فصلنامه مطالعات برنامه درسی ایران
سال نهم، شماره ۳۴، پاییز ۱۳۹۳، ۱۶۴ – ۱۳۳

Journal of Curriculum Studies
(J.C.S.) Vol.9 (34); 2014, 133-164

درک مفهوم کسر توسط دانش‌آموزان پایه ششم دوره ابتدایی

Grade 6th Students Understanding of Fraction

تاریخ دریافت مقاله ۹۳/۰۴/ ۲۴: تاریخ پذیرش مقاله: ۹۳/۰۹/۰۵

ابراهیم ریحانی[۱]
شهرناز بخشعلی‌زاده[۲]
ملیحه دوستی[۳]

E. Reyhani (Ph.D)
Sh. Bakhshalizadeh
M. Dosti

چکیده: پژوهش حاضر، درک و فهم دانش‌آموزان از کسرها را با در نظر گرفتن مدل بهر و همکاران مورد بررسی قرار می‌دهد. روش پژوهش، توصیفی- تحلیلی است. در این پژوهش، ۳۶۶ نفر از دانش‌آموزان پایه ششم ابتدایی شهرستان ساوه پس از انتخاب به روش نمونه‌گیری خوشه‌ای تصادفی، مورد مطالعه قرار گرفتند. ابزار اندازه‌گیری، آزمونی شامل ۴۴ سؤال مرتبط با کسرها است. برای تجزیه و تحلیل اطلاعات حاصل شده، روش‌های آمار توصیفی و استنباطی مورد استفاده قرار گرفت. تجزیه و تحلیل داده‌ها نشان داد که دانش‌آموزان با میانگین ۵۵ درصد و انحراف استاندارد ۲۲ درصد، درک و فهم متوسطی از کسرها دارند. این دانش‌آموزان زیرساختار جزء به کل را با میانگین ۶۹ درصد بهتر از زیرساختارهای دیگر درک کرده‌اند و در مقایسه با زیرساختارهای دیگر، از زیرساختار اندازه با میانگین ۴۰/۴ درصد درک ضعیفی دارند. همچنین، نتایج پژوهش نشان داد که درک زیرساختار جزء به کل، پیش‌نیازی برای درک زیرساختارهای دیگر و تبعاً مفاهیم هم‌ارزی و ضرب کسرها است. همچنین، درک زیرساختار جزء به کل برای درک زیرساختارهای دیگر، الزامی است اما کافی نیست. علاوه بر این، نتایج این پژوهش حاکی از آن است که زیرساختار نسبت، ۳۲/۵ درصد از واریانس هم‌ارزی کسرها را تبیین می‌کند؛ بنابراین درک زیرساختار نسبت در درک مفهوم هم‌ارزی کسرها مؤثر است. زیرساختار عملگر نیز ۴/۸ درصد از واریانس ضرب کسرها را تبیین می‌کند. از این‌رو درک زیرساختار عملگر نیز، به درک مفهوم ضرب کسرها کمک می‌نماید.

کلیدواژه‌ها: کسر، زیرساختارها، درک و فهم، مدل بهر و همکاران و دانش‌آموزان پایه ششم.

Abstract: The purpose of this study is to investigate the students' understanding of fractions, based on Behr et al's model (1983). The research method is descriptive- analytic.. 366 sixth grade students in Saveh city participated in the study by random cluster sampling. The data collecting tool was a test with 44 items related to fractions. Descriptive and inferencial statistics used for analyzing the data. The results showed that students had a moderate understanding of fractions (by mean: 55%, sd: 22%), and their best performance was in part-whole sub-construct (by mean: 69%). Also their weakest performance was in measure sub-construct (by mean: 40.4%). In addition, the study showed that the understanding of part-whole sub-construct is necessary to understand the other sub-constructs, but not sufficient. Another finding was that ratio sub-construct is a prerequisite for understanding equivalent (by R^2=32.5%) and the fraction, as operator sub-construct is a prerequisite for understanding concept of multiplication of fractions (by R^2=4.8%).

Keywords: Fraction, sub-constructs, understanding, Behr et al's model & sixth grade students.

۱. استادیار گروه ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی e_reyhani@yahoo.com
۲. کارشناس ارشد پژوهشگاه مطالعات آموزش و پرورش sbakhshalizadeh@yahoo.com
۳. دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی doosti.m23@gmail.com

مقدمه

از اهداف اصلی آموزش ریاضی، برقراری توازن بین درک مفهومی و درک رویه‌ای دانش‌آموزان از مفاهیم ریاضی است. عدم درک مفهومی مفاهیم ریاضی توسط دانش‌آموزان و اتکای محض به حفظ فرمول‌ها و رویه‌های ریاضی به عملکرد ضعیف آن‌ها در ریاضیات منجر می‌شود. بولِت[1] (۱۹۹۸، نقل شده در استیوارت[2]، ۲۰۰۵) اهمّیّت درک دانش‌آموزان از مفاهیم ریاضی و آن‌چه که از فقدان آن حاصل خواهد شد را این‌گونه بیان می‌کند: «درک قطعاً هدف یادگیری است و اکثر معلمان بر این باورند که شاگردان‌شان، آن‌چه را که به آن‌ها آموزش می‌دهند درک می‌کنند. بدون درک، یادگیری ریاضیات به حفظ فرمول‌ها و قواعد حاکم بر آن‌ها تبدیل می‌شود. ریاضیاتی که بدین‌گونه آموخته می‌شود هدفمند نیست و کمتر سودمند است».

کسر از انتزاعی‌ترین، پرکاربردترین و با اهمّیّت‌ترین مفاهیم ریاضی است که دانش‌آموزان در دوره ابتدایی با آن مواجه می‌شوند. در دوره ابتدایی باید درک مفهومی دانش‌آموزان از کسرها تقویت گردد. شورای ملی معلمان ریاضی (NCTM[3]) در اصول و استانداردهای ریاضیات مدرسه‌ای[4] (۲۰۰۰)، به معرفی مفهوم کسرهایی مانند $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۴}$ در پایه‌های اولیه (از پیش‌دبستان تا پایه دوم) توصیه کرده است. همچنین این شورا توصیه کرده است که در پایه‌های ۳ تا ۵ درک، بازنمایی و مهارت‌های عملیاتی کسرها هرچه بیشتر توسعه یابند و بر ایجاد درک مفهومی دانش‌آموزان از کسرها تمرکز شود. به عقیده‌ی آنان در پایه‌های ۶ تا ۸ نیز دانش‌آموزان باید به‌طور انعطاف‌پذیری به حل مسائل کسر بپردازند. بیزاک و بیک[5] (۱۹۹۲) ادعا کردند که معمولاً مفاهیم کسر، مرتب‌کردن و هم‌ارزی بدون درک معنایی، تدریس می‌شوند و سطحی (بدون درک عمیق) آموخته می‌شوند. آن‌ها عقیده دارند «در آموزش پایه‌های ۳ تا ۵، مفاهیم مرتب‌کردن و هم‌ارزی، پیش از توسعه‌ی عملیات با کسر، توسط دانش‌آموزان درک شود و مهارت آن‌ها در این موضوعات تقویت گردد». همچنان‌که توسط آکسو[6] (۱۹۹۷) بیان شد، اشتباه معمول در یاددهی کسرها این است که دانش‌آموزان پیش از آن‌که شرایط کافی برای انجام

1. Boulet
2. Stewart
3. National Council of Teachers of Mathematics
4. Principles and standards for school mathematics
5. Bezuk & Bieck
6. Aksu

عملیات با کسرها را داشته باشند، به محاسبه بپردازند. به‌عنوان مثال، از آن‌جا که با استفاده از مفهوم هم‌ارزی کسرها می‌توان رویه مخرج مشترک‌گیری را آموزش داد و سپس با کمک این رویه به جمع کسرها پرداخت، نیاز است که پیش از معرفی عملیات جمع و رویه‌ی مخرج مشترک‌گیری، ابتدا درک مفهوم هم‌ارزی کسرها در دانش‌آموزان تقویت گردد. بر این اساس، دانش‌آموزان می‌توانند این مفهوم را در درک رویه مخرج مشترک‌گیری به‌کار گیرند. سپس با کمک آن به جمع کسرها بپردازند و بدین ترتیب، مفهوم جمع کسرها را به‌درستی درک نموده و عملیات با آن ها را انجام دهند (دوستی، ۱۳۹۲).

بسیاری از محققان آموزش ریاضی توافق دارند که از عوامل اصلی پیچیدگی یاددهی و یادگیری کسرها، ساختار چند لایه‌ای[1] آن‌ها است (بِهر، لش، پُست و سیلور[2]، ۱۹۸۳؛ لامون[3]، ۲۰۰۶). کی‌یِرن[4] (۱۹۷۶) اولین شخصی بود که موضوع چند لایه‌ای بودن کسرها را مطرح کرد و و مفاهیم مختلفی (مفاهیم جزء به کل، نسبت، عملگر، خارج‌قسمت و اندازه[5]) را با کسرها مرتبط دانست. پس از آن، بهر و همکاران (۱۹۸۳)، مفاهیم مطرح شده توسط کی‌یِرن را زیرساختار[6] نامیدند و یک مدل نظری مرتبط با زیرساختارها، به همراه مفاهیم ضرب، جمع، هم‌ارزی کسرها و حل‌مسئله را برای بررسی درک دانش‌آموزان از کسرها پیشنهاد کردند. در این پژوهش با در نظر داشتن این مدل نظری، درک و فهم دانش‌آموزان پایه ششم ابتدایی از کسرها مورد بررسی قرار گرفته است. این مطالعه، توصیف و تحلیل‌هایی از درک دانش‌آموزان از کسرها ارائه می‌کند که در یاددهی و یادگیری کسرها مؤثر هستند. سؤالاتی که در پژوهش حاضر مورد بررسی قرار می گیرند، عبارتند از:

۱) آیا درک زیرساختار جزء به کل، پیش‌نیازی برای درک زیرساختارهای دیگر است؟

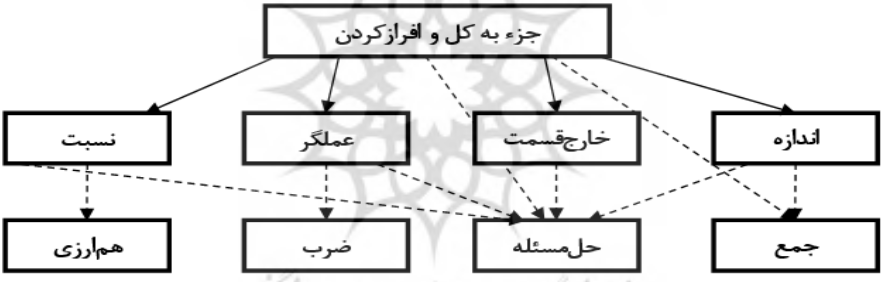
۲) آیا درک زیرساختارهای مختلف کسر، پیش‌نیازی برای درک مفاهیم جمع، ضرب و هم‌ارزی کسرها است؟

1. Multifaceted Construct
2. Behr, Lesh, Post & Silver
3. Lamon
4. Kieren
5. Part Of Whole, Ratio, Operator, Quotient & Measure
6. Subconstruct

چارچوب نظری

مدل نظری بهر و همکاران

کی‌ِرن (۱۹۷۶) پیشنهاد کرد که مفهوم کسر، چهار مفهوم مرتبطِ نسبت، عملگر، خارج‌قسمت و اندازه را شامل می‌شود. به عقیده‌ی او این چهار مفهوم، مفهوم جزء به کل را دربردارند. او همچنین عقیده داشت که درک مفهوم کسر به درک هر یک از این مفاهیم و نیز الحاق[1] این مفاهیم به یکدیگر وابسته است. سال‌ها بعد، بهر و همکاران (۱۹۸۳) از نتایج مطالعات‌شان نتیجه گرفتند که تنها پنج مفهوم وجود دارند که با مفاهیم کی‌ِرن (۱۹۷۶) مطابقت دارند. آن‌ها ایده‌ی کی‌ِرن مبنی بر چندلایه‌ای بودن کسر را توسعه دادند و این مفاهیم را زیرساختار نامیدند. آن‌ها زیرساختار جزء به کل را به فرایند افرازکردن ربط دادند. سپس یک مدل نظری مرتبط با پنج زیرساختار را همراه با عملیات جمع و ضرب کسرها، هم‌ارزی و حل‌مسئله پیشنهاد کردند (شکل ۱).



شکل ۱ مدل نظری مرتبط با زیرساختارهای کسر، عملیات، هم‌ارزی کسرها و حل‌مسئله (بهر و همکاران، ۱۹۸۳)

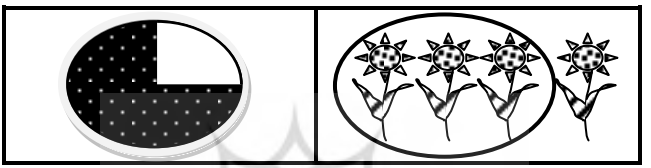
در این مدل، خطوط پیوسته روابط قطعی و خط‌چین‌ها، روابط فرضی را نشان می‌دهند (بهر و همکاران، ۱۹۸۳). این مدل، پنج فرضیه را نشان می‌دهد: ۱) درک زیرساختار جزء به کل و مفهوم افرازکردن، مستقیماً به توسعه درک چهار زیرساختار دیگر منجر می‌شود؛ ۲) درک زیرساختار نسبت، پیش‌نیازی برای درک مفهوم هم‌ارزی کسرها است؛ ۳) زیرساختار عملگر، تسهیل کننده درک مفهوم ضرب کسرها است؛ ۴) زیرساختار اندازه، برای توسعه کارآمدی در عملیات جمع با کسرها لازم و ضروری است؛ و در نهایت ۵) درک تمام پنج زیرساختار،

1. Confluence

پیش‌نیازی برای حل‌مسئله در حوزه کسرها است. در ادامه به تشریح مفاهیم موجود در مدل نظری بهر و همکاران پرداخته می‌شود.

زیرساختار جزء به کل

مفهوم جزء به کل، مستقیماً از افراز یک کمیت پیوسته یا گسسته به قسمت‌های هم‌اندازه حاصل می‌شود (بهر و همکاران، ۱۹۸۳). در این زیرساختار، مثلاً کسر $\frac{۳}{۴}$، سه شاخه گل از پنج شاخه گل (مدل گسسته) یا سه برش مساوی از یک کیک را که به چهار قسمت مساوی تقسیم شده است (مدل پیوسته) نشان می‌دهد (شکل۲).



شکل۲ نمایش کسر $\frac{۳}{۴}$ در زیرساختار جزء به کل

دانش‌آموزان باید بتوانند یک ناحیه پیوسته یا یک مجموعه گسسته را به قسمت‌های هم‌اندازه تقسیم کنند و تشخیص دهند که واحد داده شده به قسمت‌های هم‌اندازه تقسیم شده است یا خیر. برخی از دانش‌آموزان بدون توجه به برابری قسمت‌های افراز شده در یک شکل، کسر متناظر با آن را به صورت نمادین، بازنمایی می‌کنند (منتخب امریکا[1]، ۲۰۰۶؛ اشلاک[2]، ۲۰۰۶؛ پدیت، لیرد و مارسدن[3]، ۲۰۱۰؛ وانگ، ایوانس و اندرسون[4]، ۲۰۰۶). دانش‌آموزان باید ایده‌های مرتبط با رابطه بین اجزاء و کل را درک کنند، ایده‌هایی مانند: ۱) برای ساختن کل، تمام اجزاء در نظر گرفته می‌شوند، ۲) اگر کل به تعداد قسمت‌های بیشتری تقسیم شود، قسمت‌های کوچکتری حاصل می شود، ۳) در هم‌ارزی، بدون در نظر گرفتن اندازه، شکل، چینش[5] یا موقعیت و

1. America’s choice
2. Ashlock
3. Petit, Laird. & Marsden
4. Wong, Evans & Anderson
5. Arrangement

وضعیت قرار گرفتن[1] اجزا، ارتباط بین اجزاء و کل حفظ می‌شود، به این معنا که با تغییر شکل، مکان و موقعیت قسمت‌های رنگ شده، رابطه‌ی بین جزء و کل تغییری نمی‌کند (کارالامبوس و پنتازی[2]، ۲۰۰۷). مثلاً، اگر یک مستطیل به دو قسمت تقسیم شود و یک قسمت از آن رنگ شود، کسر $\frac{۱}{۲}$ بازنمایی می‌شود، با تقسیم یک دایره به دو قسمت و رنگ کردن یک قسمت از آن هم همین کسر حاصل می‌شود. در رنگ کردن یک قسمت از مستطیل یا دایره هم، تفاوتی نمی‌کند که نیمه‌ی بالایی یا پایینی، یا نیمه‌ی واقع در سمت راست یا چپ رنگ شود، در هر حالت، کسری که حاصل می‌شود، همان کسر $\frac{۱}{۲}$ است. همچنین دانش‌آموزان باید ایده شمول[3] یعنی در نظر گرفتن اجزاء به‌عنوان بخش‌هایی از کل را درک کنند. دانش‌آموزانی که این مفهوم را درک نکرده‌اند، تعداد قسمت‌های رنگ شده را برای صورت و مجموع تعداد قسمت‌های رنگ شده و رنگ نشده را برای مخرج در نظر می‌گیرند (کارالامبوس و پنتازی، ۲۰۰۷). در نهایت، درک کامل زیرساختار جزء به کل به توانایی دانش‌آموزان در واحدسازی و واحدسازی مجدد[4] نیازمند است (باتورو[5]، ۲۰۰۴).

زیرساختار خارج‌قسمت

زیرساختار خارج‌قسمت، روی عملیات تقسیم متمرکز می‌شود. کسر $\frac{۳}{۴}$ می‌تواند به‌عنوان تقسیم ۳ بر ۴ یا نتیجه تقسیم ۳ پیتزا بین ۴ نفر تفسیر شود (استیوارت، ۲۰۰۵). کسر در این زیرساختار هم به صورتِ مسئله و هم به جوابِ مسئله برمی‌گردد. برای نمونه، در مسئله «اگر سه پیتزا به‌طور مساوی میان چهار نفر تقسیم شود به هر نفر چه مقدار پیتزا می‌رسد؟»، با توجه به این‌که $\frac{۳}{۴}$ هم صورتِ مسئله و هم جوابِ مسئله را بیان می‌کند با اهمیّت است. $\frac{۳}{۴}$ در صورتِ مسئله، به تقسیم ۳ پیتزا بین ۴ نفر برمی‌گردد و در جوابِ مسئله، $\frac{۳}{۴}$، مقداری را که هر شخص از کل

1. Orientation
2. Charalambous & Pantazi
3. Inclusion Or Embeddedness
4. Unitizing And Reunitizing
5. Baturo

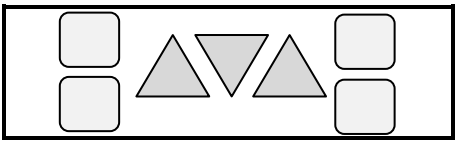
دریافت می‌کند توصیف می‌کند. در این مسئله، $\frac{۳}{۴}$، ۳ تا از هر ۴ تکه مساوی (مفهوم جزء به کل) که هر شخص دریافت می‌کند و در جوابِ مسئله، مقداری که به هر شخص می‌رسد (مفهوم خارج‌قسمت) را توصیف می‌کند. با این مثال مشاهده می‌شود که زیرساختارهای خارج‌قسمت و جزء به کل درهم‌تنیده شده‌اند (توبیاس[1]، ۲۰۰۹).

برای تسلط بر مفهوم خارج‌قسمت کسر، دانش‌آموزان نیاز دارند کسرها را به‌عنوان تقسیم اعداد صحیح شناسایی کنند و نقش مقسوم و مقسوم‌علیه در عملیات تقسیم را به‌درستی تشخیص دهند (لامون، ۲۰۰۶). بویژه باید درک کنند که مقسوم، تعداد واحدها است. درحالی که مقسوم‌علیه، تعداد قسمت‌ها در هر واحد است. مهارت یافتن در زیرساختار خارج‌قسمت نیازمند آن است که دانش‌آموزان درک مفهومی خود از تقسیم برای تفکیک‌کردن[2] وتقسیم با داشتن خارج‌قسمت[3] را توسعه دهند (لامون، ۲۰۰۶). در تقسیم برای تفکیک‌کردن، پیدا کردن مقدار یا تعداد در هر دسته یا بخش مورد نظر است (برای مثال، "اگر یک کلوچه بین چهار نفر به‌طور مساوی تقسیم شود، به هریک از آن‌ها چه مقدار کلوچه می‌رسد؟")، در حالی‌که در تقسیم با داشتن خارج‌قسمت بر تعداد بخش‌ها یا دسته‌های برابر تأکید می‌شود (مثلاً، «گروهی از دانش‌آموزان سه سیب را بین خودشان تقسیم کردند، اگر به هر یک از آن‌ها $\frac{۳}{۸}$، سیب برسد روی هم چه تعداد دانش‌آموز وجود دارند؟»).

زیرساختار نسبت

کسر در زیرساختار نسبت، رابطه بین دو کمیت هم نوع را بیان می‌کند. چون این زیرساختار، ارتباط بین دو کمیت را بیان می‌کند، یک شاخص مقایسه‌ای است و به‌عنوان عدد در نظر گرفته نمی‌شود (بهر و همکاران، ۱۹۸۳). برای مثال، $\frac{۳}{۴}$ می‌تواند نسبت بین تعداد مثلث‌ها به تعداد مربع‌ها باشد (شکل۳).

1. Tobias
2. Partitive Division
3. Quotitive Division



شکل ۳ نمایش کسر $\frac{۳}{۴}$ در زیرساختار نسبت

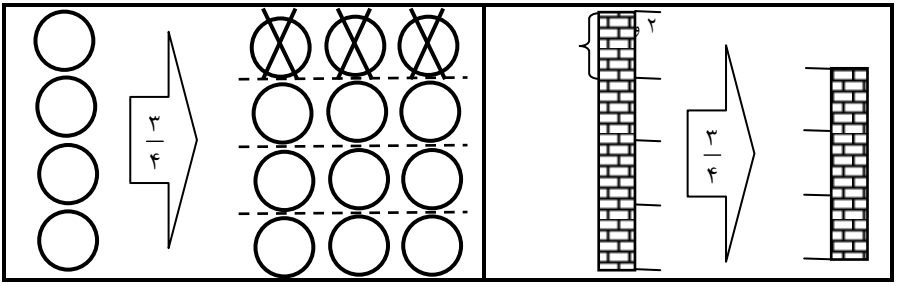
برای درک کامل مفهوم کسر به‌عنوان نسبت، دانش‌آموزان نیاز دارند تا ایده مقادیر نسبی[1] را بسازند و بتوانند ارتباط بین دو کمیت را با کسر بیان کنند. ویژگی تغییرناپذیری- پراکندگی[2] را درک کنند به این معنا که چون در نسبت، دو کمیت با هم تغییر می‌کنند، رابطه بین دو کمیت ثابت باقی می‌ماند. علاوه بر این، آن‌ها باید درک کنند، زمانی که در یک نسبت، دو کمیت در عددی غیر صفر ضرب شوند، مقدار نسبت تغییری نمی‌کند (لامون، ۲۰۰۶). از آن‌جا که ویژگی تغییرناپذیری- پراکندگی تنها برای نسبت برقرار است این ویژگی به‌عنوان وجه تمایز بین مفهوم جزء به کل و نسبت محسوب می‌شود. در این زیرساختار، بررسی رابطه بین حداقل دو نسبت به الگوریتم مخرج مشترک و هم‌ارزی کسرها منجر می‌شود (توبیاس، ۲۰۰۹).

زیرساختار عملگر

در زیرساختار عملگر، کسر به‌عنوان تابعی در نظر گرفته می‌شود که روی اعداد، اشیاء یا یک مجموعه اعمال می‌شود (لامون، ۲۰۰۶). بهر و همکاران (۱۹۸۳) بیان می‌کنند که عملگر نوعی «تابع تبدیل کننده[3]» است. در حقیقت، هنگامی‌که کسری بر روی اشیاء پیوسته اثر می‌کند، آن اشیاء کوتاهتر یا بلندتر/ بزرگتر یا کوچکتر می‌شوند. برای مثال، اگر کسر $\frac{p}{q}$ روی طولی ۱ واحدی عمل کند، آن طول، q برابر کوتاهتر و p برابر بلندتر می‌شود. بدین‌سان، برای طول ۸ و عملگر $\frac{۳}{۴}$، $۸\equiv۴\partial۳$ یا ۶ حاصل خواهد شد. به‌طور مشابه، هنگامی که کسر $\frac{p}{q}$ روی یک مجموعه گسسته n عضوی اعمال شود، $pn\equiv q$ حاصل می‌شود. بنابراین اگر مجموعه‌ای شامل

1. Relative Amounts
2. Covariance-Invarianc
3. Function That Transforms

۴ شی باشد و کسر $\frac{۳}{۴}$ روی آن اثر کند $۴\partial ۳\equiv ۴$ یا ۳ شی حاصل می‌شود (ویلدون[1]، ۲۰۰۸) (شکل ۴).



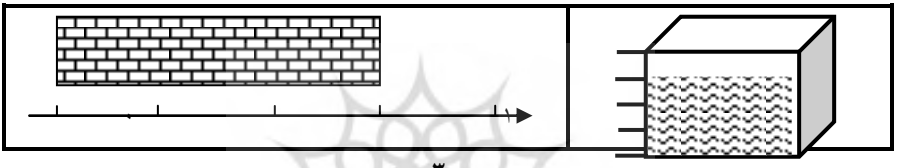
شکل ۴ نمایش کسر $\frac{۳}{۴}$ در زیرساختار عملگر

درک کسر به‌عنوان عملگر تسهیل کننده درک ضرب کسرها است. بهر، هارل[2]، پست و لش (۱۹۹۳) بیان کردند که درک کسرها به‌عنوان عملگر، درک ضرب کسرها را افزایش می‌دهد. این مفهوم، با در نظر گرفتن کسر به‌عنوان جزئی از «جزئی از کل» از زیرساختار جزء به کل متمایز می‌شود (مثل یافتن $\frac{۲}{۹}$ از $\frac{۱}{۱۸}$). برای تسلط بر مفهوم عملگر کسرها دانش‌آموزان باید بتوانند: ۱) ضرب کسر را در موقعیت‌های مختلف توضیح دهند (مثال $\frac{۳}{۴}$ باید یکبار به‌عنوان [$\frac{۱}{۴}$ واحد] ×۳ یا [۳ واحد] × $\frac{۱}{۴}$ توضیح داده شود که به ترتیب با تفاسیر کوچک کردن/ بزرگ کردن و کاهش/ افزایش افرازها در ارتباط است)؛ ۲) نامیدن یک کسر واحد برای توصیف یک عملیات ترکیبی[3]، زمانی که دو عمل ضربی یکی پس از دیگری انجام و عمل دوم روی نتیجه عمل اول انجام می‌شود (مثلاً $\frac{۳}{۱۴}$ می‌تواند به عملیات ترکیبی $(\frac{۳}{۷}\partial\frac{۵}{۲})\partial\frac{۱}{۵}$ نسبت داده شود)؛ ۳) ارتباط دادن خروجی و ورودی‌ها (مانند، عملگر $\frac{۳}{۴}$ ورودی مانند ۴ را به خروجی ۳ تبدیل می‌کند) (کارالامبوس و پنتازی، ۲۰۰۷).

1. Wheeldon
2. Harel
3. Composite Operation

زیرساختار اندازه

کسر در زیرساختار اندازه به‌عنوان عدد معرفی می‌شود. لامون (۲۰۰۶) زیرساختار اندازه را به‌عنوان عدد اختصاص یافته به تعداد یا مقداری از کمیت‌های قابل اندازه‌گیری توصیف می‌کند. این وضعیت، زمانی اتفاق می‌افتد که واحد اندازه‌گیری مورد نظر نمی‌تواند عدد صحیحی را به کمیت اندازه‌گیری شده اختصاص دهد. در نتیجه، نیاز است که واحد به قسمت‌هایی تقسیم شود و برای بیان مقدار موجود آن کمیت، از کسر استفاده شود. برای مثال $\frac{۳}{۴}$ می‌تواند برای تعیین میزان مایع درون یک مخزن اختصاص یابد. به این معنا که میزان مایع درون مخزن $\frac{۳}{۴}$ واحد است (شکل ۵).



شکل ۵ نمایش کسر $\frac{۳}{۴}$ در زیرساختار اندازه

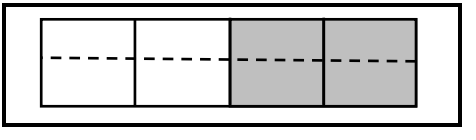
همچنین می‌توان کسر را به‌عنوان اندازه یا نقاط روی محور اعداد در نظر گرفت (شکل ۵). کسرها به‌عنوان اندازه، با کمک محور اعداد معرفی می‌شوند «داشتن طول بیشتر از یک، از ویژگی‌های محور اعداد است که در مدل‌های مساحت یا مجموعه وجود ندارد» (بِهر و همکاران، ۱۹۸۳). برای توسعه زیرساختار اندازه، دانش‌آموزان باید بتوانند یک فاصله واحد مطلوب را برای تعیین هر فاصله از مبدأ به‌کار گیرند. به این معنا که دانش‌آموزان باید توانایی تعیین مکان یک عدد را روی محور اعداد داشته باشند و بالعکس، عدد متناظر با نقطه مشخص شده روی محور اعداد را تعیین کنند (لامون، ۲۰۰۶). درک کامل زیرساختار اندازه به این موضوع وابسته است که دانش‌آموزان از ویژگی چگال بودن کسرها نیز آگاهی داشته باشند. به این معنا که بین هر دو کسر، بی‌نهایت عدد کسری وجود دارد (لامون، ۲۰۰۶).

محور اعداد به‌عنوان یک ابزار بازنمایی مناسب، برای ارزیابی درک دانش‌آموزان از زیرساختار اندازه و برای یاددهی عملیات جمع کسرها در نظر گرفته شده است (کیجزر و

ترول[1]، ۲۰۰۳، نقل شده در کارالامبوس و پنتازی، ۲۰۰۷). پژوهش‌های قبلی نشان دادند که دانش‌آموزان در تعیین مکان اعداد روی محور اعداد با مشکلات خاصی مواجه می‌شوند. آن‌ها به جای محاسبه فاصله‌های روی محور اعداد، علائم افراز (خط‌نشان‌های) روی محور اعداد را در نظر می‌گیرند، زمانی که محور اعداد طولی غیر از یک دارد واحد نادرستی را به‌کار می‌گیرند و زمانی که محور به قسمت‌های مساوی با مضربی از مخرج کسر داده شده، تقسیم شده است در موقعیت‌یابی مکان یک کسر روی محور اعداد ناموفق عمل می‌کنند (باتورو، ۲۰۰۴).

هم‌ارزی

اگر صورت و مخرج یک کسر مضربی از صورت و مخرج کسر دیگر باشد این دو کسر، کسرهای هم‌ارز نامیده می‌شوند، مانند $\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۴}{۸}$ (دوستی، ۱۳۹۲). مجموعه هم‌ارزی، مجموعه‌ای از کسرها است که در آن هر کسر قابل تبدیل به کسر دیگر است (وانگ و ایوانس، ۲۰۰۷). کامی و کلارک[2] (۱۹۹۵، نقل شده در توبیاس، ۲۰۰۹) متذکر شدند که «محققان عموماً دانش کسرهای هم‌ارز را به عنوان توانایی نامیدن یک کسر با نام‌های مختلف، توانایی نادیده‌گرفتن یا تصور خطوط افراز و یا ظهور تفکری منعطف، مد نظر قرار می‌دهند». مثلاً، مستطیل ذیل را در نظر بگیرید (شکل ۶). آن را با کمک سه خط عمودی به چهار قسمت مساوی افراز و دو قسمت از آن را رنگ کنید. این مستطیل کسر دو چهارم را بازنمایی می‌کند. از طرفی با تصور خطی افقی در وسط این مستطیل، کسر چهار هشتم حاصل می‌شود یا بالعکس، با نادیده گرفتن دو تا از خطوط کناری و تنها تصور خط وسط، کسر یک دوم حاصل می‌گردد. این دو کسر حاصل شده، کسرهایی هم‌ارز با کسر دو چهارم هستند. با تقسیم دوباره یک کمیت، کسر ظاهراً جدیدی حاصل می‌شود که با کسر قبلی هم‌ارز است.



شکل ۶ بازنمایی کسرهای هم‌ارز با $\frac{۱}{۲}$

1. Keijzer &Terwel
2. Kamii & Clark

به‌طور کلی می‌توان بیان کرد پیش از آموزش رویه‌های جمع، ضرب و هم‌ارزی کسرها به دانش‌آموزان باید درک آنان از مفهوم کسر تقویت گردد. برای درک و توسعه کامل مفهوم کسر نیاز است که دانش‌آموزان هر یک از زیرساختارها را به‌درستی درک نمایند.

روش و ابزار پژوهش

روش پژوهش، توصیفی از نوع همبستگی و تحلیلی با استفاده از تحلیل محتوا است. به‌منظور پاسخ‌دهی به سؤالات پژوهش، با در نظر گرفتن معیارهای مرتبط با توسعه و اندازه‌گیری مفاهیم به‌کار رفته در مدل بهر و همکاران (۱۹۸۳)، برای ارزیابی عملکرد دانش‌آموزان در هر مفهوم، سؤالاتی اختصاص داده شد. آزمونی شامل ۵۰ سؤال تستی و تشریحی، از مجموعه سؤالات تیمز، پژوهش‌های معتبر و مرتبط و تعدادی سؤال محقق ساخته تهیه شد. برای تعیین روایی[1] محتوایی آزمون از جدول هدف- محتوا و روایی صوری آن، از نظر چهار نفر از اساتید ریاضی و آموزش ریاضی و پنج نفر از دبیران ریاضی با تجربه استفاده شد. در یک مطالعه‌ی مقدماتی که روی ۳۲ نفر از دانش‌آموزان پایه ششم شهرستان ساوه صورت گرفت، ۶ سؤال به‌دلیل عدم وجود ضریب دشواری مناسب، ضریب تمیز مناسب و عدم هماهنگی درونی با سؤالات کل آزمون از نظر آماری مورد تأیید قرار نگرفت و حذف شد. در نهایت، آزمونی با ۴۴ سؤال تستی- تشریحی با ضریب آلفای کرونباخ ۰/۹۰ تهیه گردید که این مقدار، پایایی[2] مناسبی را نشان می‌دهد. این آزمون به دو آزمون ۲۲ سؤالی تفکیک شد و در دو هفته متوالی به دانش‌آموزان داده شد. مدت زمان پاسخ به سؤالات هر آزمون ۶۰ دقیقه بود. جدول ۱، ساختار خاص آزمون نهایی و تعداد سؤالات اختصاص یافته به هر مفهوم را نشان می‌دهد.

1. Validity
2. Reliability

جدول ۱ سؤالات آزمون نهایی بر مبنای مفاهیم و زیرساختارهای کسر

محتوای اندازه‌گیری شده		اهداف	تعداد سؤالات
۱	جزء به کل	دانش‌آموزان باید: ۱- درک کنند که کل به تعداد قسمت‌های بیشتری تقسیم می‌شود تا قسمت‌های کوچکتری حاصل شود و بتوانند یک مجموعه گسسته یا ناحیه پیوسته را به قسمت‌های برابر تقسیم کنند. ۲- دریابند که ارتباط بین جزء و کل علیرغم اندازه، شکل، ترتیب یا موقعیت حفظ می‌شود. ۳- اجزاء را به‌عنوان بخش‌های کل در نظر بگیرند. ۴- توانایی‌شان را در واحدسازی و دوباره واحد ساختن توسعه دهند.	۸
۲	نسبت	دانش‌آموزان باید: ۱- کمیت‌های مرتبط را شناسایی و ارتباط بین دو کمیت را به صورت کسر بیان کنند. ۲- ویژگی تغییرناپذیری- پراکندگی را درک کنند. ۳- بتوانند به مقایسه نسبت‌ها بپردازند.	۷
۳	عملگر	دانش‌آموزان باید: ۱- در عملیات ترکیبی وقتی دو عمل ضربی یکی پس از دیگری انجام و عمل دوم روی نتیجه‌ی عمل اول انجام می‌شود، بتوانند نتیجه را با یک کسر بیان کنند. ۲- بتوانند ارتباط ورودی و خروجی را بیان کنند.	۳
۴	خارج‌قسمت	دانش‌آموزان باید: ۱- بتوانند مقسوم و مقسوم‌علیه در تقسیم را تشخیص دهند. ۲- کسر را به‌عنوان تقسیم دو عدد صحیح درک کنند.	۵
۵	اندازه	دانش‌آموزان باید: ۱- بتوانند کسر را روی محور اعداد نشان دهند. ۲- ویژگی چگال بودن کسرها را درک کنند. ۳- کسرها را به‌عنوان عدد درک کنند و به مقایسه کسرها بپردازند.	۸
۶	جمع	دانش‌آموزان باید: ۱- بتوانند حاصل‌جمع دو کسر را بیابند و بتوانند حاصل‌جمع دو کسر را با نماد، شکل و غیره بازنمایی کنند.	۵

	محتوای اندازه‌گیری شده	اهداف	تعداد سؤالات
		۲- بتوانند حاصل‌جمع دو کسر را تخمین بزنند.	
۷	ضرب	دانش‌آموزان باید: ۱-بتوانند حاصل‌ضرب دو کسر را محاسبه نمایند. ۲- بتوانند حاصل‌ضرب دو کسر را تخمین بزنند.	۲
۸	هم‌ارزی	دانش‌آموزان باید: ۱- کسرهای هم‌ارز را شناسایی کنند و کسر (های) هم‌ارز با کسر داده شده را بنویسند. ۲- بازنمایی‌های مختلف از کسرهای هم‌ارز را شناسایی کنند.	۶
مجموع			۴۴

جامعه آماری این پژوهش، تمامی دانش‌آموزان دختر و پسر پایه ششم دوره ابتدایی شهرستان ساوه هستند که در سال تحصیلی ۹۲-۹۱ در این شهرستان مشغول به تحصیل بودند. در ابتدا نمونه‌ی مورد مطالعه ۳۸۰ نفر (۱۹۶ دختر و ۱۸۴ پسر) از اعضای جامعه آماری بودند که به روش نمونه‌گیری خوشه‌ای تصادفی انتخاب شدند. پس از اجرای آزمون به‌دلیل غیبت برخی از دانش‌آموزان در آزمون اول یا در آزمون دوم، برگه‌های آزمون این دانش‌آموزان کنار گذاشته شد و تعداد نمونه به ۳۶۶ نفر (۱۹۴ دختر و ۱۷۲ پسر) کاهش یافت.

در این آزمون برای هر پاسخ درست، اعداد ۰/۲۵ تا ۱، و برای هر پاسخ نادرست یا سؤال پاسخ داده نشده، صفر امتیاز در نظر گرفته شده است. در تجزیه و تحلیل داده‌ها، از آمار توصیفی از قبیل میانگین و انحراف استاندارد و آمار استنباطی (آزمون t، برای بررسی تفاوت معنادار بین هرجفت از زیرساختارها و تحلیل مسیر) استفاده شده است. در این پژوهش برای انجام محاسبات آماری مربوط به تجزیه و تحلیل داده‌ها نیز، از نرم افزار SPSS۱۹ استفاده گردید.

یافته‌های پژوهش

یافته‌های آماری پژوهش

در جدول ۲، اطلاعات توصیفی متغیرها به همراه ماتریس همبستگی ارائه شده است. با توجه به جدول ۲، مشاهده می‌شود که دانش‌آموزان بهترین عملکرد را در زیرساختار جزء به کل با

میانگین ٪۶۹ داشتند. در سه زیرساختار نسبت، عملگر و خارج‌قسمت به ترتیب با میانگین ٪۵۱/۶، ٪۴۸/۳ و ٪۵۲/۴ عملکرد متوسطی را از خود نشان دادند. ضعیف‌ترین عملکرد این دانش‌آموزان در زیرساختار اندازه با میانگین ٪۴۰/۴ بود. واریانس عملکرد دانش‌آموزان در جزء به کل با انحراف معیار ٪۲۲/۱ کمترین و در زیرساختار عملگر با انحراف معیار ٪۳۳/۷ بیشترین بود. پس از زیرساختار جزء به کل، عملکرد دانش‌آموزان در سه زیرساختار نسبت، خارج‌قسمت و اندازه به ترتیب با انحراف استاندارد ٪۲۵/۳، ٪۲۶/۸ و ٪۲۸/۷، بیشترین واریانس را نشان داد. نتایج نشان داد که دانش‌آموزان با میانگین ٪۵۲/۳ و انحراف معیار ٪۲۷/۳، عملکرد متوسطی را در مجموع زیرساختارها از خود نشان دادند. دانش‌آموزان در عملیات جمع، ضرب و هم‌ارزی کسرها به‌ترتیب با میانگین ٪۶۰/۲، ٪۵۱/۶ و ٪۶۳/۲ نیز، عملکرد متوسطی را از خود نشان دادند. نتایج همچنین نشان داد که عملکرد دانش‌آموزان در عملیات جمع با ٪۹۹/۱ بیشترین تغییرپذیری را داشت. میانگین عملکرد دانش‌آموزان در تمام سؤالات آزمون، ٪۵۵ و انحراف استاندارد عملکرد آنان ٪۲۲ بود.

جدول ۲ میانگین، انحراف استاندارد و همبستگی متغیرها

متغیرها	میانگین (درصد)	انحراف استاندارد (درصد)	جزء به کل	نسبت	عملگر	خارج‌قسمت	اندازه	عملیات جمع	عملیات ضرب
جزء به کل	۶۹/۰	۲۲/۱	۱						
نسبت	۵۱/۶	۲۵/۳	۰/۶۲۱**	۱					
عملگر	۴۸/۳	۳۳/۷	۰/۴۹۰**	۰/۴۸۱**	۱				
خارج‌قسمت	۵۲/۴	۲۶/۸	۰/۵۱۳**	۰/۵۳۹**	۰/۴۴۵**	۱			
اندازه	۴۰/۴	۲۸/۷	۰/۶۵۱**	۰/۶۳۹**	۰/۵۷۷**	۰/۵۳۸**	۱		
عملیات جمع	۶۰/۲	۹۹/۱	۰/۰۹۶	۰/۱۱۶*	۰/۱۱۲*	۰/۱۱۱*	۰/۰۹۸	۱	
عملیات ضرب	۵۱/۶	۲۶/۸	۰/۱۶۷**	۰/۲۱۵**	۰/۲۲۵**	۰/۱۸۹**	۰/۲۳۵**	۰/۰۰۵	۱
هم‌ارزی	۶۳/۲	۲۵/۲	۰/۶۲۱**	۰/۵۷۱**	۰/۴۷۹**	۰/۵۴۷**	۰/۶۵۳**	-۰/۰۰۶	۰/۲۱۶**

*P<۰/۰۵ **P<۰/۰۱

جدول۳، نتایج آزمون t وابسته را در بررسی معناداری تفاوت عملکرد دانش‌آموزان در هر جفت از زیرساختارها نشان می‌دهد. با توجه به این جدول، در عملکرد دانش‌آموزان در هر جفت از زیرساختارها به غیر از دو زیرساختار نسبت و خارج‌قسمت، با اطمینان ۹۵ درصد، تفاوت معنادار وجود دارد و دانش‌آموزان در این زیرساختارها عملکرد متفاوتی را از خود نشان داده‌اند. نتایج نشان می‌دهند که عملکرد دانش‌آموزان در زیرساختار جزء به کل بهتر از عملکردشان در زیرساختارهای نسبت و خارج‌قسمت، همچنین، در زیرساختارهای نسبت و خارج‌قسمت بهتر از عملگر و در زیرساختار عملگر بهتر از اندازه است.

جدول ۳ نتایج آزمون t وابسته برای بررسی معناداری تفاوت بین زیرساختارها

جفت زیرساختارها	تفاوت جفت زیرساختارها		t	درجه آزادی	معناداری (۰/۰۵ >p)
	میانگین	انحراف معیار			
جزء به کل- عملگر	۰/۲۰۸	۰/۲۹۹	۱۳/۲۸۱	۳۶۵	۰/۰۰۰
جزء به کل- خارج قسمت	۰/۱۶۷	۰/۲۴۶	۱۲/۹۹۱	۳۶۵	۰/۰۰۰
جزء به کل- اندازه	۰/۲۸۶	۰/۲۲۱	۲۴/۷۸۸	۳۶۵	۰/۰۰۰
جزء به کل-نسبت	۰/۱۷۴	۰/۲۰۹	۱۵/۹۹۶	۳۶۵	۰/۰۰۰
عملگر- خارج قسمت	-۰/۰۴۱	۰/۳۲۴	-۲/۴۱۲	۳۶۵	۰/۰۱۶
عملگر- اندازه	۰/۰۷۸	۰/۲۹۱	۵/۱۶۸	۳۶۵	۰/۰۰۰
عملگر- نسبت	-۰/۰۳۳	۰/۳۰۹	۲/۰۵۶	۳۶۵	۰/۰۴۰
خارج قسمت- اندازه	۰/۱۱۹	۰/۲۶۸	۸/۵۲۱	۳۶۵	۰/۰۰۰
خارج قسمت- نسبت	۰/۰۰۸	۰/۲۵۱	-۰/۵۸۳	۳۶۵	۰/۵۶۰
اندازه- نسبت	-۰/۱۱۲	۰/۲۳۲	۹/۲۱۷	۳۶۵	۰/۰۰۰

در جدول ۴، مسیرها به همراه ضرایب آن‌ها ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود متغیر جزء به کل بر چهار متغیر نسبت، عملگر، خارج‌قسمت و اندازه به‌طور مستقیم اثر می‌گذارد. علاوه بر این، متغیر نسبت بر هم‌ارزی و متغیر عملگر بر ضرب، اثر مستقیم دارد. نتایج آزمون t حاکی از آن است که تمامی این مسیرها از نظر آماری معنادار هستند؛ اما نتایج نشان می‌دهد که تأثیر همزمان متغیرهای جزء به کل و جمع بر اندازه، از لحاظ آماری معنادار نیست.

بیشترین تأثیر متغیر جزء به کل روی متغیر اندازه و پس از آن بر روی متغیر نسبت است. متغیر جزء به کل به ترتیب ۴۲/۳، ۳۸/۵، ۲۶/۱ و ۲۳/۸ درصد از واریانس متغیرهای اندازه، نسبت، خارج‌قسمت و عملگر را تبیین می‌کند. همچنین، متغیر نسبت ۳۲/۵ درصد از واریانس متغیر هم‌ارزی و متغیر عملگر ۴/۸ درصد از واریانس متغیر ضرب را تبیین می‌کند.

جدول ۴ اثرات مستقیم، ضرایب مسیر، معناداری و مقدار تبیین شده هر متغیر از سوی متغیر (های) مستقل

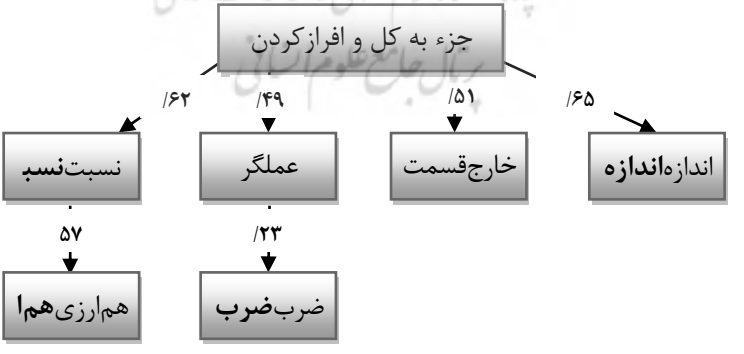
اثرات مستقیم	ضریب رگرسیون B	ضریب مسیر β	ضریب تبیین چند متغیری R^2	t	F	سطح معناداری
بر نسبت						
از جزء به کل	۰/۷۱۰	۰/۶۲۱	۰/۳۸۵	۱۵/۱۳۴	۲۲۹/۰۵۳	P < ۰/۰۵
بر عملگر						
از جزء به کل	۰/۷۴۴	۰/۴۹۰	۰/۲۳۸	۱۰/۷۱۴	۱۱۴/۷۹۷	P < ۰/۰۵
بر خارج‌قسمت						
از جزء به کل	۰/۶۲۲	۰/۵۱۳	۰/۲۶۱	۱۱/۳۹۴	۱۲۹/۸۱۳	P < ۰/۰۵
بر اندازه						
از جزء به کل	۰/۸۴۴	۰/۶۵۱	۰/۴۲۳	۱۶/۳۸۰	۲۶۸/۳۱۰	P < ۰/۰۵
بر هم‌ارزی						
از نسبت	۰/۵۶۸	۰/۵۷۱	۰/۳۲۵	۱۳/۲۸۷	۱۷۶/۵۳۴	P < ۰/۰۵
بر ضرب						
از عملگر	۰/۱۷۹	۰/۲۲۵	۰/۰۴۸	۴/۴۱۴	۱۹/۴۸۳	P < ۰/۰۵
بر جمع						
از جزء به کل	۰/۲۵۱	۰/۰۵۶	۰/۰۱۱	۰/۸۱۵	۲/۰۸۶	P > ۰/۰۵
از اندازه	۰/۲۱۱	۰/۰۶۱		۰/۸۹۰		

جدول ۵، اثرات مستقیم، غیرمستقیم و کل متغیرها را بر همدیگر نشان می‌دهد. متغیر جزء به کل برچهار متغیر نسبت، عملگر، خارج‌قسمت و اندازه تأثیر مستقیم و کلی دارد که از نظر آماری معنادار است. این متغیر بر متغیرهای نسبت و عملگر نیز تأثیر غیرمستقیم و کلی دارد که از نظر آماری معنادار نیز هست. همچنین، متغیرهای نسبت و عملگر به‌ترتیب بر متغیرهای

هم‌ارزی و ضرب، تأثیر مستقیم و کلی معنادار دارند. شکل ۷، مدل تجربی حاصل شده را براساس مقادیر استاندارد نشان می‌دهد.

جدول ۵ اثرات مستقیم، غیرمستقیم و کل متغیرها بر یکدیگر

اثرات	اثر مستقیم	اثر غیر مستقیم	اثر کل
بر نسبت			
از جزء به کل	۰/۶۲۱	–	۰/۶۲۱
بر عملگر			
از جزء به کل	۰/۴۹۰	–	۰/۴۹۰
بر خارج‌قسمت			
از جزء به کل	۰/۵۱۳	–	۰/۵۱۳
بر اندازه			
از جزء به کل	۰/۶۵۱	–	۰/۶۵۱
بر هم‌ارزی			
از نسبت	۰/۵۷۱	–	۰/۵۷۱
از جزء به کل	–	۰/۳۵۵	۰/۳۵۵
بر ضرب			
از عملگر	۰/۲۲۵	–	۰/۲۲۵
از جزء به کل	–	۰/۱۱۰	۰/۱۱۰

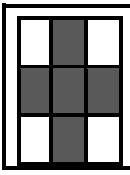


شکل ۷ مدل تجربی حاصل شده مبتنی بر مدل نظری بهر و همکاران (۱۹۸۳)

بررسی و تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤالات آزمون

بررسی و تحلیل پاسخ‌های درست و نادرست دانش‌آموزان به مسائل می‌تواند تا حدودی نحوه‌ی تفکر آنان را منعکس کند و بدفهمی‌های آنان را نمایان سازد. بدین منظور، پاسخ‌های ارائه شده توسط دانش‌آموزان به هشت سؤال منتخب از سؤالات آزمون مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است.

- سؤال مرتبط با زیرساختار جزء به کل



کسری که قسمت رنگ شده را نشان می‌دهد کدام است؟[1]

الف) $\frac{۵}{۴}$ ب) $\frac{۴}{۵}$ ج) $\frac{۶}{۹}$ د) $\frac{۵}{۹}$

چون این سؤال، یک سؤال روتین بود، اکثریت دانش‌آموزان با در نظر گرفتن تعداد قسمت‌های رنگ شده برای صورت و تعداد کل قسمت‌های افراز شده برای مخرج توانستند پاسخی درست ارائه کنند و در نتیجه در این سؤال، بهترین عملکرد را در میان سؤالات زیرساختار جزء به کل داشتند (جدول ۶). دانش‌آموزانی که پاسخی نادرست ارائه کردند با محاسبه تعداد بخش‌های رنگ شده برای صورت و تعداد بخش‌های رنگ نشده برای مخرج یا بالعکس، به گزینه‌های "الف" یا "ب" اشاره کردند. تحقیقات مختلف (نظیر منتخب امریکا، ۲۰۰۶ و اشلاک، ۲۰۰۶) نیز حاکی از آن است که بازنمایی کسر به‌عنوان جزء به جزء به جای جزء به کل از بدفهمی‌های دانش‌آموزان است.

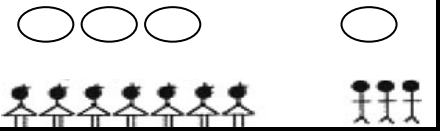
جدول ۶ فراوانی پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤال منتخب از زیرساختار جزء به کل

پاسخ‌های درست		پاسخ‌های نادرست	
فراوانی	درصد	فراوانی	درصد
۳۵۳	۹۶/۴	۱۳	۳/۶

- سؤال مرتبط با زیرساختار خارج‌قسمت

[1] source: TIMSS Mathematics Items, (1995). Released set for third and fourth grades.

با توجه به شکل زیر می‌خواهیم تعدادی پیتزا را بین تعدادی از کودکان تقسیم کنیم. اگر یک پیتزا را بین ۳ پسر و سه پیتزا را بین ۷ دختر تقسیم کنیم، به دخترها پیتزای بیشتری می‌رسد یا پسرها؟ دلیل خود را بنویسید. ♥



همانطور که در جدول۷ مشاهده می‌شود، دانش‌آموزانی که پاسخ نادرست ارائه کردند نتوانستند طرحواره ذهنی خود از اعداد صحیح را گسترش دهند و کسرها را به‌عنوان نسبت بین دو کمیت درک کنند. تقسیم اعداد صحیح بزرگتر مسئله به اعداد صحیح کوچکتر نیز ناشی از تعمیم همین طرحواره است. محققان مختلف (نظیر هاسر و آبوز[1]، ۲۰۰۳؛ لیو، کسین و لی[2]، ۲۰۱۱ و استافیلدو و وسنیادو[3]، ۲۰۰۴) نیز عقیده دارند عدم پذیرش کسرها به‌عنوان رابطه‌ی بین دو کمیت و درنظر گرفتن آن‌ها به‌عنوان دو عدد صحیح مستقل از بدفهمی‌های دانش‌آموزان و ناشی از عدم توسعه طرحواره ذهنی آنان از اعداد صحیح است.

جدول۷ نمونه‌ای از پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤال منتخب از زیرساختار خارج‌قسمت

انواع پاسخ‌ها	فراوانی	درصد		نمونه‌ای از پاسخ‌های دانش‌آموزان
درست	۲۰۹	۵۷/۱	۱	به دخترها پیتزای بیشتری می‌رسد. چون اگر پیتزاها را به سه قسمت تقسیم کنیم به پسرها مساوی می‌رسد اما برای دخترها یکی اضافه می‌آید.
			۲	به دخترها پیتزای بیشتری می‌رسد. با مقایسه نسبت‌ها می‌توان به جواب رسید. $\frac{1}{3} \quad \frac{3}{7} \quad \rightarrow \quad \frac{7}{21} < \frac{9}{21}$

♥source: Lamon (1993), Marshall (1993) in Charalambous & Pitta-Pantazi (2007)

[1]-Haser & Ubuz

[2]-Liu, Xin & Li

[3]-Stafylidou & Vosniadou

نادرست	۱۵۷	۴۲/۹	۱	پسرها، چون دخترها بیشتر هستند ولی پسرها کم هستند. پس باعث می‌شود که به دخترها کم برسد.
			۲	به پسرها بیشتر می‌رسد. 3 ÷ 1=3 7 ÷ 3 =2/25

- سؤال مرتبط با زیرساختار نسبت

در پارک شادی فقط ۱۰ درخت کاج و ۲۰ درخت سرو وجود دارد. "زهرا می‌گوید که در مقابل هر درخت کاج، ۲ درخت سرو وجود دارد". ولی "مریم می‌گوید $\frac{۱}{۲}$ از کل درخت‌ها، درخت کاج هستند".
زهرا درست می‌گوید یا مریم؟[۱] دلیل خود را بنویسید.

برخی از دانش‌آموزان با بیان این‌که کل درخت‌ها ۳۰ تا است پس نصف آن‌ها ۱۵ تا می‌شود، از نادرستی پاسخ مریم، درستی پاسخ زهرا را نتیجه گرفتند. درصدی از آنان با بیان این‌که تعداد درخت‌های سرو دو برابر تعداد درخت‌های کاج است، گفته‌ی زهرا را تصدیق کردند (جدول ۸)؛ اما دانش‌آموزانی که پاسخ نادرست ارائه کردند، بدون درک مفهوم $\frac{۱}{۲}$ گفته‌ی هر دو را تصدیق کردند. برخی از آنان با بیان این‌که $\frac{۱}{۲} \cong \frac{۱۰}{۲۰}$ است گفته‌ی مریم را تصدیق کردند. به‌نظر می‌رسد این دانش‌آموزان با در نظر گرفتن عدد $\frac{۱}{۲}$، بدون درک درستی از مفهوم این عدد که در واقع نسبت تعداد درخت‌های کاج به تعداد درخت‌های سرو است و نه نیمی از کل درخت‌ها، به گفته‌ی مریم به‌عنوان گفته‌ای درست اشاره کردند. به عقیده‌ی هاسر و آبوز (۲۰۰۳) در نظر گرفتن ظاهر کسر و عدم توجه به مفهوم آن از بدفهمی‌های اساسی دانش‌آموزان در کسرها است. در این نوع بدفهمی دانش‌آموزان از این موضوع که کسرها همیشه نشان‌دهنده مقدار نیستند و می‌توانند به‌عنوان جزءای از کل یا نسبت و مقایسه بین دو کمیت درنظر گرفته شوند، آگاهی

[۱] source: TIMSS Mathematics Items, (1995). Released set for third and fourth grades.

درستی ندارند. آن‌ها تنها به ظاهر کسر توجه می‌کنند و بدون این‌که مفهوم آن را درک کنند آن را به‌کار می‌گیرند.

جدول۸ نمونه‌ای از پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤال منتخب از زیرساختار نسبت

انواع پاسخ‌ها	فراوانی	درصد	نمونه‌ای از پاسخ‌های دانش‌آموزان	
درست	۱۹۳	۵۲/۷	۱	زهرا، چون آن طوری که زهرا می‌گوید ۲۰ درخت سرو می‌شود ولی مریم می‌گوید $\frac{1}{2}$ کل درخت‌ها کاج است یعنی $\frac{1}{2}\left|\begin{matrix}15\\30\end{matrix}\right.$ ولی در مسئله گفته ۱۰ درخت کاج.
			۲	زهرا، چون گفته‌ی مریم غلط است، چون مقدار درخت کاج و سرو برابر نیست.
				زهرا درست گفته چون کاج ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ سرو ○○ ○○ ○○ ○○ ○○ ○○ ○○ ○○ ○○ ○○
نادرست	۱۷۳	۴۷/۳	۱	هر دو درست می‌گویند. $\begin{matrix}۱۰ & ۱ & \text{کاج}\\ ۲۰ & ۲ & \text{سرو}\\ ۳۰ & ۳ & \text{کل}\end{matrix}$
			۲	مریم، چون $\frac{1}{2}-\frac{10}{20}$

- سؤال مرتبط با زیرساختار عملگر

حسن ۴۰۰۰ تومان و علی ۳۰۰۰ تومان پول دارد. حسن $\frac{5}{8}$ از پول خود و علی $\frac{7}{10}$ از پولش را خرج کرد. چه کسی پول بیشتری خرج کرده است؟ روش حل خود را بنویسید[1].

دانش‌آموزان با کمک تناسب یا با رویکردی حسابی توانستند به پاسخ درست دست یابند. اکثر دانش‌آموزانی که نتوانستند پاسخ درست ارائه کنند با استفاده از رویه‌های محاسباتی، به جمع، تفریق، ضرب یا تقسیم اعداد ذکر شده در صورت مسئله پرداختند (جدول ۹). این پاسخ‌ها حاکی از آن است که نتوانسته‌اند صورت مسئله را به‌درستی درک کنند و پاسخ درستی به مسئله ارائه کنند. عده‌ی کمی از آنان بدون در نظر گرفتن کل پول حسن و علی –تنها با مقایسه دو کسر داده شده در صورت مسئله– به مسئله پاسخ نادرستی دادند. برخی از دانش‌آموزان به جمع، تفریق و ... بین کسر و مقدار داده شده پرداختند. در صورتی که هریک از کسرهای داده شده بازنمایی کننده جزءای از یک مقدار است و خود به تنهایی مقدار نیست. در حقیقت، این دانش‌آموزان نمی‌توانند بین کسر به‌عنوان جزءای از کل و یک مقدار تمایز قائل

[1] source: Newstead & Olivier (1999)

شوند. این بدفهمی –در نظر گرفتن جزءای از یک کمیت به‌عنوان مقدار– از بدفهمی‌های شناسایی شده توسط هاسر و آبوز (۲۰۰۳) نیز هست.

جدول ۹ نمونه‌ای از پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤال منتخب از زیرساختار عملگر

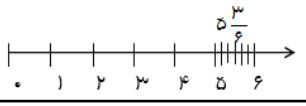
انواع پاسخ‌ها	فراوانی	درصد		نمونه‌ای از پاسخ‌های دانش‌آموزان
درست	۱۹۸	۵۴/۱	۱	حسن پول بیشتری خرج کرده است، چون $\frac{5}{8}\times 4000=2500$ $\frac{7}{10}\times 3000=2100$ $2500 > 2100$
			۲	حسن، چون ۷ | ۲۱۰۰ ۱۰ | ۳۰۰۰ ۵ | ۲۵۰۰ ۸ | ۴۰۰۰
نادرست	۱۶۸	۴۵/۹	۱	حسن پیشتر خرج کرده، چون مقدار پول خرج شده‌اش کمتر از پول علی است. $\frac{3990}{10}-\frac{7}{10}=\frac{4000}{10}-\frac{7}{10}=4000-3000$ $\frac{2095}{8}-\frac{5}{8}=\frac{2400}{8}-\frac{5}{8}=300$
			۲	پول علی زیادتر است. مجموع: $4000\times 300=1200000$ پول علی: $1200000+8=150000$ پول حسن: $150000+10=15000$
			۳	علی پول بیشتری خرج کرده، چون وقتی هم مخرج می‌کنیم، کسر پول علی پیشتر می‌شود. $\frac{5}{8}\quad\frac{7}{10}\quad\rightarrow\quad\frac{50}{80}<\frac{56}{80}$

– سؤال مرتبط با زیرساختار اندازه

کسری بنویسید که از ۵ بزرگتر و از ۶ کوچکتر باشد.

در این سؤال پاسخ باز، هدف این بود که دانش‌آموزان ویژگی چگال بودن کسرها را درک کنند و بدانند که بین هر دو عدد صحیح حداقل یک کسر وجود دارد. دانش‌آموزان راهبردهای مختلفی را برای پاسخ به مسئله برگزیدند. در نظر گرفتن یک عدد اعشاری بین ۵ و ۶ و تبدیل آن به کسر، استفاده از محور اعداد و هم‌ارزی از جمله راهبردهای استفاده شده توسط دانش‌آموزان بود (جدول ۱۰). ۶۵ درصد از دانش‌آموزان نتوانستند به مسئله پاسخ درست دهند. مهمترین دلیلی که این دانش‌آموزان به مسئله پاسخ درست ندادند عدم درک صحیح کسرها و در نظر گرفتن آن‌ها به‌عنوان دو عدد صحیح مستقل –بدفهمی که پیش از این به آن اشاره شد– است.

جدول ۱۰ نمونه‌ای از پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤال منتخب از زیرساختار اندازه

انواع پاسخ‌ها	فراوانی	درصد	نمونه‌ای از پاسخ‌های دانش‌آموزان	
درست	۱۲۸	۳۵/۰	$۵/۵=۵\frac{۵}{۱۰}=\frac{۵۵}{۱۰}$	۱
				۲
			$۵=\frac{۲۰}{۴}$ و $\frac{۲۱}{۴}$ و $\frac{۲۲}{۴}$ و $\frac{۲۳}{۴}$ و $\frac{۲۴}{۴}=۶$ و	۳
			$۵\frac{۲}{۳}$، چون $\frac{۲}{۳}$ کوچکتر از واحد است، پس نمی‌توانند کسر $۵\frac{۲}{۳}$ را به ۶ برسانند (چون اگر یک با ۵ جمع شود، به ۶ می‌رسد).	۴
			$\frac{۶\times۲}{۱\times۲}$ و $\frac{۵\times۲}{۱\times۲}=\frac{۱۲}{۲}$ و $\frac{۱۰}{۲}\rightarrow\frac{۱۱}{۲}$	۵
نادرست	۲۳۸	۶۵/۰	من فکر می‌کنم منظور سؤال این است که صورت کسر باید از ۵ بزرگتر و مخرج کسر از ۶ کوچکتر باشد= $\frac{۶}{۴}$	۱
			$\frac{۵\prec۶}{۶\succ۵}\rightarrow\frac{۶}{۵}$	۲
			برای این‌که بین یک کسر به‌دست بیاید صورت را با صورت و مخرج را با مخرج، جمع می‌کنیم. $\frac{۵}{۵}+\frac{۶}{۶}=\frac{۱۱}{۱۱}$	۳

– سؤال مرتبط با ضرب کسرها

حاصل ضرب‌های زیر را بنویسید.

(ب) $\frac{۱}{۴}\partial ۴۴\cong$

(الف) $\frac{۲}{۳}\partial\frac{۸}{۱۵}\cong$

نتایج حاکی از آن بود که دانش‌آموزان در ضرب یک کسر در کسر دیگر، موفق‌تر از ضرب یک کسر در یک عدد صحیح عمل کردند (جدول۱۱). در قسمت "الف" برخی از دانش‌آموزان بین دو کسر مخرج مشترک گرفتند. این بدفهمی نتیجه تدریس رویه‌ای و تعمیم اشتباه رویه جمع کسرها به ضرب کسرها است. مساوی کردن مخرج کسرها در ضرب بدفهمی است که پیش از این در تحقیقات پیشین (نظیر هاسر و آبوز، ۲۰۰۳ و سیگلر، تامپسون و اسکنیدر[1]، ۲۰۱۱) نیز به آن اشاره شده است. بعضی از دانش‌آموزان، بزرگترین مخرج بین مخرج‌های دو

1. Siegler, Thompson & Schneider

کسر $\frac{۱۶}{۱۵}$ را در مخرج، و صورت‌ها را در هم ضرب کردند و در صورت نوشتند و به کسر اشاره کردند. این بدفهمی نیز ناشی از تعمیم نادرست ایده جمع کسرها به ضرب کسرها است. درصدی از دانش‌آموزان علاوه بر ساده کردن صورت با مخرج، صورت‌ها را با هم یا مخرج‌ها را با هم ساده کرده بودند. یک بدفهمی رایج که در منتخب آمریکا (۲۰۰۶) نیز به آن اشاره شده است. در قسمت "ب" این سؤال نیز چهار نوع عملکرد نادرست در پاسخ‌های دانش‌آموزان مشاهده شد. این پاسخ‌ها نیز نتیجه تدریس رویه‌ای و عدم درک مفهوم ضرب کسرها است.

جدول ۱۱ نمونه‌ای از پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤال منتخب از ضرب کسرها

انواع پاسخ‌ها	فراوانی		درصد	نمونه‌ای از پاسخ‌های دانش‌آموزان		
درست	الف	۳۱۳	۸۵/۵	۱	ب) $\frac{۱}{۴}\times ۴۴ = \frac{۴۴}{۴} = ۱۱$	الف) $\frac{۲}{۳}\times\frac{۸}{۱۵} = \frac{۱۶}{۴۵}$
	ب	۲۶۶	۷۲/۷			
نادرست	الف	۵۳	۱۴/۵	۱	ب) $\frac{۱}{۴}\times ۴۴ = ۱۷۶$ یا $\frac{۱}{۱۷۶}$	الف) $\frac{۲}{۳}\times\frac{۸}{۱۵} = \frac{۳۰}{۴۵}\times\frac{۲۴}{۴۵} = \frac{۷۲۰}{۴۵}$
				۲	ب) $\frac{۱}{۴}\times ۴۴ = \frac{۱۷۶}{۴}$	الف) $\frac{۲}{۳}\times\frac{۸}{۱۵} = \frac{۲}{۱۵}\times\frac{۸}{۱۵} = \frac{۱۶}{۱۵}$
	ب	۱۰۰	۲۷/۳	۳	ب) $\frac{۱}{۴}\times ۴۴ = \frac{۴۴}{۱۷۶}$	الف) $\frac{۱}{۳}\times\frac{۴}{۱۵} = \frac{۴}{۵}$

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

سؤال مرتبط با جمع کسرها

حاصل جمع‌های زیر را بنویسید. (ج)	(ب)	(الف)
$۱\frac{۱}{۲} \cdot ۲\frac{۱}{۲} \cong$	$\frac{۳}{۴} \cdot \frac{۴}{۵} \cong$	$\frac{۵}{۸} \cdot \frac{۴}{۸} \cong$

همان‌طور که انتظار می‌رفت، دانش‌آموزان در قسمت "الف" موفق‌تر از دو قسمت دیگر بودند (جدول۱۲).

جدول۱۲ نمونه‌ای از پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤال منتخب از جمع کسرها

انواع پاسخ‌ها		فراوانی	درصد		نمونه‌ای از پاسخ‌های دانش‌آموزان
درست	الف	۳۵۳	۹۶/۴	۱	(الف $\frac{4}{8}+\frac{5}{8}=\frac{9}{8}=1\frac{1}{8}$ (ب $\frac{4}{5}+\frac{3}{4}=\frac{16}{20}+\frac{15}{20}=\frac{31}{20}$ (ج $2\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}=2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=3+\frac{2}{2}=4$
	ب	۳۲۰	۸۷/۴		
	ج	۳۱۸	۸۶/۹	۲	(الف $\frac{4}{8}+\frac{5}{8}=\frac{32}{64}+\frac{40}{64}=\frac{72}{64}$ (ب $\frac{4}{5}+\frac{3}{4}=\frac{16}{20}+\frac{15}{20}=\frac{31}{20}=1\frac{11}{20}$ (ج $2\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=\frac{8}{2}=4$
نادرست	الف	۱۳	۳/۶	۱	(الف $\frac{4}{8}+\frac{5}{8}=\frac{32}{16}+\frac{40}{16}=\frac{72}{16}$ (ب $\frac{4}{5}+\frac{3}{4}=\frac{7}{9}$ (ج $2\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}-3\frac{2}{4}$
	ب	۴۶	۱۲/۶		
	ج	۴۸	۱۳/۱		

همانطور که در جدول ۱۲ مشاهده می‌شود برخی از دانش‌آموزان در قسمت "الف" از رویه‌ی مخرج مشترک‌گیری استفاده کردند. این پاسخ‌ها حاکی از تدریس رویه‌ای و تأکید زیاد بر درک رویه‌ای دانش‌آموزان است. در قسمت "ب" و "ج" نیز برخی از دانش‌آموزان برای یافتن مجموع دو کسر، صورت‌ها را با هم و مخرج‌ها را با هم جمع کردند. یک بدفهمی رایج در جمع کسرها که ناشی از عدم درک صحیح کسرها و در نظر گرفتن کسرها به‌عنوان دو عدد صحیح مستقل و تعمیم نادرست جمع اعداد صحیح به جمع اعداد کسری است. به این بدفهمی در تحقیقات مختلف (نظیر آماتو[1]، ۲۰۰۵؛ منتخب امریکا، ۲۰۰۶؛ بهر، واش موث[2]، پست و لش، ۱۹۸۴؛ نوروزی، بخشعلی‌زاده و قربانی، ۱۳۸۹؛ پدیت و همکاران، ۲۰۱۰؛ سیگلر و همکاران، ۲۰۱۱) نیز اشاره شده است.

- سؤال مرتبط با هم‌ارزی کسرها

در جای خالی عدد مناسب بنویسید.

(الف) $\frac{2}{3}=\frac{\quad}{12}$ (ب) $\frac{25}{40}=\frac{5}{\quad}$ (ج) (د) $\frac{1}{4}=\frac{\quad}{\quad}=\frac{\quad}{\quad}$

[1]-Amato
[2]-Wachsmuth

نتایج نشان داد که دانش‌آموزان در قسمت "الف" از "ب" و در قسمت "ب" از "ج" و "د" موفق‌تر بودند (جدول۱۳). این نتایج بیان می‌کند زمانی که صورت یا مخرج کسر هم‌ارز داده می‌شود، دانش‌آموزان عملکرد بهتری دارند نسبت به زمانی که از آن‌ها خواسته می‌شود تا خودشان کسرهایی هم‌ارز با کسر داده شده را بنویسند. در قسمت "ب" که سؤال غیر روتینی بود، دانش‌آموزان باید مخرج را به پنج تقسیم می‌کردند. پاسخ‌های نادرست دانش‌آموزان حاکی از آن بود که اکثر دانش‌آموزان به جای تقسیم ۴۰ بر ۵، با ضرب آن در ۵ به ۲۰۰ اشاره کردند. این نتیجه حاکی از تدریس رویه‌ای و عدم درک مفهوم هم‌ارزی کسرها است. در کلاس‌های درس در چنین مسائلی معمولاً به دانش‌آموزان گفته می‌شود که "ببینید صورت چند برابر شده است مخرج را در آن عدد ضرب کنید".

جدول ۱۳ نمونه‌ای از پاسخ‌های دانش‌آموزان به سؤال منتخب از هم‌ارزی کسرها

انواع پاسخ‌ها	فراوانی		درصد		نمونه‌ای از پاسخ‌های دانش‌آموزان
درست	الف	۳۶۱	۹۸/۶	۱	الف) $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ ج) $\frac{1}{4} \frac{2}{8} = \frac{3}{12}$ ب) $\frac{25}{40} \frac{5}{8} =$
	ب	۳۳۱	۹۰/۴		
	ج	۳۰۹	۸۴/۴		
	د	۲۸۹	۷۹/۰		
نادرست	الف	۵	۱/۴	۱	الف) $\frac{2}{3} = \frac{6}{12}$ ج) $\frac{1}{4} \frac{1}{5} = \frac{1}{6}$ ب) $\frac{25}{40} \frac{5}{200} =$
	ب	۳۵	۹/۶		
	ج	۵۷	۱۵/۶		
	د	۷۷	۲۱/۰		

با این‌که در قسمت "الف" و "ب" بسیاری از دانش‌آموزان به اعداد درست اشاره کردند، اما برخی از آنان نتوانستند به کسرهای هم‌ارز با $\frac{1}{4}$ اشاره کنند. درصدی از آنان با اضافه‌کردن عددی به صورت یا به مخرج به نادرستی به کسرهای نادرست اشاره کردند. دانش‌آموزانی که مفهوم هم‌ارزی را به‌درستی درک نمی‌کنند، برای یافتن کسرهای هم‌ارز، ایده جمع دو عدد صحیح را به‌نادرستی به‌کار می‌برند. در پژوهش‌های پیشین (نظیر منتخب امریکا، ۲۰۰۶؛ وانگ و همکاران، ۲۰۰۶) نیز به این بدفهمی دانش‌آموزان اشاره شده است.

پاسخ به سؤالات پژوهش

سؤال اول پژوهش: آیا درک زیرساختار جزء به کل، پیش‌نیازی برای درک زیرساختارهای دیگر است؟

همبستگی بین زیرساختار جزء به کل و چهار زیرساختار دیگر حاکی از آن است که زیرساختار جزء به کل اساس و مبنایی برای درک چهار زیرساختار دیگر است. بیشترین همبستگی بین زیرساختار جزء به کل و اندازه و پس از آن بین زیرساختار جزء به کل و نسبت است. زیرساختار جزء به کل، ۴۲/۳ درصد از واریانس زیرساختار اندازه، ۳۸/۵ درصد از واریانس زیرساختار نسبت، ۲۶/۱ درصد از واریانس زیرساختار خارج‌قسمت و ۲۳/۸ درصد از واریانس زیرساختار عملگر را تبیین می‌کند؛ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که درک زیرساختار جزء به کل، مبنا و پیش‌نیازی برای توسعه‌ی درک چهار زیرساختار دیگر است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، زیرساختار جزء به کل تنها بخشی از واریانس زیرساختارهای دیگر را تبیین می‌کند. بنابراین، با آن‌که زیرساختار جزء به کل برای توسعه زیرساختارهای دیگر لازم است ولی کافی نیست. تفاوت میان همبستگی‌های بین زیرساختار جزء به کل و زیرساختارهای دیگر را می‌توان به تأکید نابرابر آموزش، کتاب‌ها و برنامه‌درسی روی این زیرساختارها نسبت داد. همبستگی بالای بین زیرساختار جزء به کل و اندازه را می‌توان به این حقیقت نسبت داد که افراز کردن نقش بسزایی در درک این دو زیرساختار دارد. کسر به‌عنوان اندازه، فرآیند تکرار را یکپارچه می‌سازد طوری‌که یک واحد به یک مجموعه مرکب از اندازه‌های مساوی مجزا افراز می‌شود. به‌عنوان نمونه، محققین در مصاحبه با برخی از دانش‌آموزان دریافتند که برخی از آن‌ها عقیده دارند که کسر "عدد" نیست. درحالی‌که این دانش‌آموزان می‌توانند نقاط مشخص شده روی محور اعداد را تعیین کنند و کسر متناظر با آن را بنویسند. از طرفی، هم زیرساختار جزء به کل و هم زیرساختار نسبت، ایده مقایسه کمیت‌ها را دربر دارند. بنابراین بین زیرساختار جزء به کل و نسبت، همبستگی بیشتری نسبت به دو زیرساختار دیگر مشاهده می‌شود.

سؤال دوم پژوهش: آیا درک زیرساختارهای مختلف کسر، پیش‌نیازی برای درک مفاهیم جمع، ضرب و هم‌ارزی کسرها است؟

درک دانش‌آموزان از زیرساختارهای مختلف بخشی از واریانس عملکرد آنان در عملیات و هم‌ارزی کسرها را تبیین می‌کند. بویژه، زیرساختار نسبت، ۳۳ درصد از واریانس عملکرد آنان در هم‌ارزی کسرها را تبیین می‌کند. همبستگی بین زیرساختار نسبت و مفهوم هم‌ارزی کسرها می‌تواند به این حقیقت نسبت داده شود که یافتن کسرهای هم‌ارز با تناسب و یافتن نسبت‌های هم‌ارز مرتبط است. زیرساختار عملگر تنها بخش کوچکی از واریانس عامل ضرب (۵/۱ درصد) کسرها را تبیین می‌کنند. در واقع، این یافته‌ها حاکی از آن است که توسعه‌ی درک زیرساختار نسبت و عملگر می‌تواند به توسعه‌ی درک هم‌ارزی و ضرب کسرها کمک نماید. بنابراین توسعه درک دانش‌آموزان از زیرساختارهای کسر می‌تواند عملکردشان را در سؤالات مرتبط با هم‌ارزی و عملیات با کسرها را بهبود بخشد. دو زیرساختار جزء به کل و اندازه، با هم ۱/۱ درصد از واریانس عامل جمع را تبیین می‌کنند ولی این مقدار از لحاظ آماری معنادار نیست. زیرساختار جزء به کل تنها ۰/۹ درصد از واریانس عامل جمع را پیش‌بینی می‌کند که البته این مقدار از لحاظ آماری معنادار نیست. عدم همبستگی میان زیرساختار جزء به کل و جمع کسرها و همچنین عدم همبستگی میان زیرساختار اندازه و جمع حاکی از آن است که در یاددهی و آموزش مفهوم جمع کسرها بیشتر بر رویه‌ی جمع تأکید شده است و این مفهوم با بازنمایی‌های پیوسته (جزء به کل) یا محور اعداد (اندازه) آموزش داده نشده است.

بحث و نتیجه‌گیری

در این پژوهش که به روش توصیفی- تحلیلی انجام شده است، درک دانش‌آموزان پایه ششم ابتدایی از کسرها با مد نظر قرار دادن مدل نظری بهر و همکاران (۱۹۸۳) مورد بررسی قرار گرفت. نتایج حاکی از آن است که در مجموع، دانش‌آموزان درک متوسطی از کسرها دارند و درک آنان عمدتاً مبتنی بر کسر به‌عنوان جزءای از کل است. همچنین نتایج نشان می‌دهد که درک زیرساختار جزء به کل برای درک چهار زیرساختار دیگر نسبت، عملگر، خارج‌قسمت و اندازه لازم و ضروری است. به این معنا که درک زیرساختار جزء به کل، نقش معناداری در توسعه درک چهار زیرساختار دیگر دارد اما تنها بخشی از واریانس آن‌ها را تبیین می‌کند.

بنابراین این زیرساختار به‌تنهایی نمی‌تواند منجر به درک چهار زیرساختار دیگر شود. این یافته‌ها از این ادعا حمایت می‌کنند که درک زیرساختار جزء به کل در درک کسرها لازم است اما به تنهایی کافی نیست (باتورو، ۲۰۰۴). از طرفی درک زیرساختار نسبت به توسعه‌ی درک مفهوم هم‌ارزی و درک زیرساختار عملگر تا اندازه‌ای به درک ضرب کسرها کمک می‌کند. بنابراین در راستای مطالعات قبلی (کارالامبوس و پنتازی، ۲۰۰۷؛ لامون، ۲۰۰۶) این یافته‌ها بیان می‌کنند که به جای تأکید تنها روی عملیات با کسر، معلمان باید روی درک مفهومی کسرها نیز تأکید داشته باشند و تنها بر رویه اتکا نکنند.

نتایج این پژوهش تا حدودی نتایج پژوهش کارالامبوس و پنتازی (۲۰۰۷) را مورد تأیید قرار می‌دهد. کارالامبوس و پنتازی (۲۰۰۷) نیز در پژوهش خود به این نتیجه رسیدند که دانش‌آموزان عملکرد متفاوتی در زیرساختارهای کسر دارند و عملکرد آنان عمدتاً مبتنی بر زیرساختار جزء به کل است. آن‌ها این عملکرد متفاوت را به ناهماهنگی در تأکید گذاری آموزش، کتاب‌ها و برنامه درسی روی زیرساختارها، نسبت دادند. همچنین، آن‌ها در پژوهش خود به این نتیجه رسیدند که درک زیرساختار جزء به کل به توسعه‌ی درک زیرساختارهای دیگر و تبعاً توسعه‌ی درک زیرساختارها به توسعه درک مفاهیم هم‌ارزی و ضرب کسرها کمک می‌نماید. همچنین این یافته‌ها از این ادعا که درک مفهوم کسر به درک هریک از زیرساختارها و یکپارچه کردن و تلفیق آن‌ها به هم بستگی دارد حمایت می‌کنند. به این معنا که هرچه درک دانش‌آموزان از زیرساختارهای کسر افزایش یابد، آنان بهتر می‌توانند مفهوم کسر را درک کنند و طبیعتاً در ضرب و هم‌ارزی کسرها نیز، موفق‌تر خواهند بود.

از وظایف معلمان توسعه درک مفهومی دانش‌آموزان از مفاهیم ریاضی است؛ بنابراین به معلمان توصیه می‌شود که در آموزش مفهوم کسر بر زیرساختارها تأکید داشته باشند. معلمان باید با کمک این زیرساختارها، بازنمایی‌هایی مختلف (نظیر مدل‌های پیوسته و گسسته و محور اعداد) و مثال‌های برگرفته از دنیای واقعی به توسعه هرچه بیش‌تر درک مفهومی دانش‌آموزان از این مفهوم انتزاعی در دوره ابتدایی کمک نمایند. تحقق این مهم، نیازمند آموزش معلمان دوره ابتدایی و آشنایی آن‌ها با زیرساختارهای کسر و آگاهی از تفاوت‌های میان این زیرساختارها است. در آخر می‌توان بیان کرد که نباید این یافته‌ها را از آموزش، برنامه و کتاب‌های درسی مجزا دانست. بنابراین ارتباط میان زیرساختارهای مختلف نیاز به بررسی بیشتری دارد و می‌توان

این ارتباطات را روی نمونه‌ی دیگری یا پس از آموزشی با تأکید بر زیرساختارها، مورد بررسی قرار داد.

منابع

دوستی، ملیحه. (۱۳۹۲). بررسی درک و فهم دانش‌آموزان پایه ششم ابتدایی از کسرها. پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران.

نوروزی لرکی، فرزانه، بخشعلی‌زاده، شهرناز، قربانی سی‌سخت، زینب. (۱۳۸۹). بازنمایی‌های چندگانه: فرایندی مهم در یاددهی و یادگیری کسرها. *نشریه علمی- پژوهشی فناوری آموزش*، ۵(۱)، ۱۳-۲۳.

Aksu, M. (1997). Student performance in dealing with fractions. *The Journal of Educational Research, 90*(6), 375 – 380.

Amato, S. A. (2005). Developing students' understanding of the concept of fractions as numbers. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th PME Conference*, (2), 49-56, Melbourne: University of Melbourne.

America's choice, (2006). Mathematics Navigator: A Sample of Mathematics Misconceptions and Errors (Grades 2 – 8), *https://knowledgebase.pearsonschool.com, last date of access: Dec. 19 2013.*

Ashlock, R .B. (2006). *Error patterns in computation: using error patterns to improve instruction (*9th ed*)*. Upper Saddle River, New Jersey: Merrill.

Baturo, A. R. (2004). Empowering Andrea to help year 5 students construct fraction understanding. *Proceedings of the 28th PME Conference*, Vol. 2, Bergen University College, Bergen, pp. 95–102.

Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R., & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(5), 323 – 341.

Behr, M., Lesh, R., Post, T. & Silver, E. (1983). 'Rational number concepts', in R. Lesh and M. Landau (eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Academic Press, New York, pp. 91–125.

Behr, M.J., Harel, G., Post, T. and Lesh, R. (1993). Rational numbers: Toward a semantic analysis-emphasis on the operator construct , in T.P. Carpenter, E. Fennema and T.A. Romberg (eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research*, Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey, pp. 13–47.

Bezuk, N. S., & Bieck, M. (1992). Current research on rational numbers and common fractions: Summary implications for teachers. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grade mathematics* (pp. 118-136). New York: Macmillan.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics, 64*, 293-316.

Haser, Ç. , Ubuz, B. (2003) Student's conception of fractions: a study of 5th grade students. Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi 24 : 64-69.

Kieren, T.E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers, in R. Lesh (ed.), *Number and Measurement: Papers from a Research Workshop ERIC/SMEAC*, Columbus, OH, pp. 101–144.

Lamon, S.J. (2006). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Liu, C., Xin, Z. & Li, X. (2011). The Development of Chinese Students' Understanding of the Concept of Fractions from Fifth to Eighth Grade. *Journal of Mathematics Education*, 4(2), 17-34.

National Council of Teachers of Mathematics, (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Newstead, K. and Olivier, A. (1999). Addressing students' conceptions of common fractions. *Proceedings of the 23nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.3, 329 - 336). Haifa, Israel.

Petit, Marjorie M., Laird, Robert E. & Marsden. Edwin L. (2010). *A Focus on Fractions: Bringing Research to the Classroom*. New York: Routledge.

Siegler, R.S., Thompson, C.A. & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fraction development. *Cognitive psychology, 62*, 273–296.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of student's understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction, 14*, 508–518.

Stewart, V .M .(2005). Making sense of students' understanding of fractions: An exploratory study of sixth graders' construction of fraction concepts through the use of physical referents and real world representations. PhD thesis, Florida State University.

Tobias, J. M. (2009). Preservice elementary teachers'developing of rational numbr understanding through the social perspective and the relationship among social and individual environments. PhD thesis, University of Central Florida.

Wheeldon, D. (2008). Developing Mathematical Practices in A Social Context: An Instructional Sequence to Support Prospective Elementary Teachers' Learning of Fractions. PhD thesis, University of Central Florida.

Wong, M. & Evans, D. (2007). Students' Conceptual Understanding of Equivalent Fractions. In J. Watson & K. Beswick (Eds), *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, Vol 2, Mathematics: Essential Research, Essential Practice.

Wong, M., Evans, D., & Anderson, J. (2006). Developing a Diagnostic Assessment Instrument for Identifying Students' Understanding of Fraction Equivalence. The University of Sydney. ACSPRI Conference. Sydney, Australia.