

***Effect of Teaching Problem Solving with Emphasis on Drawing Strategy  
upon word problems Solving Performance of Seventh Grade Students***

E. Reyhani , Mathematics Dept. Faculty of Science, Shahid Rajaei Teacher Training University, Tehran, Iran

e\_reyhani@yahoo.com

N. yaftian, Mathematics Dept. Faculty of Science, Shahid Rajaei Teacher Training University, Tehran, Iran

A. rezaei, Ph. D Student in Mathematics Education, Science and Research branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran & Mathematics Teacher in Hamedan

**Abstract**

The main purpose of present study was to investigate the effect of teaching problem solving using drawing strategy on word problem Solving performance of seventh grade students. This study was fundamental in terms of purpose and in terms of implementation a quasi-experimental method using pre-test and post-test design with the control group. The number of students in the experimental group and the control group was 207 and 216, respectively. To determine reliability, in a implementation, the questions of both tests were performed on a sample of 30 students, and Cronbach's alpha of the pre-test questions was 0.81 and the post-test questions was 0.77, which was desired. Results showed that students usually use non-formal strategies to solve word problems. However, after learning the drawing strategy, they prefer to use this strategy rather than problem-solving strategies. They also draw various shapes to solve problems. This means that the shapes are not unique, and students draw the shape according to their personal and previous experiences. In addition, using parametric t-test, the difference between the problem-solving performance of the experimental and control group students in the pre-test and post-test was significant, meaning that the experimental group students performed better in solving word problems.

**Keywords:** Mathematics Education, Seventh Grade, Problem Solving, word Problem, Drawing Strategy, Model Method.

رویکردهای نوین آموزشی

دانشکده علوم تربیتی و روان‌شناسی دانشگاه اصفهان

سال چهاردهم، شماره ۲، شماره پیاپی ۳۰، پائیز و زمستان ۱۳۹۸

ص ۸۷-۱۰۸ تاریخ دریافت: ۹۸/۶/۲۷ تاریخ پذیرش: ۹۹/۳/۱۲

شناسه دیجیتال (DOI): 10.22108/nea.2020.119242.1405

## تأثیر آموزش حل مسئله با تأکید بر راهبرد رسم شکل و روش مدل بر عملکرد حل مسئله‌ی کلامی دانش‌آموزان پایه هفتم

ابراهیم، ریحانی، گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران

نرگس یافتیان، گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران

اعظم رضانی، دانشجوی دکتری آموزش ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات تهران و دبیر ریاضی شهر همدان، ایران

### چکیده

هدف اصلی پژوهش حاضر، بررسی تأثیر آموزش راهبرد رسم شکل و روش مدل به دانش‌آموزان پایه‌ی هفتم بر عملکرد حل مسئله‌ی کلامی آن‌ها است. این مطالعه از نظر هدف بنیادین و از نظر اجرا روش شبه آزمایشی با استفاده از طرح پیش‌آزمون و پس‌آزمون همراه با گروه گواه بوده است. تعداد دانش‌آموزان گروه آزمایش و گروه گواه به ترتیب ۲۰۷ و ۲۱۶ نفر بود. برای تعیین پایایی، در یک اجرای مقدماتی، سوالات هر دو آزمون بر روی یک گروه ۳۰ نفری به عنوان نمونه اجرا شد و آلفای کرونباخ سوالات پیش‌آزمون ۰/۸۱ و سوالات پس‌آزمون ۰/۷۷ به دست آمد که در سطح مطلوبی بود. نتایج به دست آمده از این تحقیق نشان می‌دهند که دانش‌آموزان برای حل مسائل کلامی، معمولاً از راهبردهایی به غیر از رسم شکل استفاده می‌کنند. اما، پس از آموزش راهبرد رسم شکل، استفاده از این راهبرد را نسبت به سایر راهبردهای حل مسئله ترجیح می‌دهند. همچنین، شکل‌های متنوعی برای حل مسائل رسم می‌کنند. این بدان معناست که شکل‌ها، یکتا نیستند و هر فرد، متناسب با تجربیات شخصی و قبلی خود به رسم شکل مبادرت می‌ورزد. ضمناً به کمک آزمون پارامتریک  $t$ ، تفاوت عملکرد حل مسئله‌ی دانش‌آموزان گروه آزمایش و گواه در پیش‌آزمون و پس‌آزمون معنی‌دار شد یعنی دانش‌آموزان گروه آزمایش عملکرد بهتری در حل مسائل کلامی داشته‌اند.

**واژه‌های کلیدی:** آموزش ریاضی، پایه هفتم، حل مسئله، مسئله‌ی کلامی، راهبرد رسم شکل، روش مدل.

نویسنده مسئول

## مقدمه

تاکنون ریاضیدانان و آموزشگران ریاضی تعاریف متعددی از «مسئله» مطرح کرده‌اند. از نظر پولیا<sup>۱</sup> (۱۹۶۸)، ترجمه شهریار، (۱۳۷۹) مسئله عبارت است از «ضرورت جست‌وجوی آگاهانه وسیله مناسبی، برای رسیدن به هدفی که در بدو امر دسترس‌ناپذیر به نظر می‌رسد. درواقع، حل مسئله به معنای پیدا کردن این وسیله است» (همان: ۲۰۶). به اعتقاد شونفلد<sup>۲</sup> (۱۹۸۵)، نیز مسئله به موقعیت‌های ناشناخته‌ای ارجاع داده می‌شود که افراد به ابزار از پیش آماده‌ای برای حل دسترسی ندارند. درواقع، مسئله موقعیتی است که فرد بلافاصله نمی‌تواند به جواب مسئله دست یابد، اما احتمالاً پس از صرف مدت زمانی - که به عوامل مختلفی از جمله مهارت مسئله‌حل‌کن، میزان دانش او درباره مسئله مدنظر یا داشتن تجربه قبلی در مواجهه با مسئله مشابه، بستگی دارد - پاسخ مسئله را می‌یابد. بدیهی است مسئله، مفهومی نسبی است؛ بدین معنا که ممکن است موقعیتی برای یک فرد مسئله باشد، ولی همان موقعیت برای فرد دیگری، تمرین عادی و برای ریاضی‌دان، یک یادآوری محسوب شود.

برای اینکه بتوان مسئله پیش‌رو را حل کرد، می‌توان از راهبردهای مختلفی از جمله راهبرد رسم شکل، جدول نظام‌دار، الگویابی، حدس و آزمایش، حل وارونه، تشکیل معادله و ... استفاده کرد. درواقع، حل مسئله هنر است و هدف از آموزش حل مسئله به منزله نوعی هنر این است که توانایی‌های دانش‌آموزان توسعه یابد تا مسئله‌حل‌کن‌های ماهری شوند. آموزش حل مسئله مشکل است، حل مسئله همان‌قدر که برای معلم وقت‌گیر و سخت است، برای دانش‌آموز نیز وقت‌گیر و سخت است (گیلک و گویا، ۱۳۸۵). پولیا و شونفلد به تفصیل درباره حل مسئله و راهبردهای رسیدن به پاسخ صحیح مسئله سخن گفته‌اند. به اعتقاد شونفلد (۱۹۸۵)، راهبردهای ریاضی‌آفوننی هستند که حل‌کنندگان ماهر به کار می‌بندند تا در تکالیف مسئله‌محور پیشرفت کنند. «مسئله مسئله‌حل‌کن‌های خیره در طول مطالعات ریاضی خود، به‌خاطر دست‌وپنجه نرم کردن با مسائل ریاضی، شگردها و حیل‌هایی را برای گونه‌های به‌خصوصی از مسائل به دست آورده‌اند» (روزدار، ۱۳۸۵: ۲۴)؛ که این شگردها به آنان در حل مسائل مختلف کمک شایانی می‌کند و درواقع، رویارویی با انواع مختلف مسئله و راهبردهای متفاوتی که قبلاً برای حل به کار برده‌اند، آنها را به مسئله‌حل‌کن‌های ماهر مبدل ساخته است.

از بین راهبردهای مختلف حل مسئله، راهبرد رسم شکل یکی از مؤثرترین راهبردهای حل مسئله به شمار می‌آید (پخون<sup>۳</sup> و همکاران، ۲۰۱۶؛ مگلیکو<sup>۴</sup>؛ کور<sup>۵</sup>؛ کور<sup>۶</sup>؛ کور<sup>۷</sup>، ۲۰۱۹ و کور، ۲۰۱۵). آموزش مهارت‌های حل مسئله در برخی از سیستم‌های آموزشی، معمولاً مبتنی بر راهبرد رسم شکل و روش مدل است و دانش‌آموزان مدارس ابتدایی با شیوه‌های واقعی و دیداری آموزش می‌بینند تا بتوانند مسائل کلامی حساب و جبر را حل کنند. روش مدل [رسم شکل]، ابزاری کارآمد برای حل مسائل کلامی در حساب و جبر شامل اعداد صحیح، کسرها، نسبت‌ها و درصدهاست. اگر دانش‌آموزان به ابزارهایی برای درک مسائل کلامی مجهز شوند - ممکن است مسائل کلامی ساده در حساب یا جبر باشد - ساختار اساسی مسئله روشن‌تر خواهد شد. وقتی دانش‌آموزان ساختار اساسی مسئله را درک کنند، احتمال بیشتری دارد که بتوانند

1- Polya  
2- Scheonfeld  
3- Strategy  
4- Heuristic  
5- Pehkonen  
6- Maglicco  
7- Kaur  
8- Model- Method

مسئله را حل کنند (خو، ۱۹۸۷ نقل شده در فونگ و لی، ۲۰۰۹). با توجه به آنکه دانش آموزانی که معمولاً برای حل مسئله از این روش استفاده می‌کنند، از سال‌های اولیه دبستان با این روش آموزش می‌بینند، به تبع آن، غالباً در حل مسئله موفق هستند. استفاده مداوم و منسجم از یک بازنمایی با گذشت زمان می‌تواند با تمرکز بر روابط ریاضی و فرایندهای حل مسئله، درک دانش آموز و توانایی حل مسئله او را بهبود روزافزون بخشد (موراتا، ۲۰۰۸). بدیهی است برای آنکه دانش آموزان در حل مسئله موفق باشند، باید آموزش‌های لازم در این زمینه را دیده باشند. لازمه این امر آن است که معلمان قبل از ورود به کلاس درس از آموزش‌های کافی و مطلوبی برخوردار شده باشند. بی‌تردید وقتی معلمان در زمینه حل مسئله توانایی کافی کسب کنند، در انتقال این توانایی به دانش آموزان نقش مؤثرتری ایفا می‌کنند. تغییر در رفتار و رویه‌های معلم تنها در صورتی می‌تواند پایدار و مؤثر باشد که معلمان کاملاً در برنامه‌ریزی و اجرای پروژه‌ها مشارکت داشته باشند.

مسئله اصلی پژوهش حاضر، از آنجا هویدا شد که پژوهشگران در حین تجربه‌های آموزشی خود ملاحظه کرده بودند که اکثر دانش آموزان از حل کردن مسائل چالش‌برانگیز و خصوصاً کلامی ریاضی واهمه دارند و حاضرند تعداد زیادی سؤالات محاسبه‌ای جبر و یا حساب حل کنند، ولی حتی با یک مسئله چالش‌برانگیز کلامی ریاضی مواجه نشوند؛ زیرا به نظر آنها راه‌حل سؤالات محاسبه‌ای جبر یا حساب روتین و مشخص است و بیشتر اوقات طبق دانش رویه‌ای و گاهی مفهومی، مسئله را حل می‌کنند؛ اما هنگام مواجه شدن با مسئله کلامی نمی‌دانند از چه روشی برای حل باید استفاده کنند. در برخی مواقع، برای حل مسئله ریاضی، بدون اینکه درک درستی از مسئله داشته باشند، به یافتن کلمات کلیدی مسئله روی می‌آورند و سپس با توجه به آنها شروع به حل می‌کنند که با این روش، همواره جواب صحیح به دست نمی‌آید.

با اینکه دانش آموزان ایرانی از ابتدای دوره دبستان با حل مسئله و راهبردهای متعددی آشنا می‌شوند و در ابتدای کتاب ریاضی پایه هفتم یادآوری مختصری در این زمینه شده است، همچنان هنگامی که با یک مسئله کلامی مواجه می‌شوند، به درستی نمی‌توانند راهبرد مناسبی را برای حل مسئله انتخاب کنند. معمولاً دانش آموزان از راهبردهای متنوعی برای حل مسئله استفاده نمی‌کنند و به‌طور کلیشه‌ای، استفاده از کلمات کلیدی مسئله یا با استفاده از راهبرد حدس و آزمایش برای حل انواع و اقسام مسائل استفاده می‌کنند؛ درحالی که آنها می‌توانند در برخی مواقع برای سادگی حل، از راهبرد رسم شکل استفاده کنند.

هدف اصلی پژوهش حاضر آن است که پس از آموزش راهبرد رسم شکل با تکیه بر روش مدل به معلمان، تأثیر آن را بر عملکرد حل مسئله دانش آموزان بررسی کند. به این ترتیب که ابتدا مسائل آموزشی در جلسات مطرح شود، سپس مستقل از اینکه اعضای حاضر در جلسه از چه راهبردی برای حل مسئله استفاده می‌کنند، روش مدل برای حل ارائه شود. این مدل باعث درک بهتر مسئله می‌شود که در نهایت به حل صحیح مسئله کلامی منجر می‌شود. انتظار می‌رود با این عمل، دانش آموزان ابزاری قوی در اختیار داشته باشند و آگاهانه‌تر به حل مسئله بپردازند.

سؤالات بررسی شده در پژوهش حاضر عبارت‌اند از:

۱- دانش آموزان پایه هفتم قبل از اینکه آموزش‌های ویژه را از معلمان خود دریافت کنند، معمولاً برای حل

مسائل کلامی از چه راهبردهایی استفاده می‌کنند؟

- ۲- آیا آموزش با تأکید بر روش مدل، با معلمانی که به طور خاص این روش را آموزش دیده‌اند، باعث تغییر در راهبردهای انتخابی دانش‌آموزان آنها در حل مسائل کلامی می‌شود؟
- ۳- پس از آموزش روش مدل به کمک معلمان، عملکرد حل مسئله دانش‌آموزان و میزان توانایی آنها در حل مسائل کلامی چگونه بوده است؟

## پیشینه و چارچوب نظری تحقیق

### استفاده از راهبرد رسم شکل در حل مسئله

همان‌طور که قبلاً ذکر شد، از بین انواع مختلف راهبردها، رسم شکل یکی از مؤثرترین راهبردهای حل مسئله است (پخونن و همکاران، ۲۰۱۶؛ مگلیکو، ۲۰۱۶؛ کور، ۲۰۱۹ و کور، ۲۰۱۵). در اغلب مسائل کلامی، حل‌کننده مسئله، برای درک معنای مسئله، به رسم شکل روی می‌آورد؛ سپس در حین حل مسئله، جست‌وجو می‌کند که چگونه باید مسئله مزبور را حل کند؛ شکل به حل‌کننده مسئله کمک می‌کند بتواند مسئله را بهتر ببیند، بفهمد و سپس درباره آن فکر کند. در ابتدا دانش‌آموزان به مقداری تمرین برای یادگیری چگونگی تفسیر مسئله و رسم شکل مناسب نیاز دارند. بهتر است در شروع آموزش به دانش‌آموزان، یک مسئله ارائه شود که می‌توان با رسم یک شکل ساده آن را حل کرد؛ سپس وقتی شکل رسم شد، باید به چگونه حل کردن آن بیندیشند. مثلاً اگر برای حل کردن مسئله پس از رسم شکل به محاسبه یا استفاده از فرمول خاصی نیاز هست، این کار را انجام دهند. برتل<sup>۱</sup> (۲۰۰۹)، بیان می‌کند استفاده مناسب از نمودارها و شکل‌ها، برای درست انجام دادن یک مسئله ضروری است. همچنین سندری<sup>۲</sup> و نیکل<sup>۴</sup> (۲۰۰۶)، در تحقیق خود بررسی می‌کنند وقتی به دانش‌آموزان مسئله‌ای ریاضی برای حل ارائه می‌شود، چگونه دانش‌آموزان انواع شکل‌ها را خودبه‌خود رسم می‌کنند و چگونه معلمان می‌توانند آنان را در توسعه این مهارت‌ها برای بهتر حل کردن مسئله حمایت کنند. همچنین، آنها گفته‌اند هر شکلی برای حل هر مسئله‌ای مناسب نیست؛ به این ترتیب که بعضی از دانش‌آموزان شکل‌های پیچیده‌ای حتی برای ساده‌ترین مسائل رسم می‌کنند تا راه حل نهایی خود را در یک شکل بازنمایی کنند.

دانش‌آموزانی که روی رسم عناصر فرعی و ظاهری مسئله (مانند مژده افرادی که روی صندلی اتوبوس نشسته‌اند) تمرکز می‌کنند، ممکن است نکته ریاضی مسئله را از دست بدهند. سایر دانش‌آموزان، رسم شکل را به شیوه کاملاً متفاوتی - با هدف و نتیجه کاملاً متفاوت - به کار می‌برند. این افراد از رسم برای حل مسئله استفاده می‌کنند. برای آنان، عمل ترسیم هم فرایند است و هم محصول. در این مورد، ترسیم - یا بازنمایی - در طول حل مسئله انجام شده است. ولز<sup>۵</sup> و پونت<sup>۶</sup> (۲۰۱۳) نیز معتقدند بازنمایی‌های تصویری (غیر رسمی)<sup>۷</sup> مانند رسم کردن حیوانات با جزئیات می‌تواند فرایند بازنمایی را بسیار کند، گیج‌کننده و ناکافی جلوه دهد (شکل ۱).

1- Bertel

2- Diagrams

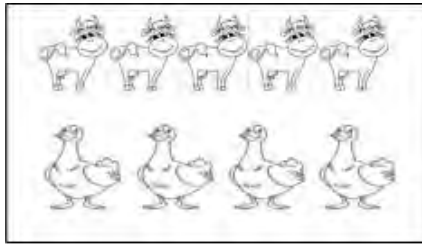
3- Sandry

4Nicol-

5- Velez

6- Ponte

7- (Informal)- pictorial- representations

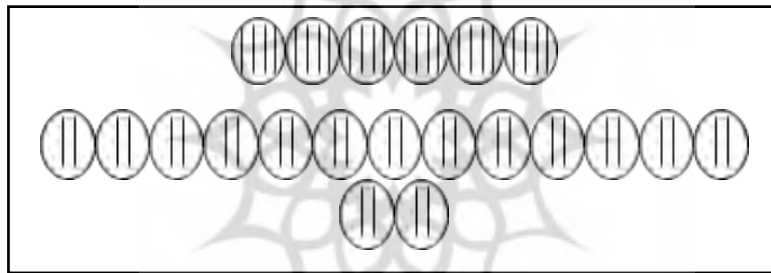


شکل ۱: رسم شکل با جزئیات غیر ضروری

همان طور که در شکل ۱ ملاحظه می شود، پرداختن به جزئیات در رسم شکل کمکی به حل مسئله نمی کند. بنابراین باید به دانش آموزان یادآوری کرد که در هنگام حل مسئله به روش رسم شکل، قسمت های اصلی مسئله را بازنمایی کنند؛ یعنی قسمتهایی که فرد را به حل مسئله رهنمون می سازد. برای بازنمایی می توان از نماد خط، دایره و ... استفاده کرد. برای مثال مسئله زیر مطرح می شود:

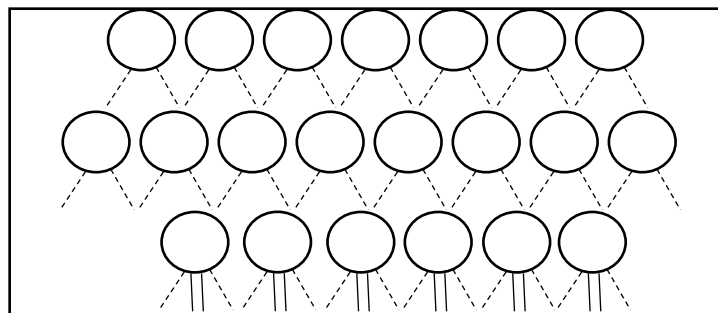
در مزرعه ای جمعاً ۲۱ مرغ و گاو وجود دارد. اگر تعداد کل پاها ۵۴ تا باشد، در این مزرعه چند مرغ و چند گاو زندگی می کنند؟ (برای گاو ۴ پا در نظر بگیرید).

برای حل، می توان به ازای هر پا یک خط و به ازای سر دایره قرار داد و اگر دو خط داخل دایره گذاشته شود، به منزله یک حیوان دوپا و اگر چهار خط داخل دایره قرار داده شود، نشانه حیوان چهارپاست (شکل ۲).



شکل ۲: رسم شکل مناسب (بازنمایی صحیح)

ترسیم درون شکل ۲، برای بازنمایی حیوانات دوپا و چهارپا کافی است و دیگر نیازی به ترسیم کل حیوان نیست؛ زیرا توجه به جزئیات و نکات غیر ضروری، مسیر حل مسئله را نه تنها هموار نمی کند، دشوارتر نیز می سازد. شکل ۳ نمونه ای دیگر از ترسیم مناسب و صحیح، برای مسئله فوق است.



شکل ۳: رسم شکل مناسب (بازنمایی صحیح)

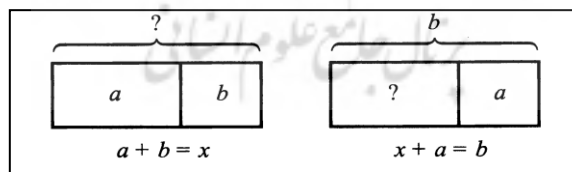
اما نکته مهم در راهبرد رسم شکل این است که استفاده از شکل مناسب در حل مسئله، که منجر به حل شود کار ساده‌ای نیست. چنانچه دوفویر<sup>۱</sup> و همکاران (۱۹۸۷)، اذعان می‌دارند اگر فرض کنیم اشکال به خودی خود ابزار مؤثر حل مسئله هستند، فریبنده است (نقل شده در دزمن<sup>۲</sup>، ۲۰۰۰).

## روش مدل

روش مدل، یکی از انواع راهبرد رسم شکل محسوب می‌شود و ترکیبی از راهبرد رسم شکل و راهبرد نمادین است. فونگک و لی (۲۰۰۹) موانع مختلفی را که دانش آموزان در به کارگیری نمادهای رسمی جبر برای بازنمایی مسائل کلامی برخورد می‌کنند، به این صورت دسته‌بندی می‌کنند: (الف) درک معنی حروف به کاررفته در جبر نمادین؛ (ب) ترجمه زبان عادی به معادلات؛ (ج) فهم ساختار معنایی در مسائل کلامی، به ویژه ماهیت روابط بین اعداد و اینکه چگونه به هم مرتبط شده‌اند؛ (د) به کار بردن اشارات معنایی براساس متن در ساختار معادلات. بنابراین با وجود این موانع، نیاز به روش دیگری شبیه روش مدل که برای دانش آموزان قابل فهم تر باشد، ضروری به نظر می‌رسد. در روش مدل لازم است تا دانش آموزان بتوانند با سه نوع مختلف بازنمایی متنی<sup>۳</sup>، تصویری<sup>۴</sup> و نمادین<sup>۵</sup> کار کنند. دانش آموزان در پایه‌های پایین تر اشیاء، تصاویر و نمادها را در روش مدل به کار می‌برند و دانش آموزان در پایه‌های بالاتر از مستطیل‌هایی متناسب با اندازه استفاده می‌کنند؛ این گونه که برای مقادیر بیشتر مستطیل‌های بزرگ تر و برای مقادیر کمتر، مستطیل‌های کوچک‌تری را رسم می‌کنند. موراتا (۲۰۰۸) باور دارد برنامه آموزشی‌ای که به طور مداوم از این نمودارهای نواری و مستطیل شکل استفاده می‌کند، نشان می‌دهد آنها ابزار مهمی برای حل مسئله ریاضی هستند.

فونگک و لی (۲۰۰۹) بعضی از مثال‌های مرجعی را که معمولاً به دانش آموزان مقطع ابتدایی تدریس شده است، به سه دسته تقسیم می‌کنند: مدل جزء- کل، مقایسه و ضرب و تقسیم. در ادامه این سه مورد بررسی می‌شود.

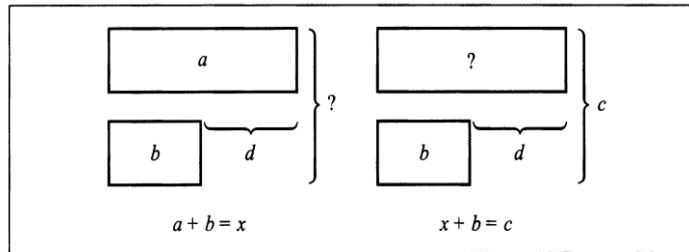
**مدل جزء-کل:** در این مدل، مسئله دارای اجزایی است که روی هم کل را تشکیل می‌دهند. اگر مقدار اجزاء در صورت مسئله مشخص و مقدار کل (حاصل جمع) مجهول باشد مدل به صورت حسابی<sup>۶</sup> است (شکل ۴، سمت چپ) و اگر مقدار یکی از اجزاء و مقدار کل (حاصل جمع) در صورت مسئله مشخص و مقدار جزء دیگر مجهول باشد، مدل به صورت جبری<sup>۷</sup> است (شکل ۴، سمت راست).



شکل ۴: مدل جزء- کل: سمت راست مدل جبری و سمت چپ مدل حسابی (فونگک و لی، ۲۰۰۹: ۲۸۶)

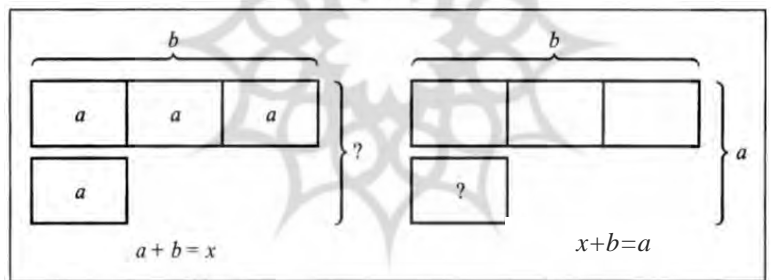
- 1- Dufoir
- 2- Diezmann
- 3- Semantic- cues
- 4- Text
- 5- Pictorial
- 6- Symbolic
- 7- The- Part-Whole- Model
- 8- Arithmetic
- 9- Algebraic

**مدل مقایسه:** در این مدل، بین دو شیء با واژه‌های «بیشتر از» و «کمتر از» مقایسه انجام می‌گیرد. در این مدل نیز، مانند مدل جزء-کل، اگر مقدار دو شیء که یکی از آنها چند واحد از دیگری بیشتر و یا کمتر است، مشخص باشد و حاصل جمع دو شیء، مجهول باشد، مدل حسابی است (شکل ۵، سمت چپ) و اگر یکی از دو شیء - شیء کمتر یا بیشتر - مجهول باشد و شیء دیگر و همچنین حاصل جمع آنها مشخص باشد مدل جبری است (شکل ۵، سمت راست).



شکل ۵: مدل مقایسه: سمت راست مدل جبری و سمت چپ مدل حسابی (فونگ و لی، ۲۰۰۹: ۲۸۷)

**مدل ضرب و تقسیم:** در این نوع مسائل، داده‌های مسئله به گونه‌ای است که یکی از آنها چند برابر دیگری یا یکی کسری از دیگری است. این مسائل نیز همانند دو مدل قبل دارای نوع حسابی و جبری هستند. نوع حسابی مربوط به زمانی است که حاصل جمع، مجهول است (شکل ۶، سمت چپ) و نوع جبری مربوط به زمانی است که یکی از اجزاء - بزرگ‌تر یا کوچک‌تر - مجهول است (شکل ۶، سمت راست).



شکل ۶: مدل‌های ضرب و تقسیم: سمت راست مدل جبری و سمت چپ مدل حسابی (فونگ و لی، ۲۰۰۹: ۲۸۹)

### پژوهش‌های مرتبط با آموزش روش مدل

روش مدل، در سال‌های اولیه دبستان در کشور سنگاپور به دانش‌آموزان آموزش داده می‌شود و این روش، جزو برنامه آموزشی این کشور محسوب می‌شود. مطالعات متعددی از جمله مطالعه فونگ و لی (۲۰۰۹) موفقیت این دانش‌آموزان را در حل مسائل ریاضی گزارش می‌دهند. ماهونی<sup>۳</sup> (۲۰۱۲)، روش مدل را در ایالت ماساچوست روی دانش‌آموزان سوم و چهارم ابتدایی به کار برد و اثر مطلوب آن را مشاهده کرد و سپس نتیجه گرفت روش مدل، نه تنها بر عملکرد حل مسئله دانش‌آموزان سنگاپوری که از ابتدا با این شیوه آموزش می‌بینند مؤثر است، بر عملکرد حل مسئله دانش‌آموزانی که قبلاً هرگز با این شیوه آموزش ندیده‌اند، نیز مؤثر است.

1- The- Comparison- Model  
2- The- Multiplication- and- Division- Model  
3- Mahoney



ماهونی (۲۰۱۲) در رساله دکتری خود، در ابتدا به یک دانش آموز کلاس سوم دبستان در ۸ جلسه آموزش داد، سپس برای تأیید کار خود، به چهار دانش آموز مختلف پایه سوم و چهارم نیز بار دیگر کار آزمایشی خود را تکرار کرد. قبل از مداخله رسم شکل، این افراد قادر به حل مسائل کلامی چالش برانگیز نبودند؛ اما پس از آموختن روش مدل، آنها توانستند بازنمایی‌های مناسب‌تری برای مسئله ارائه دهند. ترسیم این بازنمایی‌ها به شرکت کنندگان اجازه می‌داد تا روابط بین اعداد و متغیرها را در مسئله درک کرده و سپس عملیات صحیح را برای حل مسئله انتخاب کنند. مدلی که به درستی رسم شده باشد، در ۹۲ درصد مواقع به معادله صحیح منجر می‌شود. بدون این پل، بعید به نظر می‌رسد شرکت کنندگان بتوانند موفقیت زیادی در عملکرد حل مسئله خود کسب کنند. افزون بر این، هنگامی که دانش آموزان برای مسئله‌ای که با آن مواجه شده‌اند، طرح‌واره‌ای از قبل ندارند، بازنمایی آنها از مسئله غالباً نادرست است (مایر، ۱۹۸۳ نقل شده در ماهونی، ۲۰۱۲). بازنمایی‌های نادرست از مسئله ممکن است به راه حل نادرستی منجر شوند.

تسپینر و بولوت<sup>۲</sup> (۲۰۱۲) و سولاک<sup>۳</sup> (۲۰۱۰) برای موفقیت در عملکرد حل مسئله دانش آموزان، آموزش‌های مکرر در این زمینه ارائه دادند. البته آنان بر چندین راهبرد محدود تمرکز داشته‌اند و در نهایت اثر مثبت آموزش‌های خود را مشاهده کرده‌اند. رلنسمن<sup>۴</sup> و همکاران (۲۰۱۶) مطالعه خود را روی ۶۱ دانش آموز در پایه‌های نهم و دهم انجام دادند و از آنان خواستند قبل از حل مسئله، مدل توصیف شده در مسئله را ترسیم کنند. قسمتی از تحلیل آنان نشان داد که دانش راهبردی راجع به ترسیم، بر عملکرد مدل‌سازی دانش آموزان اثر مثبت می‌گذارد و درستی ترسیمات ریاضی دقیقاً به عملکرد دانش آموزان مرتبط است. پخونن و همکاران (۲۰۱۶) نیز یک پروژه تحقیقاتی درباره حل مسئله را در سال‌های ۲۰۱۰ تا ۲۰۱۲ در گروه آموزش معلمان در دانشگاه هلسینکی اجرا کرده‌اند و به‌طور ویژه بر نتایجی تمرکز کرده‌اند که ترسیم‌های دانش آموزان را در درس ریاضی نشان داده است. آنان می‌گویند شکل‌های ترسیم شده دانش آموزان، ابزاری قدرتمند برای جمع‌آوری اطلاعات از دانش آموزان، خصوصاً در دانش آموزان پایه‌های پائین‌تر است. به کمک شکل‌ها، می‌توان ابعاد مختلفی در تفکر دانش آموزان را بررسی کرد.

شین<sup>۵</sup> (۲۰۱۸) برنامه مداخله روش مدل سنگاپور را همچون پلی به سمت معادلات نمادین ریاضی، در افزایش عملکرد حل مسائل کلامی دانش آموزان ابتدایی به کار برد. یافته‌های این مطالعه حاکی از آن است که دانش آموزان از طریق بازنمایی موقعیت‌های مسائل کلامی، برای تعمیم مهارت‌های حل مسئله آماده می‌شوند.

کور (۲۰۱۹) نیز تاریخچه روش مدل را بررسی کرد. وی به بررسی کارآیی آن و نقش آن به‌عنوان یک اکتشاف در حل مسئله در برنامه درسی ریاضیات دبستان سنگاپور می‌پردازد. این یافته‌ها نشان می‌دهد این روش، ابزاری برای بازنمایی و تجسم روابط بین کمیت‌ها هنگام حل مسائل کلامی حساب است. وی می‌گوید در گذشته، مطالعاتی در کشورهای مختلف انجام شده که حاکی از آن است استفاده از این روش در یادگیری دانش آموزان مؤثر است و به دانش آموزان، خصوصاً کسانی که دارای ضعف یادگیری ریاضی هستند کمک فراوانی می‌کند؛ بنابراین، اقدامی ضروری برای تجسم و شناخت روابط در مسئله است. با تمام مزایایی که راهبرد رسم شکل در حل مسئله دارد، دارای محدودیت‌هایی نیز هست؛ از جمله، دزمن (۲۰۰۰) بر این باور است که باوجود مفید بودن راهبرد رسم شکل، این راهبرد با

1- Mayer

2- Taspinar- &amp;- Bulut-

3- Sulak-

4- Rellensman

5- Xin

دشواری‌هایی روبه‌روست و اینکه چه شکلی باید رسم کرد که برای حل مسئله مفید باشد، خود مسئله حساس و مهمی است.

بنابر مطالعات انجام‌شده راهبرد رسم شکل در حل مسائل ریاضی کمک شایان توجهی به فراگیران می‌کند و فرایند آموزش ریاضی را برای معلمان و دانش‌آموزان تسهیل می‌کند. این مطالعه بر آن است که تأثیر آموزش روش مدل و راهبرد رسم شکل را به‌طور ویژه روی دانش‌آموزان بررسی کند. ضرورت انجام چنین مطالعاتی در کشور ما با توجه به تأکید بیش از حد به آموزش مبتنی بر الگوریتم‌ها و رویه‌های ریاضی و معرفی زودرس نمادهای رسمی و ریاضیات صوری در کلاس‌های درس بیشتر نمایان می‌شود. بر مبنای پژوهش‌های انجام‌شده، آموزش راهبرد رسم شکل خصوصاً روش مدل، به دانش‌آموزان به‌ویژه در دوره‌های ابتدایی و متوسطه اول، می‌تواند نقش واسطه‌ای برای آنها به‌منظور ورود به ریاضیات رسمی در دوره‌های بعدی را فراهم سازد.

### روش و ابزار پژوهش

روش تحقیق در این پژوهش، شبه‌آزمایشی با استفاده از طرح پیش‌آزمون و پس‌آزمون همراه با گروه گواه بود. نخست ۸ معلم ریاضی شاغل در مناطق بهار، لالچین و ناحیه ۲ همدان از بین معلمان علاقه‌مند - برای سهولت در همکاری - به روش نمونه‌گیری در دسترس به‌صورت هدفمند انتخاب شدند. هر کدام از معلمان، دو کلاس از کلاس‌های پایه هفتم خود را یکی به‌عنوان گروه آزمایش و دیگری به‌عنوان گروه گواه به تصادف انتخاب کردند. دانش‌آموزان گروه آزمایش ۲۰۷ نفر و دانش‌آموزان گروه گواه ۲۱۶ نفر بودند. در واقع، این ۴۲۳ نفر (مجموع دانش‌آموزان گروه آزمایش و گروه گواه) از جامعه آماری ۲۷۳۴ نفر - کلیه دانش‌آموزان دختر مناطق بهار، لالچین و ناحیه ۲ همدان - مشغول به تحصیل در پایه هفتم سال تحصیلی ۱۳۹۲-۹۳ انتخاب شدند. در گام نخست، پیش‌آزمون از کلیه دانش‌آموزان به عمل آمد، سپس معلمان به مدت ۱۲ جلسه تحت آموزش راهبرد رسم شکل قرار گرفتند و این آموزش‌ها را فقط به دانش‌آموزان گروه آزمایش خود (۲۰۷ نفر) ارائه کردند؛ یعنی دانش‌آموزان گروه آزمایش علاوه بر مطالب کتاب درسی، روش مدل و راهبرد رسم شکل را به‌طور تخصصی به مدت ۵ ماه آموزش دیدند؛ ولی دانش‌آموزان گروه گواه فقط از آموزش‌های کتاب درسی به‌روال معمول برخوردار شدند.

معلمانی که در این پژوهش همکاری داشتند، طی ۱۲ جلسه ۹۰ دقیقه‌ای گرد هم آمدند و آموزش‌های لازم در این زمینه به آنها ارائه شد. محتوای آموزشی این جلسات با همفکری پژوهشگران تحقیق حاضر، از منابع آموزشی و پژوهشی معتبر گردآوری می‌شد. در این جلسات، نخست مسائل کلامی ریاضی مطرح و سپس از معلمان درخواست می‌شد که مسائل کلامی ارائه‌شده را با استفاده از هر نوع راه‌حل و راهبر مناسب به تشخیص خودشان حل کنند. در ادامه جلسه، انواع راهبردهای استفاده‌شده معلمان بررسی می‌شد و سپس پژوهشگران راهبرد رسم شکل مناسبی برای آن مسئله کلامی ارائه می‌دادند.

پس از چند جلسه، در نتیجه آموزش‌های ارائه‌شده، خود معلمان نیز به توانایی ارائه روش مدل و راهبرد رسم شکل مناسب دست یافتند. برنامه معلمان در کلاس‌های گروه آزمایش به این ترتیب بود که مدت ۲۰ دقیقه از کلاس‌های ۹۰ دقیقه‌ای خود را - هفته‌ای ۴۰ دقیقه، زیرا هر کلاس، در هفته از ۲ جلسه ریاضی برخوردار است - صرف آموزش راهبرد

رسم شکل می کردند؛ اما در کلاس های گروه گواه، کل ۹۰ دقیقه از کلاس درس، به مباحث کتاب درسی پرداخته می شد. پس از اتمام دوره آموزشی از کلیه دانش آموزان پس آزمون گرفته شد.

روایی صوری و محتوایی سؤالات پیش آزمون و پس آزمون را تعدادی از استادان ریاضی و آموزش ریاضی و دبیران ریاضی معرب تأیید کردند. برای بررسی پایایی سؤالات پیش آزمون و پس آزمون، نخست سؤالات روی نمونه ۳۰ نفری اجرا شد. آلفای کرونباخ سؤالات پیش آزمون ۰/۸۱ و آلفای کرونباخ سؤالات پس آزمون ۰/۷۷ به دست آمد که هر دو در سطح مطلوبی است. در این آزمون برای پاسخ های کاملاً درست نمره ۲، برای پاسخ های ناقص نمره ۱ و برای پاسخ های نادرست و سؤالات بدون پاسخ نمره صفر در نظر گرفته شد. برای تجزیه و تحلیل داده ها از آمار توصیفی و آمار استنباطی و برای پردازش و محاسبات آماری از نرم افزار spss21 استفاده شد.

### یافته های تحقیق

**سؤال اول پژوهش:** دانش آموزان پایه هفتم قبل از اینکه آموزش های ویژه را از معلمان خود دریافت کنند، معمولاً برای حل مسائل کلامی از چه راهبردهایی استفاده می کنند؟

برای بررسی راهبردهای انتخابی دانش آموزان پایه هفتم، سؤالات پیش آزمون در اختیار کل دانش آموزان (گروه آزمایش و گروه گواه) قرار گرفت؛ بدین معنا که اگر دانش آموزان با اطلاعات قبلی خود، مطابق با اهداف کتاب درسی، به حل مسئله بپردازند، معمولاً به کدام یک از راهبردهای حل مسئله روی می آورند. در ضمن از دانش آموزان خواسته شده بود از راهبردهای دلخواه خودشان استفاده کنند و اگر برای مسئله ای توانایی به کار بردن بیش از یک راه حل دارند، همه راه حل های خود را بنویسند.

نحوه پاسخگویی دانش آموزان به سؤالات پیش آزمون در جدول ۱ گردآوری شده است.

جدول ۱: راهبردهای به کار گرفته شده دانش آموزان در پیش آزمون

شماره سؤال	فراوانی و درصد	پاسخ های درست			پاسخ های ناقص				پاسخ های نادرست	بدون پاسخ	کل پاسخ ها
		رسم شکل	تجزیه و تحلیل	حکایت و آزمایش	تجزیه و تحلیل	رسم شکل	تجزیه و تحلیل	حکایت و آزمایش			
۱	فراوانی	۳	۰	۳۴	۱	۱۸	۰	۰	۲۶۵	۱۰۱	۴۲۳
	درصد	۰/۷۱	۰	۸/۰۴	۰/۲۴	۴/۲۶	۰	۰	۶۲/۶۵	۲۳/۸۸	۱۰۰
۲	فراوانی	۱	۲	۴۲	۳	۱۰	۱	۰	۲۸۱	۸۲	۴۲۳
	درصد	۰/۲۴	۰/۴۷	۹/۹۳	۰/۷۱	۲/۳۶	۰/۲۴	۰	۶۶/۴۳	۱۹/۳۹	۱۰۰
۳	فراوانی	۰	۱	۲۵	۲	۱۱	۰	۰	۲۲۴	۱۶۰	۴۲۳
	درصد	۰	۰/۲۴	۵/۹۱	۰/۴۷	۲/۶	۰	۰	۵۲/۹۶	۳۷/۸۳	۱۰۰
۴	فراوانی	۱۸	۰	۱	۴۲	۰	۰	۰	۲۶۰	۱۰۲	۴۲۳
	درصد	۴/۲۶	۰	۰/۲۴	۹/۹۳	۰	۰	۰	۶۱/۴۶	۲۴/۱۱	۱۰۰
۵	فراوانی	۳	۰	۴	۱۱	۲	۰	۰	۲۴۹	۱۵۴	۴۲۳
	درصد	۰/۷۱	۰	۰/۹۵	۲/۶	۰/۴۷	۰	۰	۵۸/۸۷	۳۶/۴۱	۱۰۰
کل	فراوانی	۲۵	۳	۱۰۶	۵۹	۴۱	۱	۱	۱۲۷۹	۵۹۹	۲۱۱۵
	درصد	۱/۱۸	۰/۱۴	۵/۰۱	۲/۷۹	۱/۹۳	۰/۰۵	۰/۰۵	۶۰/۴۷	۲۸/۳۲	۱۰۰

همان طور که ملاحظه می‌شود، اکثر دانش‌آموزان به سؤالات بالا پاسخ نادرست داده‌اند. پس از پاسخ نادرست، سؤالات بدون پاسخ، بیشترین درصد را به خود اختصاص داده است. نتایج نشان می‌دهد راهبردی که برای حل مسائل، با استقبال تعداد بیشتری از دانش‌آموزان همراه بوده، راهبرد حدس و آزمایش بوده است. راهبرد حدس و آزمایش که به‌طور کاملاً درست استفاده شده باشد، در سؤالات ۱ تا ۵ به ترتیب با استقبال ۸/۰۴، ۹/۹۳، ۵/۹۱، ۰/۲۴ و ۰/۹۵ و در کل سؤالات با استقبال ۵/۰۱ درصدی مواجه شده است. اما همان‌طور که جدول ۱ گزارش می‌دهد، در پاسخ‌های ناقص راهبرد رسم شکل با ۲/۷۹ درصد بیشتر استفاده شده است. در مسئله ۴، وضعیت متفاوت‌تری به چشم می‌خورد؛ ۴/۲۶ درصد از دانش‌آموزان رسم شکل را به‌طور کاملاً صحیح به کار برده‌اند. شاید علت این باشد که مشابه مسئله مذکور در کتاب‌های درسی به کرات دیده شده است و معمولاً به دلیل این که در صورت‌ظاهری آن مسئله، کسر به چشم می‌خورد، راهبرد رسم شکل با استقبال بیشتری مواجه شده است. به دلیل محدودیت (در تعداد صفحات مقاله)، تنها به نمونه‌هایی از راه‌حل‌های دانش‌آموزان که در مسئله ۲ پیش‌آزمون استفاده شده است، اشاره می‌شود. در این مسئله، دانش‌آموزان راهبردهای مختلفی را به کار بردند. راه‌حل‌های دانش‌آموزان در جدول ۲ گردآوری شده است.

جدول ۲: انواع راه‌حل‌های دانش‌آموزان در مسئله دوم پیش‌آزمون

سؤال دوم پیش‌آزمون: یک گاو ۱۵۰ کیلوگرم بیشتر از یک سنگ وزن دارد. وزن یک بز ۱۳۰ کیلوگرم کمتر از وزن یک گاو است. اگر وزن سه حیوان با هم ۴۱۰ کیلوگرم باشد، وزن یک گاو چقدر است؟ (فونگ و لی، ۲۰۰۹)				
راهبرد	راه‌حل دانش‌آموزان			
راهبرد زیرمسئله	وزن گاو $۸۰+۱۵۰=۲۳۰$	$۲۴۰ \div ۳=۸۰$	$۴۱۰-۱۷۰=۲۴۰$	$۱۵۰+۲۰=۱۷۰$
راهبرد رسم شکل	<p>وزن سگ</p> <p>وزن سگ ۱۵۰</p> <p>وزن سگ ۲۰ ۱۳۰</p> <p>وزن سگ <math>۲۰-۱۵۰-۴۱۰=۲۴۰</math></p> <p>وزن سگ <math>۲۴۰ \div ۳=۸۰</math></p> <p>وزن گاو <math>۸۰+۱۵۰=۲۳۰</math></p>			
راهبرد نمادین	<p><math>۳ \times \text{وزن سگ} + ۷۰ = ۴۱۰</math></p> <p><math>۳ \times \text{وزن سگ} = ۴۱۰ - ۷۰ = ۳۴۰</math></p> <p><math>\text{وزن سگ} = ۳۴۰ \div ۳ = ۸۰</math></p> <p><math>۸۰ + ۱۵۰ = ۲۳۰</math> وزن گاو</p>			
راهبرد حدس و آزمایش	نتیجه	آزمایش	وزن بز	وزن سگ
	×	$۷۰+۵۰+۲۰=۳۲۰$	۷۰	۵۰
	×	$۹۰+۷۰+۲۲۰=۳۸۰$	۹۰	۷۰
	×	$۱۱۰+۹۰+۲۴۰=۴۴۰$	۱۱۰	۹۰
	✓	$۱۰۰+۸۰+۲۳۰=۴۱۰$	۱۰۰	۸۰

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، قبل از اینکه آموزش خاصی صورت پذیرد- طبق آموزش‌های قبلی مبتنی بر کتاب درسی و بدون تأکید بر این که از راهبرد خاصی استفاده کنند- بیشترین راهبردی استفاده‌شده دانش‌آموزان، راهبرد حدس

و آزمایش بوده است. به نظر می‌رسد از نظر دانش‌آموزان راهبرد حدس و آزمایش مفیدترین راهبرد برای حل هر نوع از مسائل است.

دانش‌آموزان پایه هفتم علاوه بر اینکه در دوره دبستان با راهبردهای حل مسئله آشنا شده‌اند، در مهرماه نیز، ۸ راهبرد حل مسئله طی ۱۲ صفحه برای آنان مرور شده است؛ اما با توجه به نتایج پیش‌آزمون، مهارت‌نداشتن دانش‌آموزان در حل مسائل کلامی هویدا است. با اینکه آنها ظاهراً با ۸ راهبرد آشنا هستند، اما همچنان راهبرد حدس و آزمایش را ابزاری قوی برای حل مسئله به کار می‌گیرند. معمولاً در کتاب‌های درسی برای حل مسائل کلامی‌ای که در صورت مسئله، کسر وجود دارد از راهبرد رسم شکل استفاده می‌شود. با توجه به این موضوع شاید بتوان سبک کتب درسی و راهبردهای رایج آنها را بر حل مسئله دانش‌آموزان اثر گذار دانست.

### سؤال دوم پژوهش: آیا آموزش با تأکید بر روش مدل با معلمانی که به‌طور خاص این روش را آموزش دیده‌اند،

باعث تغییر در راهبردهای انتخابی دانش‌آموزان آنها در حل مسائل کلامی می‌شود؟

برای پاسخگویی به این سؤال، میزان استفاده دانش‌آموزان از راهبردهای مختلف در پیش‌آزمون و پس‌آزمون مقایسه می‌شود. راهبردهایی که دانش‌آموزان برای حل مسائل ریاضی، در پیش‌آزمون (قبل از شروع جلسات آموزش) به کار بردند، به تفکیک گروه آزمایش و گروه گواه در جدول‌های ۳ و ۴ آمده است.

جدول ۳: راهبردهای انتخابی دانش‌آموزان گروه آزمایش در پیش‌آزمون

شماره سؤال	فراوانی و درصد	پاسخ‌های درست				پاسخ‌های ناقص				پاسخ‌های نادرست	کل پاسخ‌ها
		تجربه	مطالعه	حدس و آزمایش	زیرمسئله	تجربه	مطالعه	حدس و آزمایش	زیرمسئله		
۱	فراوانی	۳	۰	۱۸	۰	۱	۱	۱۶	۰	۱۶۸	۲۰۷
	درصد	۱/۴۵	۰	۸/۷۰	۰	۰/۴۸	۰/۴۸	۷/۷۳	۰	۸۱/۱۶	۱۰۰
۲	فراوانی	۱	۲	۲۲	۰	۳	۰	۸	۱	۱۷۰	۲۰۷
	درصد	۰/۴۸	۰/۹۷	۱۰/۶۳	۰	۱/۴۵	۰	۳/۸۶	۰/۴۸	۸۲/۱۳	۱۰۰
۳	فراوانی	۰	۱	۱۹	۰	۲	۰	۱۰	۰	۱۷۵	۲۰۷
	درصد	۰	۰/۴۸	۹/۱۸	۰	۰/۹۷	۰	۴/۸۳	۰	۸۴/۵۴	۱۰۰
۴	فراوانی	۱۵	۰	۰	۰	۱۸	۰	۰	۰	۱۷۴	۲۰۷
	درصد	۷/۲۵	۰	۰	۰	۸/۷۰	۰	۰	۰	۸۴/۰۶	۱۰۰
۵	فراوانی	۲	۰	۳	۰	۱۰	۰	۲	۰	۱۹۰	۲۰۷
	درصد	۰/۹۷	۰	۱/۴۵	۰	۴/۸۳	۰	۰/۹۷	۰	۹۱/۷۹	۱۰۰
کل	فراوانی	۲۱	۳	۶۲	۰	۳۴	۰	۱	۱	۸۷۷	۱۰۳۵
	درصد	۲/۰۳	۰/۲۹	۵/۹۹	۰	۳/۲۹	۰/۱۰	۳/۴۸	۰/۱۰	۸۴/۷۳	۱۰۰

جدول ۴: راهبردهای انتخابی دانش‌آموزان گروه گواه در پیش‌آزمون

شماره سؤال	فراوانی و درصد	پاسخ‌های ناقص				پاسخ‌های درست			
		زیرمسئله	حلدس و آزمایش	مقایسه	رسم شکل	زیرمسئله	حلدس و آزمایش	مقایسه	رسم شکل
۱	فراوانی	۰	۲	۰	۰	۰	۱۶	۰	۰
	درصد	۰	۰/۹۳	۰	۰	۰	۷/۴	۰	۰
۲	فراوانی	۰	۲	۰	۰	۱	۲۰	۰	۰
	درصد	۰	۰/۹۳	۰	۰	۰/۴۶	۹/۲۶	۰	۰
۳	فراوانی	۰	۱	۰	۰	۰	۶	۰	۰
	درصد	۰	۰/۴۶	۰	۰	۰	۲/۷۸	۰	۰
۴	فراوانی	۰	۰	۰	۲۴	۰	۱	۰	۳
	درصد	۰	۰	۰	۱۱/۱۱	۰	۰/۴۶	۰	۱/۳۹
۵	فراوانی	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۱
	درصد	۰	۰	۰	۰/۴۶	۰	۰/۴۶	۰	۰/۴۶
کل	فراوانی	۰	۵	۰	۲۵	۱	۴۴	۰	۴
	درصد	۰	۰/۴۶	۰	۲/۳۱	۰/۰۹	۴/۰۷	۰	۰/۳۷

به دلیل اینکه در برخی سؤالات بیش از یک پاسخ داده شده بود (البته در پس‌آزمون)، تعداد کل پاسخ‌ها نیز ارائه شده است. همچنین در مواردی که سؤال بدون پاسخ رها شده بود، به دلیل اینکه در نتایج این پژوهش تأثیری نداشت، در ادامه پژوهش، پاسخ نادرست در نظر گرفته شده است.

همان‌طور که در جدول‌های ۳ و ۴ مشاهده می‌شود، اکثر قریب به اتفاق دانش‌آموزان گروه آزمایش و گروه گواه به سؤالات پیش‌آزمون پاسخ نادرست داده‌اند (۹۲/۶۹٪). در مواقعی هم که توانسته‌اند کاملاً درست مسئله را حل کنند، بیشترین راهبرد دانش‌آموزان، راهبرد حلدس و آزمایش بوده است (۴/۰۷٪) اما برای کسانی که به‌طور ناقص مسئله را حل کرده‌اند، راهبرد رسم شکل بیشترین آمار را به خود اختصاص داده است (۲/۳۱٪).

حال به راهبردهای انتخابی دانش‌آموزان در پس‌آزمون پرداخته می‌شود. راهبردهای انتخابی دانش‌آموزان گروه آزمایش و گروه گواه در پس‌آزمون آنان در جدول‌های ۵ و ۶ ارائه شده است.

جدول ۵: راهبردهای انتخابی دانش‌آموزان گروه آزمایش در پس‌آزمون

شماره سؤال	فراوانی و درصد	پاسخ‌های درست						پاسخ‌های ناقص					
		رسم‌شکل	معاذله	جدس و آرایش	زیرمسئله	روایی	مثال عددی	رسم‌شکل	معاذله	جدس و آرایش	زیرمسئله	روایی	مثال عددی
۱	فراوانی	۸۹	۴	۱۱	۱۹	۰	۰	۱۸	۲	۲	۱۶	۰	۰
	درصد	۴۲/۷۹	۱/۹۲	۵/۲۹	۹/۱۳	۰	۰	۸/۶۵	۰/۹۶	۰/۹۶	۷/۶۹	۰	۰
۲	فراوانی	۱۳۳	۰	۰	۷	۰	۰	۳۰	۰	۰	۵	۰	۰
	درصد	۶۳/۶۴	۰	۰	۳/۳۵	۰	۰	۱۴/۳۵	۰	۰	۲/۳۹	۰	۰
۳	فراوانی	۳۸	۲	۸	۴۲	۰	۰	۸	۳	۱	۱۶	۰	۰
	درصد	۱۸/۲۷	۰/۹۶	۳/۸۵	۲۰/۱۹	۰	۰	۳/۸۵	۱/۴۴	۰/۴۸	۷/۶۹	۰	۰
۴	فراوانی	۴۷	۱	۳	۳	۰	۰	۲۹	۰	۰	۰	۰	۰
	درصد	۲۲/۶۰	۰/۴۸	۱/۴۴	۱/۴۴	۰	۰	۱۳/۹۴	۰	۰	۰/۴۸	۰	۰
۵	فراوانی	۶۷	۱	۲	۱۳	۱	۱	۲۹	۱۰	۱	۰	۰	۰
	درصد	۳۲/۳۷	۰/۴۸	۰/۹۷	۶/۲۸	۰/۴۸	۰/۴۸	۱۴/۰۱	۴/۸۳	۰/۴۸	۰	۰	۰
کل	فراوانی	۳۷۴	۸	۲۴	۸۴	۱	۱	۱۱۴	۱۰	۱	۳۷	۱	۰
	درصد	۳۵/۹۶	۰/۷۷	۲/۳۱	۸/۰۸	۰/۱	۰/۱	۱۱	۱	۰/۴۸	۳/۵۶	۰/۱	۰

جدول ۶: راهبردهای انتخابی دانش‌آموزان گروه گواه در پس‌آزمون

شماره سؤال	فراوانی و درصد	پاسخ‌های درست						پاسخ‌های ناقص					
		رسم‌شکل	معاذله	جدس و آرایش	زیرمسئله	روایی	مثال عددی	رسم‌شکل	معاذله	جدس و آرایش	زیرمسئله	روایی	مثال عددی
۱	فراوانی	۲	۶	۳۲	۲۲	۰	۰	۰	۰	۰	۲	۰	۰
	درصد	۰/۹۳	۲/۷۸	۱۴/۸۱	۱۰/۱۹	۰	۰	۰	۰	۰	۸/۳۳	۰/۹۳	۰/۹۳
۲	فراوانی	۴۴	۰	۰	۱۲	۰	۰	۲۳	۰	۰	۱	۰	۰
	درصد	۲۰/۳۷	۰	۰	۵/۵۶	۰	۰	۱۰/۶۵	۰	۰	۰/۴۶	۰	۰
۳	فراوانی	۰	۲	۱۵	۲۷	۰	۰	۰	۰	۰	۱۲	۰	۰
	درصد	۰	۰/۹۳	۶/۹۴	۱۲/۵	۰	۰	۰	۰	۰	۵/۵۶	۰	۰
۴	فراوانی	۱	۱	۲	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
	درصد	۰/۴۶	۰/۴۶	۰/۹۳	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۵	فراوانی	۴	۰	۸	۸	۶	۶	۱	۶	۶	۱	۲	۱
	درصد	۱/۸۴	۰	۳/۶۹	۳/۶۹	۲/۷۶	۲/۷۶	۰/۴۶	۲/۷۶	۲/۷۶	۰/۴۶	۰/۹۲	۰/۴۶
کل	فراوانی	۵۱	۹	۵۷	۶۹	۶	۶	۲۴	۶	۶	۳۱	۲	۰
	درصد	۴/۷۲	۰/۸۳	۵/۲۷	۶/۳۸	۰/۵۶	۰/۵۶	۲/۲۲	۰/۵۶	۰/۵۶	۲/۸۷	۰/۲۸	۰/۱۹

همان‌طور که در جدول‌های ۵ و ۶ مشاهده می‌شود، عملکرد حل مسئله کل دانش‌آموزان نسبت به پیش‌آزمون پیشرفت چشمگیری داشته و تعداد پاسخ‌های نادرست کاهش یافته است؛ اما عملکرد دانش‌آموزان گروه آزمایش بهتر از عملکرد گروه گواه بوده است: پاسخ‌های نادرست در دانش‌آموزان گروه آزمایش ۳۶/۳۵٪ و در دانش‌آموزان گروه گواه ۹۳٪/۷۴ است با توجه به تأکیدی که کتاب هفتم بر راهبردهای حل مسئله دارد، توانمندی دانش‌آموزان در طول سال تحصیلی بیشتر شده است؛ خصوصاً راهبرد تشکیل معادله را که جزو مطالب کتاب پایه هفتم است و در حل مسائل کمک زیادی می‌کند نیز آموخته‌اند؛ اما با اینکه دانش‌آموزان گروه آزمایش در طول دوره آموزشی هم‌زمان با راهبرد

تأثیر آموزش حل مسئله با تأکید بر راهبرد رسم شکل و روش مدل بر عملکرد... /۱۰۲

رسم شکل، راهبرد تشکیل معادله را نیز تعلیم دیده‌اند، اما استقبالی از آن نکرده‌اند (در گروه آزمایش راهبرد رسم شکل و راهبرد تشکیل معادله به ترتیب  $۳۵/۹۶\%$  و  $۰/۷۷\%$  به طور کاملاً صحیح و  $۱۱\%$  و  $۰/۴۸\%$  به طور ناقص)، احتمالاً به دلیل کوتاه‌تر بودن و سادگی بیشتر راهبرد رسم شکل و همچنین، عمیق‌تر بودن آموزش آن استفاده از این راهبرد را ترجیح داده‌اند و تعداد بیشتری از آنان به کمک این راهبرد به پاسخ درست رسیده‌اند.

با مقایسه پس‌آزمون دانش‌آموزان گروه آزمایش و گروه گواه تأثیر آموزش با تأکید بر یک یا چند راهبرد آشکارا دیده می‌شود. براساس گزارش جدول ۵، دانش‌آموزان گروه آزمایش در پس‌آزمون بدون اینکه تأکیدی باشد که از راهبرد رسم شکل استفاده کنند، استفاده از راهبرد رسم شکل را نسبت به استفاده از سایر راهبردها ترجیح داده‌اند.

اکنون مسئله ۵ پس‌آزمون و راه‌حل‌های انتخابی دانش‌آموزان بررسی می‌شود. گفتنی است که دانش‌آموزان برای اولین بار با سؤالات پس‌آزمون روبه‌رو شده بودند و حل این سؤالات را از قبل ملاحظه نکرده بودند. نمونه‌ای از راه‌حل‌های دانش‌آموزان در مسئله ۵ پس‌آزمون، در جدول ۷ آمده است.

جدول ۷: انواع راه‌حل‌های دانش‌آموزان در مسئله پنجم پس‌آزمون

مسئله پنجم پس‌آزمون: زهرا ۳ سال از فاطمه بزرگتر و ۲ سال از محدثه کوچک‌تر است. مریم ۱ سال از فاطمه کوچک‌تر است. محدثه چند سال از مریم بزرگ‌تر است؟ (حسام، ۱۳۹۲: ۹)																																	
راه‌برد	راه‌حل دانش‌آموزان																																
رسم شکل همراه با مثال عددی (مریم یک‌ساله فرض شده است).	<table border="1"> <tr> <td>مریم</td> <td>)</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>فاطمه</td> <td>)</td> <td>)</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>زهرا</td> <td>)</td> <td>)</td> <td>)</td> <td>)</td> <td>)</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>محدثه</td> <td>)</td> <td>)</td> <td>)</td> <td>)</td> <td>)</td> <td>)</td> <td>)</td> </tr> </table>	مریم	)							فاطمه	)	)						زهرا	)	)	)	)	)			محدثه	)	)	)	)	)	)	)
مریم	)																																
فاطمه	)	)																															
زهرا	)	)	)	)	)																												
محدثه	)	)	)	)	)	)	)																										
رسم شکل	<p>محدثه و مریم ۳ سال اختلاف سن دارند.</p>																																



<p>محدثه فاطمه زهرا مریم</p>	<table border="1"> <tr> <td>سن فاطمه</td> <td>سن ۳</td> </tr> <tr> <td colspan="2">سن زهرا</td> </tr> <tr> <td>سن فاطمه</td> <td>سن ۳</td> <td>سن ۲</td> </tr> <tr> <td colspan="3">سن محدثه</td> </tr> <tr> <td>سن مریم</td> <td>۱</td> </tr> <tr> <td colspan="2">سن فاطمه = ۱+۲+۳=۶</td> </tr> </table> <p>محدثه ۶ سال از مریم بزرگ تر است.</p>	سن فاطمه	سن ۳	سن زهرا		سن فاطمه	سن ۳	سن ۲	سن محدثه			سن مریم	۱	سن فاطمه = ۱+۲+۳=۶		<p>رسم شکل</p>
سن فاطمه	سن ۳															
سن زهرا																
سن فاطمه	سن ۳	سن ۲														
سن محدثه																
سن مریم	۱															
سن فاطمه = ۱+۲+۳=۶																
<table border="1"> <tr> <td>فاطمه</td> <td>زهرا</td> <td>محدثه</td> <td>مریم</td> <td>اختلاف سن محدثه و مریم</td> </tr> <tr> <td>۱۰</td> <td>۱۳</td> <td>۱۵</td> <td>۹</td> <td>۹-۱۵=۶</td> </tr> </table> <p>مثلاً اگر فاطمه ۱۰ ساله باشد، چون زهرا ۳ سال از فاطمه بزرگ تر است، پس ۱۳ ساله می شود. زهرا ۲ سال از محدثه کوچک تر است، پس محدثه ۱۵ ساله می شود. چون مریم ۱ سال از فاطمه کوچک تر است، پس مریم ۹ ساله می شود. بنابراین محدثه ۶ سال از مریم بزرگ تر است.</p>	فاطمه	زهرا	محدثه	مریم	اختلاف سن محدثه و مریم	۱۰	۱۳	۱۵	۹	۹-۱۵=۶	<p>محدثه ۳ سال از زهرا، ۵ سال از فاطمه و ۶ سال از مریم بزرگ تر است.</p> $۱+۲+۳=۶$	<p>مثال عددی</p>				
فاطمه	زهرا	محدثه	مریم	اختلاف سن محدثه و مریم												
۱۰	۱۳	۱۵	۹	۹-۱۵=۶												
<p>فاطمه &gt; زهرا ۳ سال</p> <p>محدثه &lt; زهرا ۲ سال</p> <p>محدثه &lt; فاطمه</p> <p>مریم &gt; فاطمه ۱ سال</p> <p>سال ۶ = ۵+۱ محدثه ۶ سال از مریم بزرگ تر است.</p>	<p>روایت گونه (توضیحات نوشتاری):</p> <p>روایت گونه (با استفاده از نمادهای مقایسه‌ای):</p>	<p>روایت گونه</p>														
<p><math>A=Y-1</math>      <math>Z=?+A</math>      <math>X=زهرا, Y=فاطمه, Z=محدثه, A=مریم</math></p> <p><math>X=Z-2</math>    (۲)    <math>X=3+Y</math>    (۱)</p> <p><math>Y=Z-3-2=Z-5</math> و <math>A=Z-1-5=Z-6</math> و <math>A+6=Z</math></p> <p>محدثه ۶ سال از مریم بزرگ تر است.</p>	<p>تشکیل معادله</p>	<p>تشکیل معادله</p>														

نکته مهم این است که دانش آموزان با تحلیل مسئله بالا، خود به این نتیجه رسیده‌اند «مریم» از سایر دختران کوچک تر است و برای مریم شکل کوچک تری نسبت به بقیه رسم شده است. همان طور که ملاحظه می شود، راه حل های با استفاده از رسم شکل که برگرفته از پس آزمون دانش آموزان گروه آزمایش بوده، دارای تنوع بیشتری نسبت به پیش آزمون آنان بوده است. این موضوع نشان دهنده این است که شکل هایی که برای حل مسئله ترسیم می شوند، یکتا نیستند و هر فردی متناسب با دانش و توانایی های شخصی خود و آن تصویری که از مسئله دارد و همچنین به استناد تجربه های قبلی خود شکل رسم می کند.

همچنین غالب دانش‌آموزان گروه آزمایش و گروه گواه به سؤالات پیش‌آزمون پاسخ نادرست داده بودند. در مواردی هم که موفق به ارائه راه‌حل درست شده بودند، بیشترین راهبرد، راهبرد حدس و آزمایش بوده است. این در حالی است که دانش‌آموزان گروه آزمایش در پس‌آزمون، در صورتی که توانسته‌اند مسئله را حل کنند، راهبرد رسم شکل را بیشتر استفاده کرده بودند. البته بدون اینکه در زمان اجرای آزمون تأکیدی باشد که از این راهبرد استفاده کنند؛ اما در گروه گواه، راهبرد زیر مسئله و حدس و آزمایش، بیشتر استفاده شده است. همچنین، در هر دو گروه میزان پاسخ‌های نادرست کاهش یافته است. در توضیح این مطلب می‌توان گفت دانش‌آموزان در مدت ۵ ماه اجرای عمل آزمایشی، با مطالب بیشتری در کتاب درسی آشنا شده‌اند و به دانش ریاضی آنها اضافه شده است؛ اما پاسخگویی دانش‌آموزان گروه آزمایش بهتر از پاسخگویی دانش‌آموزان گروه گواه بوده است و پاسخ‌های نادرست آنها به مقدار بیشتری کاهش یافته است. در گروه آزمایش به‌جز سؤال ۴، تعداد پاسخ‌های نادرست، کمتر از نیمی از دانش‌آموزان بوده است، ولی در گروه گواه بیش از نیمی از دانش‌آموزان، در همه سؤالات پاسخ نادرست داده‌اند. نکته مهم این است با اینکه افزایش دانش ریاضی دانش‌آموزان گروه آزمایش همانند دانش‌آموزان گروه گواه، همگام با کتاب درسی بوده است -از جمله راهبرد مفید تشکیل معادله را هر دو گروه آموخته‌اند؛ به دلیل سادگی، کوتاه و ملموس بودن راهبرد رسم شکل، دانش‌آموزان گروه آزمایش راهبرد رسم شکل را برای حل برگزیده‌اند. این امر، نشان‌دهنده این می‌تواند باشد با توجه به اینکه استفاده از راهبردهای دیگر در بین دانش‌آموزان گروه آزمایش تقریباً شبیه پیش‌آزمون بوده است، اما درصد پاسخ‌های نادرست آنها در حل مسئله کاهش یافته است. شاید به دلیل اینکه آنان در به‌کارگیری راهبرد رسم شکل برای حل مسئله توانایی بیشتری یافته‌اند، توانسته‌اند به این موفقیت نائل شوند.

**سؤال سوم پژوهش:** پس از آموزش راهبرد رسم شکل به کمک معلمان ریاضی، عملکرد حل مسئله دانش‌آموزان

و میزان توانایی آنها در حل مسائل کلامی چگونه بوده است؟

منظور از عملکرد حل مسئله، نمره حاصل از آزمون (پیش‌آزمون و پس‌آزمون) دانش‌آموزان است؛ که نمرات آنها نشان‌دهنده میزان توانایی آنها در حل مسئله است. برای پاسخگویی به این سؤال تحقیق، لازم است نمرات دانش‌آموزان در پیش‌آزمون و پس‌آزمون آنها مقایسه شود. بنابراین از آزمون  $t$  مستقل برای مقایسه عملکرد گروه آزمایش و گواه استفاده شده است. نخست به بررسی پیش‌فرض‌های این آزمون پرداخته می‌شود.

**۱- استفاده از داده‌های نسبی فاصله‌ای:** در این پژوهش، پیش‌آزمون و پس‌آزمون به صورت آزمون تشریحی

برگزار شد و برگه‌های سؤالات را پژوهشگران تصحیح کردند. برای سهولت بررسی پاسخ‌ها فقط از سه نمره ۰، ۱ و ۲ استفاده شد.

**۲- نرمال بودن جامعه:** با توجه به اینکه عملکرد دانش‌آموزان در پیش‌آزمون مساعد نبود و نمره صفر در بین آنها زیاد

دیده شده بود، جامعه در پیش‌آزمون نرمال نبود. به همین منظور از اختلاف نمره پیش‌آزمون و پس‌آزمون در نقش متغیر در آزمون  $t$  استفاده شد. برای بررسی نرمال بودن از محاسبه چولگی و کشیدگی استفاده شده که اگر در بازه

(۲،۲-) قرار داشته باشد، به معنای نرمال بودن جامعه است (جدول ۸).

جدول ۸: بررسی نرمال بودن از طریق مقدار چولگی و کشیدگی

تعداد	چولگی	انحراف استاندارد چولگی	کشیدگی	انحراف استاندارد کشیدگی
۴۲۳	۰/۵۳۴	۰/۱۱۹	-۰/۴۰۵	۰/۲۳۷

جدول ۸ مقدار چولگی را ۰/۵۳۴ و مقدار کشیدگی را -۰/۴۰۵ - گزارش می‌دهد که هر دو مقدار در بازه (۲،-۲) قرار دارند؛ بنابراین متغیر دارای توزیع نرمال است. حال با استفاده از آزمون t مستقل نمره دو گروه آزمایش و کنترل مقایسه می‌شود. این نمره شامل اختلاف نمره پیش آزمون و پس آزمون است (جدول ۹).

جدول ۹: مقایسه واریانس و میانگین دو گروه آزمایش و کنترل

فرض برابری	فرض برابری واریانس‌ها در آزمون لوین	فرض برابری میانگین‌ها در آزمون t			
		مقدار t	درجه آزادی	سطح معناداری	بیشترین مقدار در سطح ۹۵٪ اطمینان
برابری واریانس‌ها		۱۰/۲۳۱	۴۲۱	۰/۰	۳/۳۰۰۶۸
نابرابری واریانس‌ها	۰/۰	۱۰/۱۵۰	۳۶۰/۱۸۸	۰/۰	۳/۳۰۵۱۷
					کمترین مقدار در سطح ۹۵٪ اطمینان
					۲/۲۳۶۷۶
					۲/۲۳۲۲۷

بنابر اطلاعات جدول ۹، نخست به بررسی فرض برابری واریانس‌ها با استفاده از آزمون لوین پرداخته می‌شود. باتوجه به اینکه سطح معنی‌داری در آزمون لوین صفر است، واریانس دو گروه آزمایش و گواه برابر نیست؛ یعنی داده‌ها از مفروضه یکسانی واریانس‌ها تخلف کرده است. در چنین حالتی از مقدار t جایگزینی که برای مواقع نابرابری واریانس‌ها ارائه می‌شود؛ یعنی ردیف دوم جدول استفاده می‌شود (پالانت، ۱۳۸۹). همان‌طور که در ردیف دوم ملاحظه می‌شود، سطح معناداری صفر بوده که این مقدار از ۰/۰۵ کمتر است. پس فرض صفر با ۹۵ درصد اطمینان رد و فرض پژوهش تأیید می‌شود. بدین معنا که بین نمرات دو گروه پیش آزمون و پس آزمون اختلاف معنی‌دار وجود دارد و می‌توان ادعا کرد آموزش راهبرد رسم شکل باعث بهبود عملکرد حل مسئله دانش‌آموزان شده است.

## بحث و نتیجه‌گیری

نتایج این مطالعه نشان داد که آموزش این راهبرد توانسته است بر عملکرد حل مسئله دانش‌آموزان گروه آزمایش مؤثر واقع شود. این نتیجه با مطالعات شونفلد (۱۹۸۵) همسوست که آموزش راهبردهای کمتر ولی با عمق بیشتر می‌تواند بر توانایی حل مسئله فراگیران بیفزاید. همچنین پس از آموزش راهبرد رسم شکل، افرادی وجود داشتند که توانستند شکل درست را رسم کنند، اما مسئله را تا رسیدن به جواب نهایی ادامه نداده بودند. این موضوع در تأیید مطالعه دزمن (۲۰۰۰) است که گفت با وجود مفید بودن راهبرد رسم شکل، اما این راهبرد با دشواری‌هایی روبه‌روست. مطالعه حاضر نشان می‌دهد تمرکز بر یکی از راهبردهای حل مسئله باعث بهبود عملکرد حل مسئله دانش‌آموزان شده است و این نتیجه با یافته‌های مطالعات تسپینر و بولوت (۲۰۱۲) و سولاک (۲۰۱۰) همسوست. آنها برای موفقیت در

عملکرد حل مسئله دانش آموزان، آموزش‌های مکرر در این زمینه ارائه دادند. البته با این تفاوت که آنان بر چندین راهبرد تمرکز داشته‌اند، اما در پژوهش حاضر تمرکز فقط بر راهبرد رسم شکل بوده است. در هر صورت می‌توان ادعا کرد با آموزش‌های مستمر ممکن است که قابلیت حل مسئله ارتقا یابد.

همچنین، نتایج این پژوهش در تأیید نتایجی است که ماهونی (۲۰۱۲)، رلنسن و همکاران (۲۰۱۶)، پخونن و همکاران (۲۰۱۶)، شین (۲۰۱۸)، مگلیکو (۲۰۱۶)، کور (۲۰۱۵) و کور (۲۰۱۹) به آن رسیده‌اند. آنها گفته‌اند از بین راهبردهای مختلف حل مسئله، راهبرد رسم شکل می‌تواند از مؤثرترین راهبردهای حل مسئله به شمار آید.

در مطالعه حاضر که آموزش حل مسئله، بر یک راهبرد مشخص (رسم شکل) مبتنی بود، موفقیت چشمگیری به دست آمد. به این ترتیب که دانش آموزان با حل انواع مسائل کلامی و با درگیر شدن در ترسیم شکل‌ها و مدل‌های متنوع و تجربه موقعیت‌های متفاوت، در حل مسئله توانمندی‌هایی کسب کردند و هنگام برخوردن به مسئله جدید از تجربه خوشایند قبلی استفاده کردند. البته این به معنای غیر مفید بودن سایر راهبردهای حل مسئله نیست؛ بلکه بدین معناست که آموزش راهبردها باید به صورت عمیق باشد و حل چند نمونه محدود نمی‌تواند باعث کسب مهارت کافی در به کارگیری آن راهبرد شود. قطعاً اگر برای آموزش هر کدام از راهبردهای حل مسئله، تمرکز کافی وجود داشته باشد و وقت مقتضی صرف شود، آن راهبردها نیز به خوبی و در موقعیت مناسب، دانش آموزان به کارش خواهند گرفت. باتوجه به یافته‌های این مطالعه به برنامه‌ریزان آموزشی پیشنهاد می‌شود به جای روبه‌رو کردن یکباره دانش آموزان با چندین راهبرد در یک زمان محدود، راهبردها را در طول زمان و در پایه‌های مختلف، باتوجه به توانایی‌های دانش آموزان و تمرکز کافی روی آنها آموزش دهند. در این میان از نقش بسزای معلمان ریاضی نباید غافل ماند. این بدان معنی است که در امر آموزش معلمان، آموزش حل مسئله باید جایگاه مناسب خود را پیدا کند.

## منابع

- پندی، زهره (۱۳۹۲). **ریاضیات کانگوروی ۵ و ۶**، چاپ هفتم، تهران: انتشارات فاطمی.
- پالانت، جولی (۱۳۸۹). **تحلیل داده‌های علوم رفتاری با برنامه SPSS**. اکبر رضایی (مترجم). (چاپ اول). تبریز. فروزش.
- پولیا، جورج (۱۳۷۹). **خلاقیت ریاضی**. پرویز شهریاری (مترجم، نشر اثر اصلی ۱۹۶۸). (چاپ پنجم). تهران: انتشارات فاطمی.
- حسام، بردیا (۱۳۹۲). **ریاضیات کانگوروی ۳ و ۴**. (چاپ چهارم). تهران: انتشارات فاطمی.
- حسام، بردیا و پندی، زهره (۱۳۹۲). **ریاضیات کانگوروی ۱ و ۲**. (چاپ ششم). تهران: انتشارات فاطمی.
- روزدار، علی (۱۳۸۵). آنچه لازم است درباره حل مسئله بدانیم. **رشد آموزش ریاضی**، شماره ۸۶، ۲۳-۳۸.
- ریحانی، ابراهیم (۱۳۹۱). **حل مسئله و طرح مسئله در آموزش ریاضی**. مقاله ارائه شده در دوازدهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران، سمنان.
- گیلک، زهرا و گویا زهرا (۱۳۸۵). آموزش حل مسئله ریاضی. **رشد آموزش ریاضی**، شماره ۸۶، ۲۱-۴.
- Bertel, S. (2010). *Spatial structures and visual attention in diagrammatic reasoning*, University of Bremen.

- Diezmann, C. (2000). *The difficulties students experience in generating diagrams for novel problems*. In T. Nakahara, & M. Koyama (Eds.), Proceedings of the 24th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 2, 241–248. Hiroshima.
- Murata, A. (2008). Mathematics teaching and learning as a mediating process: The case of tape diagrams. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 374-406.
- Ng, S. F., & Lee, K. (2009). The model method: Singapore children's tool for representing and solving algebraic word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 282-313.
- Kaur, B. (2019). The why, what and how of the ‘Model’ method: A tool for representing and visualising relationships when solving whole number arithmetic word problems. *ZDM*, 51(1), 151-168.
- Kaur, B. (2015). The model method: A tool for representing and visualising relationships. In X. Sun, B. Kaur & J. Novotna (Eds.), *Conference proceedings of ICMI Study 23: Primary mathematics study on whole numbers*. 448-455.
- Maglicco, R. (2016). *Can singapore's model method improve elementary student problem-solving performance? A single case study*. Northcentral University.
- Mahoney, K. (2012). *Effects of Singapore's Model Method on elementary student problemsolving performance: Single subject research*. Doctoral dissertation, Northeastern University.
- Pehkonen, E., Ahtee, M., & Laine, A. (2016). Pupils' drawings as a research tool in mathematical problem-solving lessons. *In Posing and Solving Mathematical Problems*. Springer, Cham. 167-188.
- Rellensmann, J., Schukajlow, S., & Leopold, C. (2017). Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance. *Educational Studies in Mathematics*, 95(1), 53-78.
- Saundry, C., & Nicol, C. (2006). Drawing as problem-solving: Young children's mathematical reasoning through pictures. *In Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. International Group for the Psychology of Mathematics Education, Prague. 5, 57-63.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL: Academic Press.
- Sulak, S. (2010). Effect of problem solving strategies on problem solving achievement in primary school mathematics. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 9, 468-472.
- Taspinar, Z., & Bulut, M. (2012). Determining of problem solving strategies used by primary 8, grade students' in mathematics class. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 46, 3385-3389.
- Xin, Y. P. (2019). The effect of a conceptual model-based approach on ‘additive’ word problem solving of elementary students struggling in mathematics. *ZDM*, 51(1), 139-150.
- Velez, I., & Ponte, J. P. D. A. (2013). Representations and reasoning strategies of Grade 3 students in problem solving. *In Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Ankara: Middle East Technical University.