودل ترتیب عکس را انتخاب کرده است.

وقتی مجموعه ارزش‌های درستی یک مجموعه مرتب خطیِ حداکثر از اندازه اعداد حقیقی است، می‌توان آن را با زیر مجموعه‌ای از بازه واحد $[0,1]$ نمایش داد. این کار برای بیش‌تر منطق‌های چند ارزشی انجام شده است. در این حالت می‌توان از طیف رنگ و یا موارد مشابه دیگر نیز استفاده برد. ما نیز برای معرفی عملکرد رابط‌های منطقی، در این مقاله از تصاویری با طیف رنگ خاکستری استفاده کرده‌ایم که سفید «راست محض» و سیاه «دروغ محض» است.

به کار بردن «مشبکه‌های مانده‌ای» به عنوان یک مجموعه ارزش‌های درستیِ طبیعی برای منطق فازی توسط گوگن (Goguen, 1968-69) در مورد بیشتر منطق‌های چند ارزشی و حتی

غیرکلاسیک (و البته با جبرهای متناسب با همان منطق‌ها) کارایی دارد. این کار البته قبل از گوگن نیز برای بعضی از منطق‌های غیر کلاسیک مثل منطق شهوی (با معنی‌شناسی مبتنی‌بر جبرهای هیتینگ) و منطق لوکاسیویچ (با معنی شناسی مبتنی بر $MV$–جبرها) انجام شده بود (Tarski, 1936 و Chang, 1959). اکثر این نوع از مجموعه‌های ارزشِ درستی نوعی خاص از مجموعه‌های مرتب به نام مشبکه هستند. می‌توان گفت بین بیشتر منطق‌های چند ارزشی و مشبکه‌ها و خواص متناظر آنها با هم ارتباط نزدیکی وجود دارد که امروزه منجر به یافتن روش‌های تازه‌ای برای اثبات خیلی از نتایج در هر دو زمینه و همچنین یافتن خواص جدیدِ منطق‌های چند ارزشی شده است.

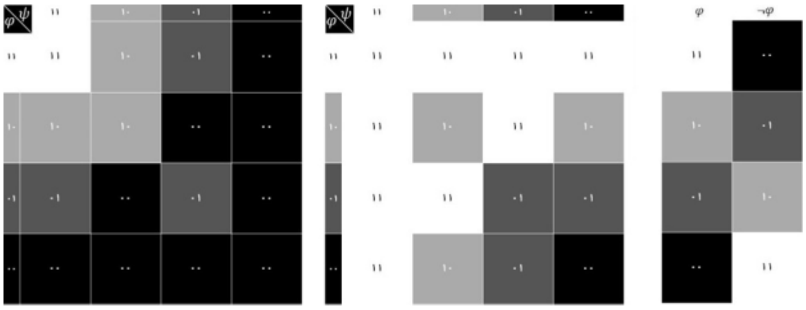
در سال ۱۹۳۶ یاکوسکی (Stanisław Jaśkowski) موقع مطالعه منطق شهودی، روشی برای ساختن یک منطق چند ارزشیِ $m \times n$ ارزشی از روی دو سیستم منطقی $m$ ارزشی و $n$ ارزشی که دارای رابطهای منطقیِ مشابهی هستند ابداع کرد (McCall, 1967: 259-263). فرض کنید دو سیستم منطقی $A$ و $B$ با مجموعه ارزش‌های درستی $V_A$ و $V_B$ مفروض باشند. یاکوسکی مجموعه $V_A \times V_B$ را به عنوان مجموعه ارزش‌های درستیِ معرفی کرد و سپس جداول درستی رابطهای منطقی را به صورت زیر تعریف کرد:

| | |
|---|---|
| $\neg(x,y)$ | $:= (\overset{A}{\neg}x, \overset{B}{\neg}y)$ |
| $(x,y) \wedge (x',y')$ | $:= (x \overset{A}{\wedge} x', y \overset{B}{\wedge} y')$ |
| $(x,y) \vee (x',y')$ | $:= (x \overset{A}{\vee} x', y \overset{B}{\vee} y')$ |
| $(x,y) \to (x',y')$ | $:= (x \overset{A}{\to} x', y \overset{B}{\to} y')$ |
| $(x,y) \leftrightarrow (x',y')$ | $:= (x \overset{A}{\leftrightarrow} x', y \overset{B}{\leftrightarrow} y')$ |

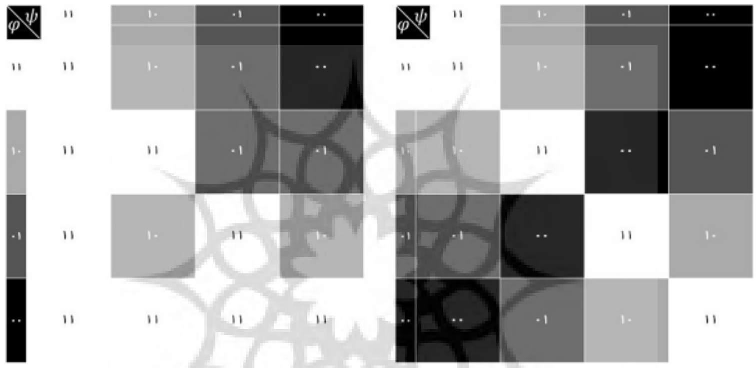
دو نوع رابطه ترتیبی روی مجموعه ارزش‌های درستی $V_A \times V_B$ از بقیه رابطه‌های ترتیبی متداول‌تر هستند. ترتیب لغت‌نامه‌ای (lexicographical ordering) و ترتیب مولفه‌ای (componentwise ordering) که به ترتیب به صورت زیر تعریف میگردند:

- $(x,y) \leq_l (x',y')$ اگر فقط و اگر $[(x < x')$ یا $(x = x'$ و $y \leq y')]$
- $(x,y) \leq_c (x',y')$ اگر فقط و اگر $(x \leq x'$ و $y \leq y')$

اکنون به عنوان مثال، اگر هر دو سیستم منطقی $A$ و $B$ را منطق کلاسیک در نظر بگیریم و هر زوج مرتب $(x,y)$ را با $xy$ نمایش دهیم، آنگاه با ترتیب لغت‌نامه‌ای، جدول درستی رابطهای منطقی به صورت شکل ۱۰ خواهد بود.



**شکل ۱.۱۰. تعبیر $\wedge, \vee, \neg$ در منطق دست آمده از حاصل‌ضرب منطق کلاسیک با خودش با رابطه ترتیبی $\leq_t$**



با ترتیب مولفه‌ای، چون 10 با 01 قابل مقایسه نیست، فقط کافیست رنگ این خانه‌ها مثل هم باشد. نکته جالب این است که این منطق با هیچ‌کدام از منطق‌های لوکاسیویچ یا گودل در حالت ۴ ارزشی، معادل نمی‌باشد.

## ۲.۸ رابط‌های منطقی

در منطق‌های گزاره‌ای، معمولاً یک مجموعه از گزاره‌های اتمی مثل $\mathcal{P}$ مفروض است و سپس سایر گزاره‌ها به کمک عناصر $\mathcal{P}$ و رابط‌های منطقی ساخته می‌شوند. متداول‌ترین رابط‌های منطقی آنهایی هستند که در زبان روزمره از آنها استفاده می‌کنیم و چکیده‌ای از آن‌ها مشتمل بر $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ در منطق کلاسیک گزاره‌ای نیز آمده است. از آن‌جایی که یکی از مهم‌ترین اهداف منطق، مدلسازی زبان روزمره در حوزه‌های مختلف علمی و به‌خصوص در حوزه علوم کامپیوتر است، اکثر منطق‌های گزاره‌ای حداقل قائل به این

۵ رابط منطقی هستند و بعلاوه در تعبیر این رابط‌های منطقی، حداقل مایل هستند تاحدودی انتظاراتِ زبان روزمره از این رابط‌های منطقی برآورده گردد.

اولین خصلتی که از تعبیر یک رابط منطقی (یا بصورت خلاصه ازیک رابط منطقی) انتظار می‌رود این است که دارای یک تابع درستی (جدول درستی) است. چنانچه در یک منطق چند ارزشی، قائل به رابط منطقی‌ای باشیم که تابعِ درستیِ آن مشخص نیست، می‌توان آن را یک نوعِ منطق چند ارزشیِ وجهی به حساب آورد. چون بررسی ما روی منطق‌های چند ارزشی گزاره‌ای (ساده) است، لذا مایلیم همه رابط‌های منطقی دارای تابع درستیِ مشخص باشند.

اگر در جدول درستی یک رابط منطقی، یک ارزش درستیِ $T$ (راست محض) و یک ارزش درستیِ $F$ (دروغ محض) وجود داشته باشد، معمولاً مایلیم تحدید جدول درستیِ آن رابط منطقی به منطق کلاسیک، جدولِ درستیِ آن رابط منطقی در منطق کلاسیک شود. لذا وقتی این مهم رخ می‌دهد آن رابط منطقی را «نرمال» می‌گوییم. سیستم منطقی که همه رابط‌های منطقی آن نرمال باشند را یک سیستم منطقی نرمال می‌نامند. با این وصف، به‌جز سیستم منطقی پُست، همه منطق‌هایی که معرفی شدند نرمال هستند.

در ادامه به بررسی جزئیات هر یک از ۵ رابط منطقی {¬ ,↔, →, ۸,۷} می‌پردازیم. با توجه زیربخش ۸–۱ فرض می‌کنیم مجموعه ارزش‌های درستی یک مجموعه مرتب باشد و $a \leq b$ را به این معنی که ارزشِ $a$ دروغ‌تر از ارزشِ $b$ است در نظر می‌گیریم.

## ۳.۸ ترکیب عطفی

ترکیب عطفیِ گزاره‌ها در منطق‌های چند ارزشی، به لحاظ معنی‌شناسی ممکن است متفاوت باشد و حتی ممکن است در یک منطق چند ارزشی چند نوع ترکیب عطفی داشته باشیم. وقتی مجموعه ارزش‌های درستی زیر مجموعه‌ای از [0,1] است که شامل ۱ به‌عنوان راست محض و ۰ به عنوان دروغ محض می‌باشد، تابع مینیمم یکی از متداول‌ترین ترکیب‌های عطفی است که در اکثر منطق‌هایی که معرفی کردیم وجود دارد و یا از روی تابع درستی سایر رابط‌های منطقی قابل حصول است. متداول‌ترین خواصی که از یک ترکیب عطفی انتظار داریم به شرح ذیل است:

- تحدید آن به مجموعه ارزش‌های درستی منطق کلاسیک، همان ترکیبی عطفی منطق کلاسیک باشد،
- ترکیب عطفیِ «دروغ محض» با هر مقدار ارزشِ دیگر، «دروغ محض» باشد،
- دارای خاصیت جابجایی و شرکت‌پذیری باشد،
- یکنوا باشد. یعنی اگر $a$ و $b$ و $c$ سه ارزش درستی باشند و $a$ دروغ‌تر از $b$ باشد، آنگاه ترکیب عطفی $a$ و $c$ از ترکیب عطفی $b$ و $c$ نیز دروغ‌تر باشد.

البته نمی‌توان گفت رعایت همه این موارد برای یک ترکیب عطفی لازم است و تعبیرهای مناسبی برای ترکیب عطفی وجود دارند که در همه این موارد صدق نمی‌کنند. مثلاً براحتی از روی شکل ۱۰ می‌بینید علیرغم اینکه $(1,0) \leq (0,1)$ ولی $(0,1) \wedge (0,1) = (0,1) \geq (0,0) = (1,0) \wedge (0,1)$.

در عین حال باید توجه داشت که حداقل انتظاری که در زبان معمولی از ترکیب عطفی داریم باید رعایت شود و به نظر نمی‌توان هر تعبیری را برای آن پذیرفت.

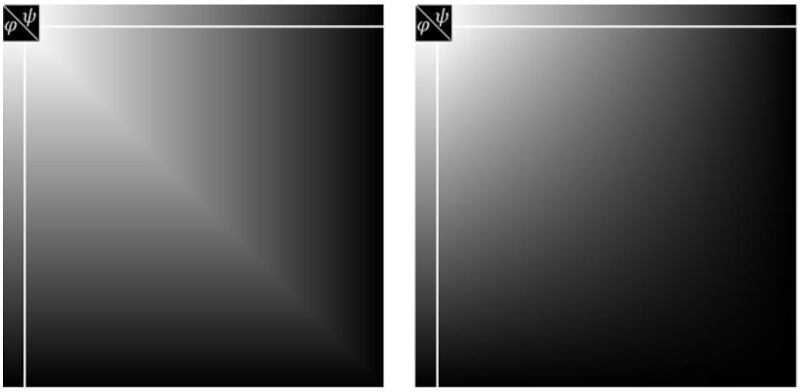
یکی از مشهورترین توابعی که همه خواص فوق را دارند، نرم‌های مثلثی (triangular norm) یا t–نرم‌ها (t-norm) می‌باشند که برای اولین بار در سال ۱۹۴۲ توسط مِنجِر (Karl Menger) موقع کار روی فضاهای متریک احتمالی معرفی شدند (Menger, 1941). یک نرم مثلثی تابعی است مثل $T: [0,1]^2 \to [0,1]$ با خواص زیر:

۱T. برای هر $a, b, c$، $T(a,b) = T(b,a)$ و $T(a,T(b,c)) = T(T(a,b),c)$،

۲T. به ازای هر $a, b, c$، اگر $a \leq b$ آنگاه $T(a,c) \leq T(b,c)$،

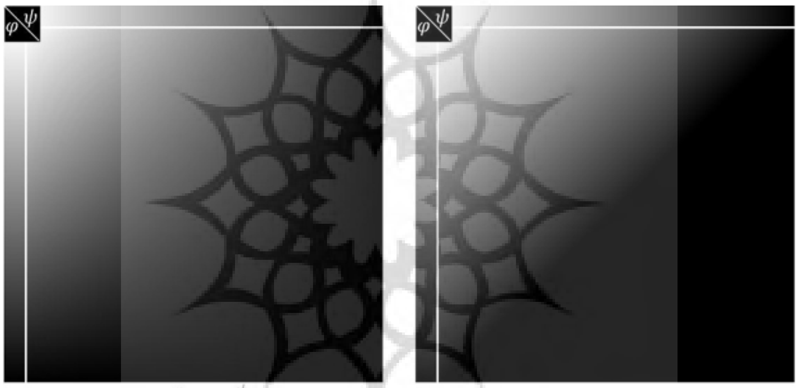
۳T. به ازای هر $a$، $T(a,1) = a$.

برای هر $a$ با استفاده از ۳ خاصیت بالا می‌توان نشان داد $T(a,0) = 0$. در شکل ۱۱ چند نمونه از نرم‌های مثلثی را می‌بینید.




$\min\{\varphi, \psi\}$ $\qquad$ $\varphi \times \psi$

**شکل ۱.۱۱. نرم‌های مثلثی حاصل‌ضربی و گودل**



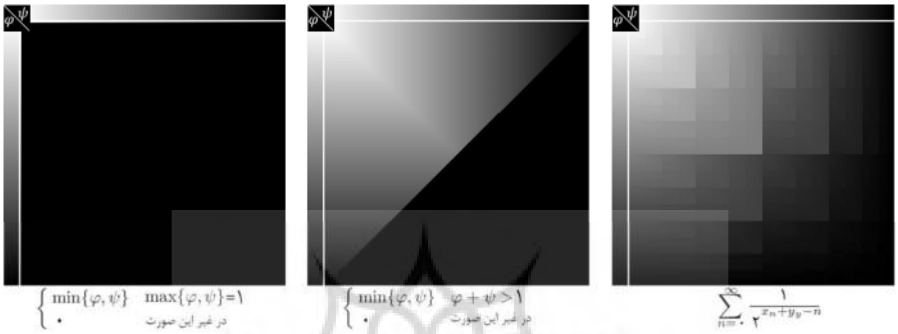

$\log_{۵}\left(۱+\frac{(۵^{\varphi}-۱)(۵^{\psi}-۱)}{۵-۱}\right)$ $\qquad$ $\max\{۰, \varphi+\psi-۱\}$

**شکل ۲.۱۱ نرم‌های مثلثی لوکاسیویچ، فرانک(۵)**

همه نرم‌های مثلثی شکل ۱۱ پیوسته هستند و خود شکل هم تا حدودی این موضوع را نشان می‌دهد. بعلاوه از روی شکل ۱۱ براحتی می‌توان دریافت نرم مثلثی گودل به لحاظ ترکیب عطفی از سایر نرم‌های مثلثی شکل ۱۱ سهل‌گیرانه‌تر است و در عوض نرم مثلثی لوکاسیویچ به لحاظ ترکیب عطفی از بقیه سخت‌گیرانه‌تر است. مثلاً اگر گزاره‌های $\varphi$ و $\psi$ به ترتیب برای انجام دو تکلیف یک شاگرد باشند، آنگاه چنانچه شاگرد هر دو تکلیف را نصفه انجام دهد، در مجموع با معنی‌شناسی گودل نصف نمره را می‌گیرد ولی در معنی‌شناسی لوکاسیویچ نمره‌ای برای انجام دو تکلیف ناقص به شخص تعلق نمی‌گیرد.

به طور کلی می‌توان نشان داد نرم مثلثی گودل از هر نرم مثلثی دیگری به لحاظ عملکرد عطفی، سهلگیرانه‌تر است. اما به لحاظ سخت‌گیرانه بودن، نرم‌های مثلثی ناپیوسته‌ای وجود دارند از نرم مثلثی لوکاسیویچ عملکرد سختگیرانه‌تری دارند.

در شکل ۱۲ سه نمونه نرم مثلثی ناپیوسته را می‌بینید. همانطور که در تصویر مشخص است، نرم مثلثی شدید سخت‌گیرتر از نرم مثلثی لوکاسیویچ است.




**شکل ۱۲. سه نمونه نرم مثلثی ناپیوسته (نرم مثلثی سمت چپ را نرم مثلثی شدیدی می‌نامند.**
**در نرم مثلثی سمت راست، $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دو دنباله اکیداً صعودی هستند که**
**از بسط دودیی $\varphi = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{x_n}}$ و $\psi = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{y_n}}$ بدست می‌آیند**

## ۴۸ رابط منطقی نقیض

برای تابع درستیِ رابط منطقی نقیض به نظر می‌رسد که مهمترین مشخصه‌ها به شرح ذیل باشند:

۱. اگر مجموعه ارزش‌های درستی مرتب باشد، آنگاه نقیض تابعی نزولی باشد،

۲. نقیض «دروغ محض» برابر «راست محض» باشد و بالعکس. لذا اگر مجموعه ارزش‌های درستی زیر مجموعه‌ای از [0,1] باشد که شامل ۱ به عنوان راست محض و ۰ به‌عنوان دروغ محض می‌باشد، آنگاه $\neg 0 = 1$ و $\neg 1 = 0$.

البته انتظارات مختلف محققین، باعث معرفی انواع مختلفی از توابع نقیض در منطق‌های چندارزشی شده است. یکی از مشهورترین این انواع، نقیض پیچشی (involution negation) است. تابع نقیض $n$ را پیچشی (یا خودتوان) می‌گویند هرگاه به ازای هر ارزشِ درستی $a$، $n(n(a)) = a$. نقیضِ اکیداً نزولی را یک نقیض موکد می‌گویند. براحتی می‌توان دید اگر تابع $n: [0,1] \to [0,1]$ یک نقیضِ پیچشی باشد، موکد هم خواهد بود. اما نقیض‌هایی

مثل $n(x) = 1 - x^2$ وجود دارند که موکد هستند ولی پیچشی نمی‌باشند. نقیضِ منطق لوکاسیویچ، یعنی $n_L(x) = 1 - x$ یک نقیضِ پیچشی است. در منطق کِلین و بُچوار نیز نقیض پیچشی است. نقیض منطق گودل و پُست پیچشی نیست. در زیر ضابطه نقیضِ گودل و همچنین دوگان آن را که نیز یک تابع نقیض است، می‌بینید.

$$n_G(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} \qquad n'_G(x) = \begin{cases} 1 & x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

درواقع توجه دارید که $n'_G(x) = n_G(n_G(x))$.

شبیه بعضی از اتحادهای منطق کلاسیک، در منطق‌های چند ارزشی نیز بعضاً رابط منطقیِ نقیض با سایر رابط‌های منطقی ارتباط دارد. در بررسی رابط‌های منطقیِ «ترکیب فصلی» و «استلزام» به مواردی از این مورد نیز اشاره خواهیم کرد.

## ۵.۸ ترکیب فصلی

ترکیب فصلی نیز شبیه ترکیب عطفی در شکل‌های مختلفی در منطق‌های چند ارزشی ظهور پیدا می‌کند و بعلاوه یک منطق خاص ممکن است چندین نوع ترکیب فصلی داشته باشد. خواص ترکیب فصلی مشابه ترکیب عطفی است و فقط در خاصیت دوم، تغییر زیر را خواهیم داشت:

- تحدید آن به مجموعه ارزش‌های درستی منطق کلاسیک، همان ترکیبی فصلی منطق کلاسیک باشد،
- ترکیب فصلیِ «راست محض» با هر مقدار ارزشِ دیگر، «راست محض» است،
- دارای خاصیت جابجایی و شرکت‌پذیری باشد،
- یکنوا باشد. یعنی اگر $a$ و $b$ و $c$ سه ارزش درستی باشند و $a$ دروغ‌تر از $b$ باشد، آن‌گاه ترکیب فصلی $a$ و $c$ از ترکیب فصلی $b$ و $c$ نیز دروغ‌تر باشد.

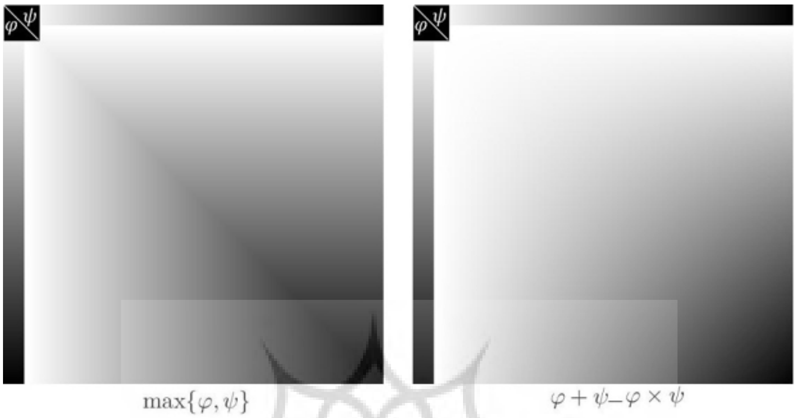
در اینجا نیز واقعاً لزومی ندارد یک ترکیب فصلی همه این خواص را داشته باشد، ولی داشتن یک خواص حداقلی به نظر لازم است. دوگان نرم مثلثی که آن را هم–نرم مثلثی (t-conorm) یا s–نرم (s-norm) می‌نامند، یکی از متداول‌ترین انواع توابعی است که در خواص ترکیب فصلی صدق می‌کند. در واقع یک s–نرم تابعی است مثل $S: [0,1]^2 \to [0,1]$ با خواص زیر:

S1. به ازای هر $a, b, c$، $S(a,b) = S(b,a)$ و $S(a, S(b,c)) = S(S(a,b), c)$.

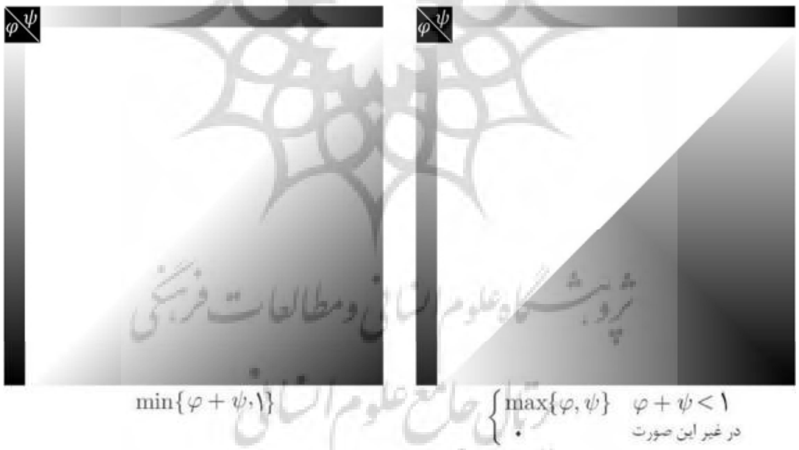
S۲. به ازای هر $a, b, c$، اگر $a \le b$ آنگاه $S(a,c) \le S(b,c)$.

S۳. به ازای هر $a$، $S(a,0) = a$ و $S(a,1) = 1$.

شکل ۱۳ چند نمونه از s–نرم‌ها را به تصویر کشیده است.




**شکل ۱.۱۳. s–نرم‌های حاصل‌ضربی و گودل**




**شکل ۲.۱۳. s–نرم‌های ماکزیمم–پوچ‌توان (شدید) و لوکازیه‌ویچ**

با کمک قاعده دمورگان و موجود بودن یک ترکیب عطفیِ $T$ و تابع نقیضِ $n$ نیز می‌توان یک ترکیب فصلی با ضابطه

$$S(a,b) = n\Big(T\big(n(a), n(b)\big)\Big) \qquad (۱)$$

ساخت. در این حالت چنانچه $T$ یک نرم مثلثی باشد و $n$ یک نقیض پیچشی باشد، آن‌گاه تابع $S$ یک s-نرم خواهد بود.

اصل امتناع تناقض که سومین اصل از اصول سه‌گانه تفکر است می‌گوید «گفته‌های متناقض در آن واحد راست نیستند». صورت‌بندی اصل امتناع تناقض بر اساس نرم مثلثی $T$ و تابع نقیض $n$ به این شکل می‌شود که

به ازای هر $a$، $T(a,n(a))=0$.  (۲)

در بعضی از منطق‌های چند ارزشی مثل منطق لوکاسیویچ اصل امتناع تناقض به شکل فرمول (۲) درست است و لذا چند ارزشی بودن به معنی تخطی از «اصل امتناع تناقض» نیست.

در صورت برقراری اصل امتناع تناقض به شکل فرمول (۲) و نیز پیچشی بودن تابع نقیضِ $n$، چنانچه $S$ به کمک فرمول (۱) تعریف شده باشد، آنگاه پیچشی بودن $n$ و امتناعِ تناقض ایجاب می‌کنند که

$$S(a,n(a))=n\Big(T\Big(n(a),n\big(n(a)\big)\Big)\Big)=n\big(T(n(a),a)\big)=n(0)=1$$

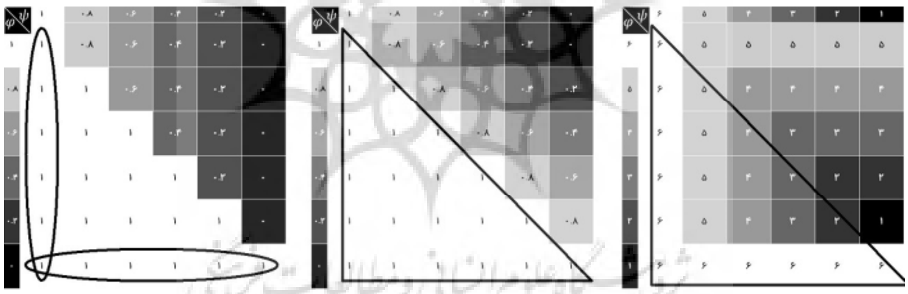
مثلاً در منطق لوکاسیویچ، از آنجایی که از روی فرمول (۱) در واقع تعبیرِ «یا قوی» حاصل می‌شود، لذا به ازای هر گزاره $\varphi$ گزاره $\varphi \oplus \neg\varphi$ یک گزاره همانگو است. لذا چندارزشی بودن تخطی از «اصل طرد شق ثالث» نیز نمی‌باشد. در واقع فقط چندارزشی بودن یک منطق به معنی تخطی از «اصل دو ارزشی بودن» است.

## ۶.۸ استلزام

در مورد عملگر استلزام، چون خاصیت جابجایی برای آن برقرار نیست، باید بررسی خواص با دقت بیشتری صورت گیرد. به نظر می‌رسد با توجه به انتظاری که از یک جمله شرطی داریم، مهمترین خواص عملگر استلزام به شرح زیر باشند:

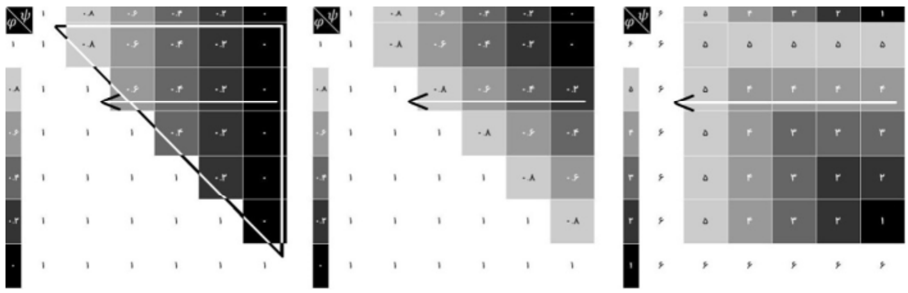
- انتظار داریم در صورتیکه بدانیم ارزشِ گزاره «اگر $\varphi$ آنگاه $\psi$» راست است، آن‌گاه چنان‌چه $\varphi$ راست باشد، حتماً $\psi$ نیز راست باشد که در حالت چند ارزشی چون مفهوم راستی با درجه‌های متفاوتی ممکن است، می‌توانیم اینگونه نتیجه بگیریم که باید $\psi$ حداقل به اندازه $\varphi$ راست باشد تا مطمئن شویم که حتماً درجه راستی را دارا است (البته ممکن است یک حداقل درجه راستی مثل $\alpha$ را فرض کرده باشیم که

در این صورت $\psi$ می‌تواند این حداقل درجه راستی را داشته باشد). لذا اگر ارزش گزاره‌ها را به تسامح با خود آنها نمایش دهیم و حداقل درجه راستی مثل $\alpha$ نیز نداشته باشیم، راست بودن $\varphi \to \psi$ ایجاب می‌کند که $\varphi \leq \psi$. برعکس $\varphi \leq \psi$ نشان می‌دهد که $\psi$ حداقل به اندازه $\varphi$ راست است. یعنی اگر $\varphi$ راست باشد آنگاه $\psi$ نیز راست است و لذا می‌توان گفت «اگر $\varphi$ آنگاه $\psi$» راست است. به عبارت دیگر در جمله شرطی اگر مقدم دروغ‌تر از تالی باشد ارزش جمله راست است. یعنی جمله شرطی به انتفاء مقدم، راست است. لذا در مورد جملات شرطی در دوحالت مرزیِ «راست محض» و «دروغ محض» انتظار داریم برای هر ارزشِ درستی $a$، جملهٔ شرطی نیز مقدار مرزی «راست محض» را اختیار کند. پس اگر تابعِ استلزام $I$ تعبیر جمله شرطی باشد، آنگاه $I(a,1) = 1$ و $I(0,a) = 1$. اما در حالت غیر مرزی، برای دو مقدار مقدم و تالی $a$ و $b$، چنانچه $a$ دروغ‌تر از $b$ باشد، در بیشتر منطق‌های چند ارزشی مجدداً همان مقدارِ مرزیِ «راست محض» برای $I(a,b)$ در نظر گرفته شده است، اما این موضوع همیشگی نبوده و گاهی اوقات (مثل منطق پُست) مقادیرِ ارزش نزدیک به راست نیز در نظر گرفته شده‌اند.



**شکل ۱۴. مناطقی که در جمله شرطی مقدم دروغ‌تر از تالی است**
**برای منطق‌های پُست، لوکاسیویچ و گودل**

به‌علاوه در جمله شرطی، بزرگتر بودن مقدم از تالی، نباید منجر به ارزش راست برای آن جمله شرطی شود و مقداری بین راست و دروغ باید ارائه دهد. لذا، در استلزام $I(a,b)$، اگر مقدم ثابت بوده و تالی افزایش یابد، آنگاه انتظار می‌رود که ارزش استلزام راست‌تر شود. یعنی تابع $I(x,y)$ روی مولفه دوم، تابعی صعودی باید باشد.



**شکل ۱۵. صعودی بودن استلزام روی مولفه دوم در منطق‌های پُست، لوکاسیویچ و گودل**

اگر تالی را ثابت فرض کنیم و ارزش مقدم افزایش یابد (یعنی میزان دروغ بودنِ مقدم نسبت به تالی کم شود یا حتی از بین برود)، آنگاه ارزش کل استلزام باید کاهش پیدا کند. به عبارت دیگر تابع $I(x,y)$ روی مولفه اول، تابعی نزولی باید باشد (این موضوع نیز در بعضی منطق‌ها مانند منطق پُست برقرار نیست). در شکل ۱۵ این موضوع را با رسم فلش‌های عمودی به سمت بالا می‌توان دید.

- وقتی مقدم «راست محض» و تالی «دروغ محض» باشد، باید ارزش جمله شرطی «دروغ محض» باشد. یعنی $I(1,0) = 0$. این موضوع نیز در بین منطق‌هایی که معرفی کردیم در منطق پُست برقرار نیست ولی در بقیه برقرار است.
- وقتی مقدم «راست محض» باشد، آنگاه ارزش جمله شرطی باید برابر تالی آن باشد. یعنی به ازای هر $a$، $I(1,a) = a$. همانطور که سطرهای اول جداول ارزش در شکل ۱۵ نشان می‌دهند، این موضوع نیز در مورد همه منطق‌های ذکر شده به جز منطق پُست درست است.
- قاعده «معادل بودن جمله شرطی با عکس نقیضِ آن» در منطق کلاسیک، در واقع به معنی تقارن جدول ارزشی که ما رسم کرده‌ایم نسبت به قطر واصل بین $(1,0)$ و $(0,1)$ می‌باشد. در بین منطق‌هایی که معرفی کردیم این موضوع در مورد منطق لوکاسیویچ (شکل ۲ و شکل ۳-۳)، منطق چهار ارزشی حاصل از ضرب منطق کلاسیک در خودش (شکل ۱۰-۲)، منطق کلین (شکل ۹) و منطق بُچوار درست است ولی در مورد منطق پُست و گودل درست نیست و البته با یک درجه ضعیف در این دو منطق درست است (در شکل ۱۵ اگر همه خانه‌های خاکستری را سیاه کنیم، می‌بینیم این تقارن برای منطق پُست و گودل نیز برقرار می‌شود).

باتوجه‌به موارد ذکرشده، معمولاً برای یک استلزام، حداقل فرض می‌کنند که خواص فوق برقرار باشند و در موارد خاص که نیاز به تغییراتی در خواص استلزام باشد، خواص مورد نظر را معرفی می‌کنند.

یک مسئله مهم در زمینه معرفی توابع درستی رابط‌های منطقی، انتخاب مناسب‌ترین تابع درستی برای یک رابط منطقی است. گاهی اوقات مسائل کاربردی و گاهی اوقات جنبه‌های منطقی و فلسفی منجر به پیدا شدن مناسب‌ترین تابع درستی می‌شوند. در منطق لوکاسیویچ، اگرچه خود وی ابتدا استلزام و نقیض را تعریف کرده بود و سایر رابط‌های منطقی را از روی آن‌ها بدست آورده بود، ولی شبیه منطق کلاسیک، از روی ترکیب عطفی و تناقض می‌توان عملگر استلزام را تعریف کرد. در واقع از آنجایی که داریم $n_L(a) = 1 - a$ و $T_L(a,b) = \max\{0, a+b-1\}$، لذا

| | |
|---|---|
| $I_L(a,b) = n_L\left(T_L\big(a, n_L(b)\big)\right)$ | $= 1 - \max\{0, a + (1-b) - 1\}$ |
| | $= 1 - \max\{0, a - b\}$ |
| | $= \min\{1, 1 - a + b\}$ |

که همان تعریف اولیه لوکاسیویچ است. اما در مورد منطق گودل، روش فوق جواب‌گو نیست. استفاده از نقیضِ گودل، یعنی $n_G$ در کنار ترکیب عطفی گودل، یعنی $T_G(a,b) = \min\{a,b\}$، حداقل بدلیل اینکه باعث ایجاد خاصیت جابجایی در تابع استلزام می‌شود، مناسب نیست.

$$n_G\left(T_G\big(0.2, n_G(0.6)\big)\right) = n_G\big(T_G(0.2,0)\big) = n_G(0) = 1$$
$$n_G\left(T_G\big(0.6, n_G(0.2)\big)\right) = n_G\big(T_G(0.6,0)\big) = n_G(0) = 1$$

اما برای عملگر استلزام می‌توان تعریفی ارائه کرد که در دسته بزرگی از منطق‌های چندارزشی که ترکیب عطفیِ آنها نرم مثلثی است، کاربرد دارد. قاعده وضع مقدم (ponens modus) در منطق کلاسیک بیان می‌کند از درستی دو گزاره $\varphi$ و $\varphi \to \psi$ گزاره $\psi$ نتیجه می‌شود. اگر قاعده وضع مقدم را در منطق چند ارزشی با کمک رابط‌های منطقی & و → («و قوی» و «اگر ... آنگاه») نمایش دهیم و فرض کنیم این قاعده برقرار است، آنگاه یک همانگو به صورت $(\varphi\&(\varphi \to \psi)) \to \psi$ را باید داشته باشیم. اکنون چنانچه تعبیر & یک نرم مثلثی باشد و تعبیر → نیز تابع استلزام $I$ (با خواص ذکر شده بالا) باشد، آن‌گاه چنان‌چه $\varphi \to \psi$ حداقل به اندازه $w$ راست باشد، یعنی $I(\varphi,\psi) \geq w$، برهان زیر نشان می‌دهد که بایستی $T(\varphi, w) \leq \psi$.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $T(\varphi, I(\varphi,\psi)) \geq T(\varphi, w)$ | صعودی بودن ترکیب عطفی روی مولفه‌ها |
| 2. | $I(T(\varphi, I(\varphi,\psi)),\psi) \leq I(T(\varphi,w),\psi)$ | **نزولی بودن استلزام روی مولفه اول** |
| 3. | $I(T(\varphi, I(\varphi,\psi)),\psi) = 1$ | **همانگو بودن** $(\varphi \& (\varphi \to \psi)) \to \psi$ |
| 4. | $I(T(\varphi,w),\psi) = 1$ | **خط ۲ و ۳ برهان** |
| 5. | $T(\varphi, w) \leq \psi$ | **راست بودن جمله شرطی «به انتفاء مقدم»** |

و البته عکس این موضوع نیز درست است. لذا با داشتن نـرم مثلثـی $T: [0,1]^2 \to [0,1]$ می‌توان عملگر استلزام $I: [0,1]^2 \to [0,1]$ را عملگری تعریف کرد کـه دارای ایـن خاصـیت است که به ازای هر $a, b, c$،

$(*)$ $T(a,c) \leq b$ اگر فقط و اگر $I(a,b) \geq c$.

البته هر نوع نرم مثلثی منجر به تعریف یک استلزام نمی‌شود. برای نرم‌های مثلثی پیوسـته و هم‌چنین نرم‌های مثلثی پیوسته از چپ می‌توان ثابت کرد که عملگر منحصر بفرد $I$ وجـود دارد که در شرط فوق صدق می‌کند. نکته جالبی که اولین بـار توسـط هایـک (Petr Hájek) منطــق‌دان فقیــد مجارســتانی در ســال ۱۹۹۸ در کتــاب «فــرا ریاضــیات منطــق فــازی» (Hajek, 1998) به آن اشاره شده است این است که در دو منطـق لوکاسـیویچ و گـودل، اگـر عملگر «و قوی» به ترتیب با $\max(0, x+y-1)$ و $\min(x,y)$ تعبیر شود، آنگـاه هـر دوی این تعابیر نرم‌های مثلثی پیوسته هستند و بعلاوه عملگر استلزامی که با توجـه بـه معادلـه $(*)$ از روی این نرم‌های مثلثی بدست می‌آید، دقیقاً همان عملگر اسـتلزامی اسـت کـه در منطـق لوکاسیویچ و گودل مورد استفاده قرار گرفته است و بعلاوه عملگر نقیضِ مـورد اسـتفاده در هر دو منطقِ لوکاسیویچ و گودل از روی عملگـر اسـتلزامِ آنهـا بـه صـورتِ $\neg\varphi := \varphi \to \bar{0}$ قابل‌تعریف است. هایک با الهام گرفتن از این موضوع، رده بزرگی از منطق‌های چند ارزشـی موسوم به منطق چند ارزشی پایه (basic logic) را معرفی کرد. در منطق پایه سه رابط منطقـی اصـلی $\{\&, \to, \perp\}$ وجـود دارنـد کـه تعبیـر & مـی‌توانـد هـر نـرم مثلثـی پیوسـته دل‌خـواه $T: [0,1]^2 \to [0,1]$ باشد و تعبیر $\to$ نیز عملگـر منحصـر بفـردی هسـت کـه از فرمـول $(*)$ به‌دست می‌آید، که آن را جفت الحاقی نرم مثلثی $T$ می‌نامند و تعبیر $\perp$ نیز ثابت صـفر اسـت. هایک نشان داد منطق‌هـای لوکاسـیویچ و گـودل حالـت خاصـی از منطـق پایـه هسـتند. او به‌علاوه نشان داد در همه منطق‌های پایه، صرفنظر از اینکه نرم مثلثی پیوسته $T$ چه ضـابطه‌ای دارد، چنانچه رابط‌های منطقیِ $\wedge$ و $\vee$ به صورتِ

| | |
|---|---|
| $\varphi \wedge \psi$ | $\varphi \& (\varphi \to \psi)$ |
| $\varphi \vee \psi$ | $:= ((\varphi \to \psi) \to \psi) \wedge ((\psi \to \varphi) \to \varphi)$ |

تعریف شوند آنگاه تعبیر آنها به ترتیب $min$ و $max$ خواهد بود. دو تابع $min$ و $max$ در اکثر منطق‌های چند ارزشی به عنوان تعابیری برای «و» و «یا» در نظر گرفته می‌شوند و لذا وجود این توابع در تعبیرهای رابط‌های منطقی در منطقِ پایه، یکی دیگر از محاسن این منطق محسوب می‌شود.

علاوه بر این هایک با اصل‌بندی منطق پایه و تعریف مفهوم BL–جبر و هم‌چنین تعریف معنی‌شناسی مبتنی بر BL–جبرها برای منطق پایه، نشان می‌دهد نگارشی از قضیه تمامیت برای منطق پایه برقرار است. برای مطالعه بیشتر در این مورد می‌توانید به (Hajek, 98) یا (اسلامی، ۱۳۹۱) مراجعه کنید.

در سال ۲۰۰۱ تعمیمی از منطق پایه به نام «منطق نرم مثلثی منفرد» (monoidal t-norm logic) ارائه شده که در آن شرطِ پیوستگی نرم مثلثیِ $T$ به پیوستگیِ از چپ کاهش داده شد ولی در عوض چون دیگر تابع $min$ توسط رابط‌های منطقیِ $\{\&, \to, \bot\}$ قابل ساخته شدن نبود، در این منطق رابط‌های منطقیِ اصلی به صورت $\{\&, \to, \wedge, \bot\}$ در نظر گرفته شدند که $\&$ با یک نرم مثلثی پیوسته از چپ، $\to$ با جفت الحاقی نرم مثلثی $T$، $\wedge$ با تابع $min$، و $\bot$ با تابع ثابت صفر تعبیر می‌شد (Esteva and Godo, 2001).

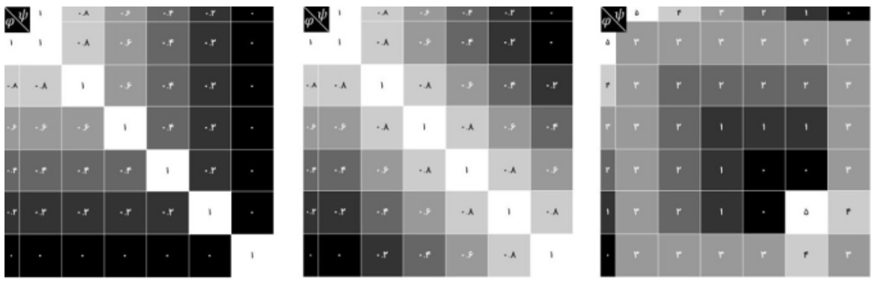
## ۷.۸ هم‌ارزی

رابط منطقی $\leftrightarrow$ که آن را به نام هم‌ارزی نیز می‌شناسند، معمولاً به صورت ترکیب عطفی $\varphi \to \psi$ و $\psi \to \varphi$ تعریف می‌شود و در بیشتر منطق‌های چند ارزشی دو خاصیت زیر را دارد:

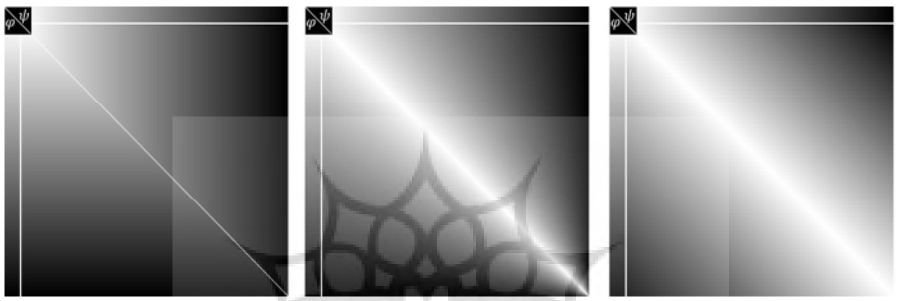
۱. جابجایی

۲. هرگاه $\varphi$ و $\psi$ ارزش یکسانی داشته باشند، $\varphi \leftrightarrow \psi$ دارای ارزش راست است.

در دو تصویر ۱۶، جدول درستی $\leftrightarrow$ را برای دو حالت ۶ ارزشی و بی‌نهایت ارزشی در بعضی از منطق‌ها می‌بینید.



**شکل ۱.۱۶. تابع درستی رابط منطقی هم‌ارزی برای منطق‌های پُست، لوکاسیویچ، و گودلِ ۶ ارزشی**



**شکل ۲.۱۶. تابع درستی رابط منطقی هم‌ارزی برای منطق‌های لوکاسیویچ، حاصل‌ضربی و گودلِ بی‌نهایت ارزشی**

منطق حاصل‌ضربی که در شکل ۱۶–۲ از آن نام برده شده است، نوعی منطق پایه مبتنی‌بر نرم مثلثی حاصل‌ضربی با ضابطه $T(x,y) = x.y$ می‌باشد که با توجه به ضابطه این نرم مثلثی، معنی‌شناسی این منطق فقط می‌تواند بر اساس مجموعه‌های نامتناهی از مقادیر ارزش باشد.

می‌بینیم در همه منطق‌های ذکرشده در شکل ۱۶، $\leftrightarrow$ خاصیت جابه‌جایی دارد. به‌علاوه برای همه این منطق‌ها بجز منطق پُست خاصیت $\varphi \leftrightarrow \varphi = 1$ نیز برقرار است.

خاصیت $\varphi \leftrightarrow \varphi = 1$ برای رابط منطقی هم‌ارزی را می‌توان به یک خاصیت عام‌تر نیز تعمیم داد. در واقع با توجه به شکل ۱۶، $\leftrightarrow$ بنوعی یک معیار تشابه بین گزاره‌ها تعریف می‌کند که هر چقدر ارزش $\varphi \leftrightarrow \psi$ راست‌تر باشد، آن دو گزاره به هم مشابه‌تر هستند و هرچقدر ارزش $\varphi \leftrightarrow \psi$ دروغ‌تر باشد، آن دو گزاره با هم تفاوت بیشتری دارند. نویسنده اول این مقاله با استفاده از این واقعیت، توپولوژی‌هایی روی مجموعه ارزش‌های درستی و نیز ساختارها در منطق پایه مرتبه اول تعریف کرده است که اولاً منجر به پیوستگی

تعبیرِ همه رابط‌های منطقی در منطق پایه تحتِ توپولوژیِ جدید روی مجموعه ارزش‌های درستی می‌شود و ثانیاً امکان اثبات قضیه فشردگی را برای منطق پایه در دو حالت گزاره‌ای و مرتبه اول در حالت کلی فراهم می‌کند که مقاله مربوط به این نتایج هنوز تحت‌داوری است.

برای مطالعه بیشتر در مورد عملگرهایی که برای تعبیر رابط‌های منطقی در منطق‌های چند مقداری به کار می‌روند می‌توانید به (اسلامی، ۱۳۹۱) و (Klement, et al., 2013) مراجعه کنید.

## ۹. نتیجه‌گیری و نکات پایانی

در این نوشتار پس از مرور سیر تکاملی منطق‌های چند ارزشی در حالت گزاره‌ای تا سال ۱۹۶۵، سعی کردیم مهمترین خاصیت‌های مجموعه‌های ارزش و نیز رابط‌های منطقی را در منطق‌های چند ارزشی بررسی کنیم. درعین اینکه توجه به هر یک از موضوعات موردبحث کارهای پژوهشی مستقل و فراوانی را می‌طلبند، ولی موضوع کلی مقاله در حالت منطق‌های چند ارزشیِ مبتنی بر محمولات و نیز منطق‌های چند ارزشیِ وجهی در این‌جا انجام نشد و نیازمند یک کار پژوهشی مستقل است. ما اشاراتی محدود به موضوع اصل‌بندی در منطق‌های چند ارزشی داشتیم و لذا این مطلب هم در کنار بررسی ارتباط‌های بین مفهوم اثبات با معنی‌شناسی در منطق‌های چند ارزشی در حالت گزاره‌ای و در حالت مرتبه اول می‌تواند موضوع یک تحقیقِ دیگر در ادامه این کار باشد.

## پی‌نوشت‌ها

۱. یک ارزیابی تابعی است از «مجموعه گزاره‌های اتمی» بتوی «مجموعه ارزش‌های درستی» که به هر گزاره اتمی یک ارزش درستی منصوب می‌کند و با توجه به جداول درستیِ مربوط به رابط‌های منطقی، به صورت یکتایی به یک تابع روی «مجموعه همه گزاره‌ها» تعمیم می‌یابد.

## کتاب‌نامه

اسلامی، ا. (۱۳۹۱)، منطق فازی و کاربردهای آن، انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان.

خاتمی، س. م. ا. و پورمهدیان، م. (۱۳۹۸)، "منطق پیوسته"، منطق پژوهی، شماره ۱۹، ۸۹–۱۲۰.

McKeon, R. ed. (1941), The Basic Works of Aristotle, New York, Random House.

Boehner, P. ed. (1945), The Tractatus de Praedestinatione et de Praescientia Dei et de Futuris Contingentibus of William Ockham, O.F.M. New York, The Franciscan Institute.

Baudry, L. ed. (1989), The Quarrel over Future Contingents, Dordrecht, Kluwer.

MacColl, H. (1906), Symbolic Logic and Its Applications. London, Longmans, Green.

Hartshorne, C. and Weiss, P. ed. (1933), Collected Papers of Charles Sanders Peirce, vol. 4 ,Cambridge, MA, Harvard.

Venanzio, R. and Vergauwen, R. (1997), "Possible worlds with impossible objects: The imaginary logic of N. A. Vasil'ev", Logique Et Analyse, Vol. 40, No. 159, 225–248.

Łukasiewicz, J. (1920), "On three-valued logic", In Borkowski, 1970, 87–88.

Borkowski , L. ed. (1970). Jan Łukasiewicz Selected Works, Amsterdam, North-Holland.

Łukasiewicz, J. (1925), "Demonstration of compatibility of the axioms of the theory of deduction", Annales de la Société Polonaise de Mathématique, Vol. 3, 149.

Wajsberg, M. (1931), "Axiomatizationof the three-valued propositional calculus", In McCall, 1967, 264–284.

McCall ,S. ed. (1967), Polish Logic 1920–1939, London, Oxford Univ. Press.

Rose, A. and J. B. Rosser, (1958), "Fragmentsof manyvaluedstatement calculi", Trans AMS., Vol. 87, 1–53.

Meredith, C. A. (1958), "The dependence of an axiom of Łukasiewicz", Trans AMS., Vol. 87, 54.

Chang, C. C. (1958), "Proof of an axiom of Lukasiewicz", Trans AMS., Vol. 87, 55-56.

Stone, M. H. (1936). "The theory of representations for Boolean algebras", Trans AMS., Vol. 40, 37–111.

Chang, C.C. and Keisler, H.J. (1966), Continuous Model Theory, Princeton University Press.

Post, E. L. (1921), "Introduction to a general theory of elementary propositions", American J. Math. Vol. 43, No. 3, 163–185.

Ben Yaacov, I. and Berenstein, A. and Henson C.W. and Usvyatsov, A. (2008), "Model theory for metric structures", Model theory with applications to algebra and analysis, Vol. 2, London Mathematical Society Lecture Note Series, Vol. 350, Cambridge University Press, 315-427.

Gottwald, S. (2001), A Treatise on Many-valued Logics, Baldock, UK:Research Studies Press.

Mancosu, P. ed., (1998), From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s, NewYork: Oxford Univ. Press.

Feferman, S. and Dawson, J. and Kleene, S. and Moore, G. and Solovay, R. and Heijenoort, J. ed., (2001), Kurt Godel Collected Works, Vol. I, Publications 1929-1936, NewYork: Oxford Univ. Press.

Dummett, M. (1959), "A propositional calculus with denumerable matrix", J. Symb. Logic., Vol. 24, No. 2, 97–106.

Bochvar, D. A. (1938), Trans. Bergmann, M. (1981), “On a three-valued logical calculus and its application to the analysis of the paradoxes of the classical extended functional calculus”, History and Philosophy of Logic, Vol. 2, 87–112.

Moh , S. K. (1954), “Logical paradoxes for many-valued systems”, .J Symb. Logic, Vol. 19, 37–40.

Kleene, S. C. (1938), “On a notation forordinal numbers”, J. Symb. Logic, Vol. 3, 150–155.

Kleene, S. C. (1952), Introduction to Metamathematics, Amsterdam: North-Holland.

Zadeh, L. A. (1965), “Fuzzy sets”, Inf. Control, Vol. 8, No. 3, 338–353.

Goguen, J. A. (1968-69), “The logic of inexact concepts”, Synthese, Vol. 19, No. 3-4, 325–73.

Hájek, P. (1998), Metamathematics of Fuzzy Logic, Springer Science.

Tarski, A. (1936) , “The concept of truth in formalized languages”, In Woodger, 1956: 152–278.

Woodger, J. H., ed. (1956), Logic, Semantics, Metamathematics: Papers from 1923 to 1938 by Alfred Tarski. Oxford,

Chang, C. C. (1959), “A New Proof of the Completeness of the Lukasiewicz Axioms”, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 93, No. 1, pp. 74-80.

Menger, K. (1942), “Statistical metrics”, Proc. Natl. Acad. Sci. USA., Vol. 28, No. 12, 535–37.

Esteva, F. and Godo, L. (2001), “Monoidal t-norm based logic: Towards a logic of left-continuous t-norms”, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 124, 271–288.

Klement, E. P. and Mesiar, R. and Pap, E. (2013), Triangular norms, Springer Science & Business Media.