

تاریخ علم، دوره ۱۱، شماره ۲، پاییز و زمستان ۱۳۹۲، ص ۲۹۱-۳۱۰

نسبت‌های تکرارشونده در هندسه برخالی (فراکتالی) گنبد‌های اُرجین

محمد مشایخی*

کارشناس ارشد معماری، مدرس دانشگاه علم و فرهنگ تهران

bas.mashayekhi1384@gmail.com

فرهاد تهرانی

دانشگاه شهید بهشتی تهران

f.tehrani@gmail.com

(دریافت: ۱۳۹۳/۱۲/۱۸، پذیرش: ۱۳۹۴/۰۶/۲۹)

چکیده

در طبقه‌بندی گنبد‌های سنتی، گنبد به دودسته گنبد‌های رُک (مخروطی) و گنبد‌های نار (شبه نیم‌کره) تقسیم می‌شود. گنبد‌های اُرجین گونه‌ای از گنبد‌های رُک هستند که در منطقه میانه رودان (بین‌النهرین) و جنوب غربی ایران در گذشته رواج داشته‌اند. گنبد‌های اُرجین شکلی مخروطی دارند و از توالی و تکرار پلکان‌هایی تشکیل شده‌اند که در هر ردیف به صورت حلقه درآمده‌اند و این حلقه‌ها از پایین به بالا به تدریج کوچک می‌شوند. بنا بر این هندسه برخالی بهترین راه برای تبیین هندسه آنهاست. زیرا روابط عددی در تناسبات شکل‌های خودمتمثابه در طبقات، و تناسبات اجزاء گنبد اعم از ارتفاع طبقات، دهانه و سایر اجزاء هر یک با رابطه‌ای خاص الگویی برخالی ایجاد می‌کند. این پژوهش با بررسی دقیق گنبد‌های اُرجین در این حوزه تلاش دریافتن ساختارهای مختلف هندسه گنبد‌های اُرجین با استفاده از دنباله‌های عددی و رابطه آنها با هندسه برخالی دارد.

کلیدواژه‌ها: تناسبات هندسی، دنباله‌های نامتناهی، گنبد‌های اُرجین، هندسه برخالی.

معرفی کلی گنبد‌های اُرچین

بیشتر متخصصان علت اولیه پدید آمدن فرم گنبد را پوشاندن دهانه‌های بزرگ به وسیله مصالح فشاری می‌دانند. مصالح سنتی مخصوصاً در ایران عموماً فقط توانایی باربری به صورت فشاری را دارند. بنا بر این شکل سازه‌های سنتی از الگوهای تبعیت می‌کند که با این نوع باربری هماهنگی داشته باشد. شکل‌های منحنی با ضریب مشتق دوم منفی (منحنی‌های دارای ماکسیمم) چنین خاصیتی دارند و تقریباً دوران یا امتداد چنین خطوطی در تمام آثار معماری سنتی مختلف وجود دارند. طاق‌ها و گنبد‌ها نیز به همین مبنای ایجاد شده‌اند.



تصویر ۱. گنبد بقعه دانیال نبی در شوش یکی از معروف‌ترین نمونه‌های گنبد اُرچین

اما در کنار خواص سازه‌ای استفاده از شکل‌های منحنی در ساختمان اثرات زیبایی‌شناسانه نیز دارد. خطوط منحنی از نظر زیبایی‌شناسانه ظرفیت‌های بالاتری از خطوط مستقیم دارند، و نه تنها هویت بخصوصی برای بناها ایجاد می‌کنند بلکه به صورت نمادی فرهنگی نیز درمی‌آیند و بخش‌های شاخص بنا شکل جدی‌تری از نمادپردازی به خود گرفته و مثلاً گنبد اصلی مساجد به صورت سمبل مسجد مطرح می‌شود.

در طبقه‌بندی گنبد‌های سنتی، گنبد به دودسته گنبد‌های رُک (مخروطی) و گنبد‌های نار (شبه نیم‌کره) تقسیم می‌شود. اگر گنبد را به صورت دوران یک خط در یک محور تصور کنیم، گنبد‌هایی که با مولد یک خط مستقیم ایجاد می‌شوند گنبد‌های رُک و

گنبدهایی که با خطوط منحنی و غالباً منحنی‌های دارای بیشینه (ماکسیم‌دار) ایجاد می‌شوند گنبد‌های نار گفته می‌شود. با این طبقه‌بندی، در گنبد‌های موجود دسته‌ای فرعی در گنبد‌های رک پدید می‌آید که برخلاف گنبد‌های رک عادی که سطحی هموار دارند، به صورت پله‌پله ساخته شده‌اند. به این گنبد‌ها اُرچین می‌گویند.

گنبد‌های اُرچین به‌جز کلیت مخروطی با سایر گنبد‌های رک وجه تشابه دیگری نیز دارند که روش اجرچینی آنهاست. گنبد‌های رک، از جمله گنبد‌های اُرچین، معمولاً به وسیلهٔ اجرچینی خاصی موسوم به لاریزا ساخته شده که در این نوع اجرچینی، تراز اجر تغییر نمی‌کند و هر رک اجر تنها به صورت افقی روی رگ پیشین کمی پیش آمده شده و به تدریج دهانه گنبد بسته می‌شود. سپس این پوشش به وسیلهٔ آجرهای مخصوص شیب‌دار یا کاشی پوشانده می‌شود؛ در گنبد‌های اُرچین تماماً پوشش به صورت ملات سفیدرنگ یا کرم با پله‌هایی با گام اولیه ۸۰ تا ۱۵۰ سانتی‌متری ساخته می‌شوند. اما تفاوت‌های زیادی نیز میان گنبد‌های رک ساده و اُرچین وجود دارد، نخست اینکه، مهد گنبد‌های رک منطقهٔ شمال ایران است و مهم‌ترین اثر بجا مانده از آنها گنبد کاووس بن اسکندر در شهر «گنبد» در استان گلستان و نزدیکی شهر باستانی جرجان است، اما گسترهٔ ساخت گنبد‌های اُرچین منطقه جنوب غربی فلات ایران و میان‌رودان تا آسیای صغیر است. دوم اینکه ریشهٔ فرمی گنبد‌های رک احتمالاً سقف‌های شیب‌دار برای دفع آب باران در منطقهٔ پرباران شمال بوده است، اما دربارهٔ گنبد‌های اُرچین نمی‌توان چنین نظری داشت. به علاوه گنبد‌های اُرچینی که در سرزمین‌های عربی باقی مانده‌اند مربوط به پیامبران بنی‌اسرائیل یا بزرگان اسلامی منطقه میان‌رودان هستند ولی گنبد‌های رک برای میل مقبره‌های پادشاهان ایرانی قرون اولیهٔ اسلامی یا بزرگان شیعه ساخته شده‌اند.

تاریخچهٔ پیدایش گنبد‌های اُرچین به قرون میانهٔ هجری پیش از حملهٔ مغول بازمی‌گردد. گنبد‌های اُرچین بین قرون ۹ تا ۱۲ هجری خورشیدی و در منطقه‌ای به وسعت سرزمین‌های تحت حکومت سلجوقیان از سیستان تا دمشق گسترده شده‌اند (مهدوی نژاد و مشایخی، ۱۳۹۰). پیدایش این گنبد‌ها و معماری منسجم آن به عصری طلایی در سرزمین‌های اسلامی بازمی‌گردد که سرچشمهٔ بسیاری نوآوری‌های

۱. گونه‌ای اجرچینی که در اجرچینی دیوار و سقف‌های طاقی کاربرد دارد.

هنری در جهان اسلام بوده است. با وجود این، گنبد‌های اُرجین عموماً در مناطق گرم جنوبی باقی مانده‌اند و به مناطق کوهستانی در شمال فلات ایران و آناتولی راه نیافته‌اند. همچنین این گنبد‌ها درگذر از شرق به غرب این منطقه تغییراتی یافته و با شکل‌های دیگر ترکیب شده‌اند.

در باره دلایل شکل‌گیری گنبد‌های اُرجین دیدگاه‌های گوناگونی وجود دارد و اگرچه برخی از این دلایل مبتنی بر مستندات هستند اما هیچ کدام به‌طور کامل شکل بدیع و خاص گنبد‌های اُرجین را توضیح نمی‌دهد. گرابار گنبد‌های اُرجین را نشانه‌ای از آسمان می‌داند و شکل صعودی همراه با چرخش آنها را نمایانگر گنبد چرخشی آسمان می‌داند. یاسر تابا^۱ (ص ۶۴) پژوهشگر مشهور معماری اسلامی نظر دیگری دارد:

... تقسیم‌بندی ماده به قسمت‌های کوچک، مربوط به مکتبی فکری [در آن دوران] بوده است، به بیان دیگر تقسیم یک گنبد به قسمت‌هایی کوچک‌تر (حجره‌هایش) به معنای [تجسم] یک مکتب رایج [در سده ششم تا دهم هجری] از جهان به [شکل] گنبد بوده است.

او بخشی از عقیده اشاعره را در سده‌های ۱۰ و ۱۱ میلادی با نظریه مقارنه‌گرایی (Occasionalism) حاکم بر اندیشه زمان همسو می‌داند، که بر اساس آن خدا به‌عنوان حاکم مطلق ریاست می‌کند؛ بنا بر این ماده نه جاودان و نه غیرقابل تغییر است و نه قابل تجزیه نامتناهی است، بلکه از ذراتی ساخته شده است که هر یک از آنها قابل تقسیم نیستند. و بر این مبنا الگوی گنبد‌های پلکانی و مضرس اُرجین تجسمی از الگوی اندیشه حاکم در آن زمان از جهان دانسته شده است.

بر اساس یک نگاه دیگر گنبد‌های اُرجین تداوم شکل‌های پلکانی در معماری زیگوراتی اقوام باستانی منطقه میان‌رودان دانسته شده است که در این صورت این شکل با مناره سامرا نیز خویشاوند می‌گردد. نگره دیگری نیز وجود دارد که شکل‌گیری گنبد‌های اُرجین را دارای منشأ اقلیمی می‌داند. بدین معنا که معماران با افزایش نسبت سطح به حجم تلاش داشته‌اند تا انتقال حرارت و در نتیجه خنک‌تر شدن گنبد را ممکن کنند؛ یا با ایجاد سطح مضرس، سایه‌اندازی را روی گنبد افزایش دهند.

در نهایت می‌توان نتیجه گرفت که گنبد‌های اُرچین برگرفته از سنت‌های معماری منطقه خوزستان و میان‌رودان هستند و پیوستگی خوبی با آنها برقرار کرده‌اند و به نوعی فن‌آوری ساخت سنتی را با استفاده از مصالح بومی میسر کرده‌اند و اگر هم فقط به دلایل فنی و اقلیمی شکل گرفته باشند باز هم ساختاری ریشه‌دار در فرهنگ کهن این منطقه دارند (مهدوی نژاد و مشایخی، ۱۳۹۰).

اما در این مقاله به بررسی هندسه گنبد‌های اُرچین و ارتباط آن روابط ریاضی برخالی می‌پردازیم. ویژگی تکرارهای خودمتشابه و تکرار اشکال همراه با تغییر در مقیاس آنها در معماری با هندسه برخالی تبیین می‌شود. تئوری برخال که در سال ۱۹۷۰ توسط ریاضیدان لهستانی، مندل بروت ابداع شد همواره کاربرد بسیاری در تجزیه، تحلیل و همچنین ترکیب و تلفیق در طراحی معماری و طراحی شهری داشته است. تعاریف زیادی از اصطلاح برخال وجود دارد اما ساده‌ترین آن را می‌توان به این صورت بیان کرد: «برخال فرم یا تصویری است شامل اشکالی که در مقیاس‌های مختلف تکرار می‌شوند.» (مندل بروت، ۱۹۷۲، ص ۲۳)

از آنجایی که اساس توسعه گنبد‌های اُرچین نیز بر تکرار است و با توجه به تعاریف هندسه برخال، می‌توان این گنبد‌ها را نوعی اشکال برخالی دانست. بنا بر این در این نوشتار ضمن شناسایی کلی با ارائه روابط ریاضی بین ویژگی‌های هندسی از جمله روابط بین حلقه‌های تکرارشونده، به تجزیه و تحلیل هندسه منحصر به فرد گنبد‌های اُرچین پرداخته شده است.

ریشه کلمه اُرچین

در باره ریشه کلمه اُرچین اختلاف نظری در منابع وجود دارد. محمد کریم پیرنیا هم در جایی از کتاب آشنایی با معماری اسلامی ایران می‌نویسد: «اُر» پیشوندی است به معنای بالا رفتن و نظایر آنها در واژه‌های اردک (مرغ بالا جهنده)، اُرچین (پله)، اُرسی (پنجره بالارونده) و بسیاری از واژه‌های دیگر به کار می‌رود. (پیرنیا، ۱۳۸۷، ۵۷۴) با اینکه این نظر در بین معماران مشهور است، اما ریشه‌شناسی کلمات اردک، النگ، اُرچین و اُرسی در فرنگ لغات این فرضیه را تأیید نمی‌کند. مثلاً ریشه «اُرسی» منتسب به روس یا چوب اُرس که یک نوع چوب جنگلی است می‌تواند باشد و اگر آن را ترکیب «اُر»+ «سی» بدانیم در این صورت «سی» نیز معنادار نخواهد بود.

گمان دیگر این است که ریشه کلمه اُرچین یک کلمه باریشه عبری است، به معنی «پله» یا به معنی «مُضَرَس» (لغت نامه آندراج به نقل از دهخدا ذیل واژه اُرچین). معادل این کلمه امروز در انگلیسی به صورت «Urchin» به معنی توتیا یا خارپشت دریایی که با کلمه اُرچین هم‌ریشه است و هر دو از یک کلمه عبری باستانی مشتق شده‌اند. این کلمه در لاتین به صورت «Ericius» آمده که از ریشه قدیمی‌تر عبری گرفته شده است. اگرچه به دلیل قدمت زیاد ریشه این لغت معنای دقیق آن کاملاً روشن نیست اما بنا بر مطالعاتی که عنوان شد می‌توان نتیجه گرفت که لغت اُرچین یک واژه باستانی باریشه عبری است و به معنی پله، پلکان یا شیئی مُضَرَس. بنا بر دلایل ذکر شده، واژه فارسی «اُرچین» با کلمه انگلیسی Urchin دارای ریشه مشترک عبری هستند که ظاهراً به معنای پلکان یا ساختمان مضرس بوده است.

هندسه برخالی در گنبد اُرچین

تئوری برخال (فراکتال) که در سال ۱۹۷۰ توسط ریاضی‌دان لهستانی، مندل بروت ابداع شد همواره کاربرد بسیاری در تجزیه، تحلیل و همچنین ترکیب و تلفیق در طراحی معماری و طراحی شهری داشته است. اصطلاح فراکتال از واژه لاتین Fractus به معنی شکسته شده و نامنظم خرد شده مشتق شده است. فرهنگستان زبان فارسی واژه برخال را برابر فراکتال تصویب کرده و همچنین برای واژه فرکتالی واژه برخالی را تصویب کرده است که از واژه «برخ» به معنی بخش و قسمت و پسوند -ال (مانند چنگال) تشکیل شده است و با واژه فراکتال هم‌معنی است (قبادیان، ۱۳۹۱).

بنیان تشکیل یک فرم برخال بر اساس تکرار گذاشته شده است بدین صورت که ترکیبات متعددی از تکرار، اشکال متعدد و متنوعی ایجاد می‌کند و ویژگی نامتناهی بودن در این فرآیند تکرار، اشکال برخال را مانند کهکشان بی‌نهایت می‌سازد. در نتیجه همین طبیعت بی‌پایان است که برخال‌ها را نمی‌توان با هندسه اقلیدسی تعریف کرد. اگرچه برخال‌ها در زمینه‌ها و نقش‌های متفاوتی بروز می‌کند اما هندسه برخال به‌طور خاص در معماری به‌عنوان یک زبان برای ترجمه پیچیدگی‌هایی که مدنظر طراح است، استفاده می‌شود. اساس هر طرح برخالی بر مبنای یک عنصر اولیه و یک روند تکرار شکل می‌گیرد. روند تکرار قانونی است که عنصر اولیه بر اساس آن تکرار می‌شود.

گنبد اُرچین یکی از بهترین نمونه‌های ساختمان برخالی است که بسیار پیش از آنکه تئوری برخال ارائه شود ساخته می‌شده است. در این گنبد حلقه‌هایی با فرم چندضلعی به ترتیب از بزرگ به کوچک روی هم چیده و تکرار می‌شوند. به عبارت دیگر عنصر اولیه حلقه‌ای چندضلعی یا شبه چندضلعی است و روند تکرار شامل چرخش به اندازه $\frac{\pi}{2n}$ (که در آن n تعداد اضلاع چندضلعی است) و کوچک شدن به اندازه قدر نسبتی که در بخش ۴ محاسبه خواهد شد و قرارگیری روی چندضلعی قبلی خواهد بود. بدین ترتیب حلقه‌هایی مشابه با حلقهٔ اصلی اما در مقیاس کوچک‌تر روند کم‌شونده‌ای را ایجاد می‌کند. هندسهٔ برخالی این گنبدها با دنباله‌های عددی در ارتباط است.

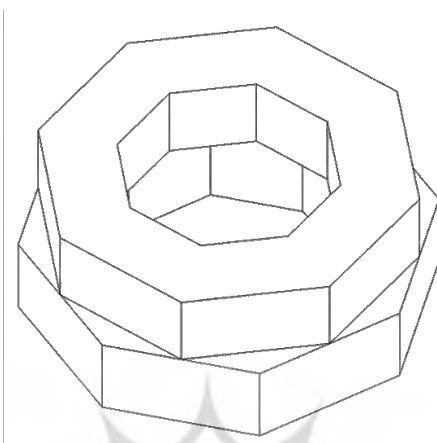
در معماری گذشته ایران هم کمابیش اشکال برخال در جزییات و تزیینات دیده شده است. نمونهٔ بارز آنها هم مقرنس است که به عنوان یکی از عناصر اصلی معماری اسلامی به کار گرفته می‌شده است. اما به کارگیری یک ساختار برخالی برای پاسخگویی به سازه و کلیت بنا در گنبد اُرچین نمونه‌ای منحصر به فرد در معماری گذشتهٔ منطقهٔ ایران است.

معرفی فرم گنبدهای اُرچین

همان طور که گفته شد، گنبدهای اُرچین مخروط‌هایی پله پله هستند که به تدریج کوچک شده و به یک نقطه می‌رسند. اگر هر طبقه را به طور خاص مورد بررسی قرار دهیم درمی‌یابیم که هر طبقه تقریباً به شکل حلقه‌هایی است که قاعدهٔ آن یک چندضلعی منظم است. در گنبدهای اُرچین این چندضلعی‌ها معمولاً ۱۲، ۱۶ یا ۲۰ ضلعی است. حلقهٔ طبقهٔ بالایی با این حلقه کاملاً مشابه است با این تفاوت که همهٔ نسبت‌های آن به یک نسبت کوچک شده است.

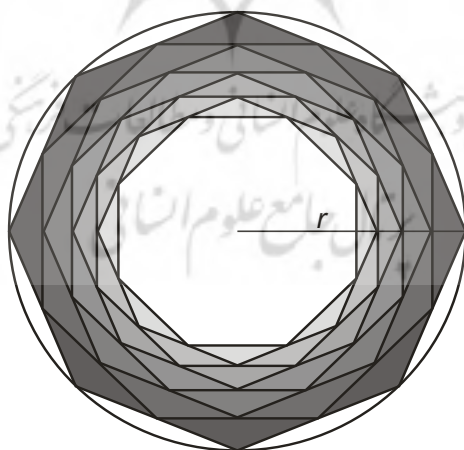
گنبد معمولاً با یک حلقهٔ استوانه‌ای آغاز می‌شود و اولین حلقهٔ چندضلعی روی این استوانه قرار می‌گیرد، سپس حلقه‌های بعدی با کمی چرخش روی حلقهٔ بعدی قرار گرفته و به این صورت گنبد بالا می‌رود. به طوری که به مرحله‌ای می‌رسد که دهانهٔ حلقه بسیار کوچک بوده و معمولاً با طاق گنبدی کوچکی قسمت انتهایی مسدود می‌شود. در برخی از گنبدهای اُرچین داخل گنبد هم به صورت مضرّس ساخته شده و در برخی از آنها داخل گنبد یک مخروط کامل می‌باشد. قانون قرارگیری طبقات بر روی هم این گونه است که رئوس اضلاع هر حلقه روی نقطهٔ وسط رئوس حلقهٔ ردیف

قبل قرار می‌گیرد. یعنی حلقه به نسبتی کوچک شده که دایره محیطی آن بر دایره محاطی حلقه قبل منطبق شود (شکل ۱).



شکل ۱. دو طبقه از گنبد که روی یکدیگر قرار گرفته‌اند (با فرض $n = 8$)

اما شکل دقیق حلقه‌های اُرجین چندضلعی نیست، زیرا اگر معمار به همین کم شدن شعاع به وسیله فاصله میان دایره محیطی و محاطی بسنده کند در چند ضلعی‌هایی با اضلاع زیاد، مثل ۱۶ یا ۲۰ ضلعی، که معمولاً در این گنبدها استفاده می‌شوند فاصله میان دایره محیطی و محاطی بسیار کم بوده و کار به هم رساندن گنبد بسیار طولانی و ارتفاع گنبد بسیار زیاد می‌شود. (شکل ۲)



شکل ۲. پلان چند طبقه از گنبد (با فرض $n = 8$)

زیرا اگر گنبد n ضلعی باشد نسبت شعاع دایرهٔ محاطی به شعاع دایرهٔ محیطی برابر است با:

$$\cos \frac{\pi}{n} = \frac{\text{شعاع دایره محاطی}}{\text{شعاع دایره محیطی}}$$

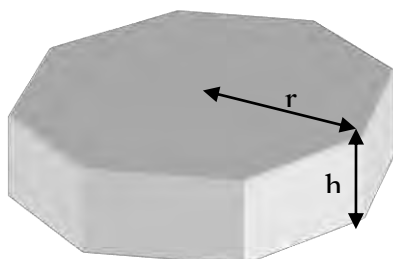
بنا بر این هر چه n بزرگ‌تر باشد نسبت کوچک‌تر شده و تعداد طبقات بیشتر می‌شود. و در طبقه k ام نسبت شعاع طبقهٔ k ام (r_k) به طبقهٔ اول برابر است با:

$$r_k = \left(\cos \frac{\pi}{n}\right)^k \times \text{شعاع دایره محیطی طبقهٔ اول}$$

بر این اساس با افزایش مقدار k شعاع دایرهٔ محاطی هر طبقه با نسبتی ثابت که همان مقدار $\cos \frac{\pi}{n}$ است کاهش می‌یابد، اما بنابر همین معادله، هرگز مقدار r_k به صفر نخواهد رسید. و در نهایت زمانی که دهانه گنبد خیلی کوچک شد، گنبد باید به وسیله نوع دیگری از پوشش پایان پذیرد.

رابطهٔ هندسه و سازه برخالی گنبد اُرچین آن

مسئلهٔ سازه در ساخت گنبدها مانند بسیاری دیگر از سازه‌ها انتقال نیروی وزن و سایر بارهای وارده به گنبد به تکیه‌گاه‌ها است. چنانکه گفته شد مصالح سنتی که گنبدهای اُرچین با آنها اجرا می‌شوند غالباً توانایی بسیار کمی در تحمل نیروهای کششی دارا هستند. پس باید تا حد امکان به وسیلهٔ هندسهٔ مناسب از پدید آمدن نیروهای نامتقارن و کششی در آنها جلوگیری شود. همچنین باید نیروهای وارده را به نحوی مؤثر در سراسر سازه پخش کرد تا افزایش فشار در یک نقطه باعث تخریب موضعی نشود. همان طور که در یک آجر چینی سادهٔ دیوار هر آجر را درست بین دو آجر ردیف زیرین قرار می‌دهند در گنبدهای اُرچین نیز رأس هر طبقه باید درست در وسط دو رأس طبقه پایین قرار داشته باشد تا نیروی وارد آمده به هر قسمت به وسیلهٔ ارتباط دو به دو حلقه‌ها در حین انتقال در طول تکیه‌گاه گسترده شود.



شکل ۳. رابطه ارتفاع با شعاع هر طبقه از گنبد

مزیت دیگر این روش قرار دادن حلقه‌ها روی هم اتصال هر راس حلقه با چهار کمان در طبقات مجاور است. بدین معنی که گنبد از پیوستگی بیشتری برخوردار بوده و در هنگام وارد آمدن بارهای دینامیکی یکپارچه‌تر عمل می‌کند، مانند یک مخروط کامل.

ارتباط هندسی حلقه‌ها

از آنجا که مجموع اختلاف شعاع‌های دوایر محاطی و محیطی با شعاع دایره محیطی حلقه اول برابر است. پس می‌توان رابطه‌ای برای تصاعد آن نوشت:

$$\begin{aligned} & r_1 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right) + r_1 \left(\cos \frac{\pi}{n} \right) \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right) \\ & - r_1 \left(\cos \frac{\pi}{n} \right)^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right) \\ & + r_1 \left(\cos \frac{\pi}{n} \right)^3 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right) + \dots \\ & + r_1 \left(\cos \frac{\pi}{n} \right)^n \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right) \\ & \equiv \sum_{i=0}^n r_1 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right) \left(\cos \frac{\pi}{n} \right)^i = r_1 \end{aligned}$$

با ساده کردن این رابطه نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right) \sum_{i=0}^n \left(\cos \frac{\pi}{n} \right)^i = 1$$

نسبت‌های تکرارشونده در هندسهٔ برخالی... / ۳۰۱

بنا بر این گنبد در صورتی به پایان می‌رسد که بی‌نهایت حلقه بر روی هم چیده شده باشند. البته معمولاً در زمان اجرا هنگامی که ارتفاع حلقه‌ها خیلی کم می‌شود (حدود ارتفاع یک آجر) گنبد را بوسیله یک طاق ساده پایان می‌دهند.

برخی گنبدهای اُرچین به همین صورت اجرا شده‌اند مانند گنبد شاهزده ابراهیم هویزه یا امامزاده عبد الله دزفول که هر دو به وسیلهٔ چند ضلعی‌هایی که روی هم چیده شده‌اند ساخته شده‌اند.

رابطهٔ ارتفاع با شعاع در حلقه‌ها از آنجایی که مقدار ارتفاع حلقه‌ها باید با قدر نسبت حلقه‌ها کاهش می‌یابد تا شیب گنبد ثابت بالا رود. بنابر رابطهٔ گذشته می‌توان نتیجه گرفت ارتفاع گنبد خیلی زیاد خواهد شد.

مثلاً اگر چند ضلعی را ۸ ضلعی در نظر بگیریم ($n = 8$) در این صورت، قدر نسبت برابر 0.92 به دست می‌آید و این یعنی شعاع حلقهٔ دهم گنبد 0.45 شعاع حلقهٔ اول است یعنی حدوداً شعاع نصف شده است.

نسبت ارتفاع کل گنبد نیز از رابطهٔ دنباله‌ای از مجموع ارتفاع‌های حلقه‌ها به صورت:

$$h + h \left(\cos \frac{\pi}{n} \right)^1 + h \left(\cos \frac{\pi}{n} \right)^2 + h \left(\cos \frac{\pi}{n} \right)^3 + \dots + h \left(\cos \frac{\pi}{n} \right)^n = H_n$$

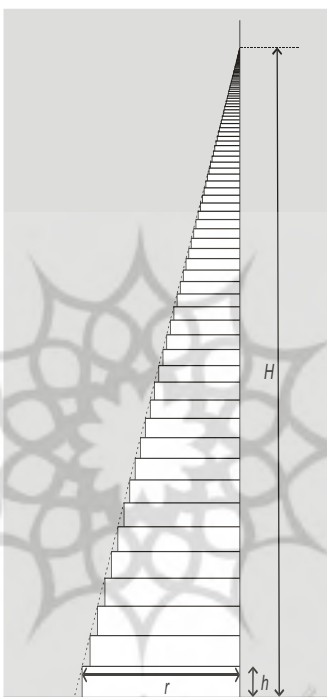
به دست می‌آید. بنا بر این ارتفاع گنبد برابر است با:

$$\frac{h \left(\left(\cos \frac{\pi}{n} \right)^n - 1 \right)}{\left(\cos \frac{\pi}{n} - 1 \right)} = H_n$$

که در آن H ارتفاع کل گنبد و n تعداد طبقات، h ارتفاع حلقه اولیه است.

در این صورت در حلقه دهم گنبد ۸ ضلعی چنانکه گفته شد فقط 0.55 از مقدار شعاع کم شده در حالی که گنبد به ارتفاع $6.9 h$ رسیده است. حال اگر نسبت ارتفاع هر حلقه (h) را به شعاع آن (r) را نیز در نظر بگیریم، مثلاً در یک گنبد به شعاع 8.5

متر که ارتفاع حلقه اول یک متر باشد. در حلقه بیست و پنجم، گنبد نزدیک ۷ متر بالا رفته ولی شعاع دهانه دهم به نزدیک ۳/۸ متر رسیده یعنی فقط ۴/۷ متر از آن کم شده. اگر نمای این گنبد را ترسیم کنیم، شبیه شکل ۶ می‌شود. بنا بر این معماران سنتی راه‌هایی برای بزرگ‌تر شدن قدر نسبت این دنباله ابداع کردند تا ارتفاع گنبد تا حد قابل قبولی کاهش یابد.



شکل ۴. مقطع گنبد اُرجین در حالتی که نسبت ارتفاع به شعاع زیاد است

افزایش اختلاف شعاع در طبقات به وسیله تقعر سطوح جانبی از آنجایی که به دلایل سازه‌ای نمی‌توان محل رؤس چند ضلعی‌ها را از وسط ضلع چند ضلعی زیرین تغییر داد، همچنین به دلیل عدم تحمل نیروهای کششی توسط مصالح بنایی نمی‌توان بار را در جایی وارد کرد که تکیه‌گاهی ندارد، بنا بر این باید از شکلی استفاده کرد که هم طبقات را به نحوی مؤثر به هم متصل کند و هم اختلاف دایره‌های محیطی و محاطی (قدر نسبت دنباله) بیشتری نسبت به چند ضلعی‌های منظم داشته باشد.

معماران سنتی در ترسیم چند ضلعی‌ها از دایره‌های محیطی استفاده می‌کردند، وتری از این دایره که ضلع چند ضلعی را تشکیل می‌دهد کمانی از دایره را جدا می‌کند که $\frac{1}{n}$ دایره را تشکیل می‌دهد، اگر این کمان و کمان‌های مشابهش را نسبت به وترهایشان قرینه کنیم، شکلی شبه ستاره به دست می‌آید که پلان حلقه‌های گنبد‌های اُرچین است. در این شکل اختلاف دایره‌های محیطی و محاطی نسبت به چند ضلعی‌های منتظم بیشتر است، ترسیم ساده‌ای دارد و اجرای آن برای معمار ممکن است.

به علاوه می‌توان برای کمان‌ها به جای کمان $\frac{1}{n}$ از سایر تقسیم‌های دایره استفاده کرد که اگر مثلاً این نسبت جدید را m بنامیم با شرط $m < n$ ، گنبد با ارتفاع کمتری پایان خواهد یافت. زیرا هر چه کمان محدب‌تر باشد اختلاف دایرهٔ محیطی و محاطی بیشتر خواهد شد، پس اگر m کوچک شود کمان محدب‌تر خواهد شد و اختلاف شعاع حلقه‌های گنبد بیشتر خواهد شد و گنبد زودتر پایان می‌یابد. این کمان‌ها را کمان‌های کاهندهٔ شعاع دایرهٔ محاطی می‌نامیم. (شکل ۵)

$$r_1 \left(\cos \frac{\pi}{n} \right) + r_2 \left(\cos \frac{\pi}{m} \right) = r_2 + f_1$$

و از طرفی:

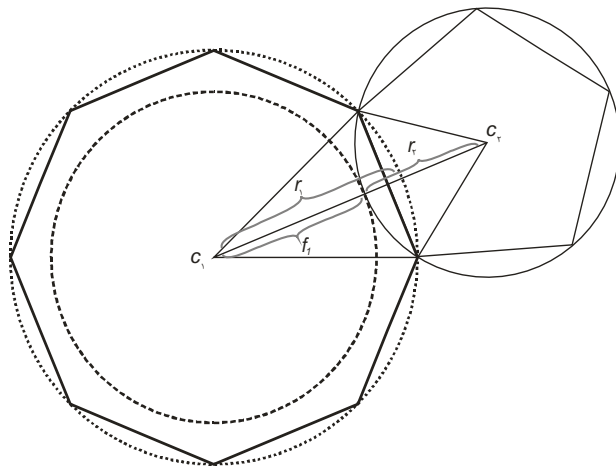
$$r_1 \left(\sin \frac{\pi}{n} \right) = r_2 \left(\sin \frac{\pi}{m} \right)$$

بنا بر این نسبت به صورت:

$$\frac{f_1}{r_1} = \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{m}} \right) \left(\left(\cos \frac{\pi}{m} \right) - 1 \right) + \left(\cos \frac{\pi}{m} \right)$$

در می‌آید که به صورت زیر ساده می‌شود:

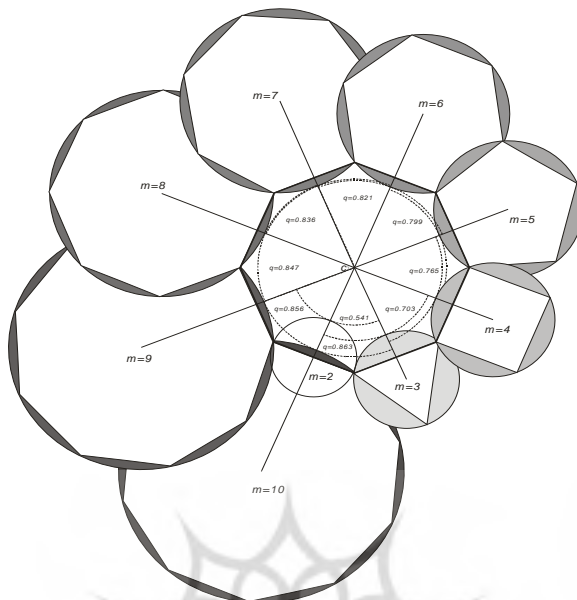
$$\frac{f_1}{r_1} = \sin \frac{\pi}{n} \left(\cos \frac{\pi}{m} \right) - \cos \frac{\pi}{m}$$



شکل ۵. رابطه میان شعاع دایره محیطی (r_1) با شعاع دایره محاطی (f_1) در n ضلعی‌های طبقات گنبد اُرجین در صورتی که کمان‌های کاهنده شعاع دایره محاطی از یک m ضلعی گرفته شده باشند. (با فرض $m = 5$ و $n = 8$)

با توجه به رابطه بالا، با افزایش تعداد اضلاع چندضلعی یا اصلی یا افزایش مقدار مقسوم علیه کسر کمان‌های کاهنده شعاع دایره محاطی مقدار اختلاف دایره محیطی و محاطی (قدر نسبت تصاعد - q) کم شده و بنا بر این گنبد خیلی بلند شده و تعداد طبقات آنها بیش از اندازه می‌شود.

بنا بر این برای به دست آوردن بهترین نتیجه باید از کمترین مقدار m (یعنی $m = 2$) و در نتیجه بیشترین مقدار قدر نسبت (q) بهره برد. با توجه به شکل ۶ می‌توان تفاوت قدر نسبت‌های دنباله را در ارتباط با تغییرات نسبت کمان‌های کاهنده شعاع دایره محاطی (m) مشاهده کرد.



شکل ۶. رابطهٔ تغییر مقدار نسبت کمان‌های کاهنده به شعاع دایرهٔ محاطی و در نتیجه تغییر مقدار قدر نسبت

اما با اینکه کم‌ترین مقدار m بزرگ‌ترین قدر نسبت (q) را پدید می‌آورد، ولی به دو دلیل از آن در ساخت گنبدها استفاده نمی‌شود: نخست اینکه کمان‌های کاهندهٔ برابر $\frac{\pi}{4}$ رادیان زاویه دارند پس با کمان‌های مجاور خود تداخل خواهند داشت، دوم اینکه قدر نسبت دنبالهٔ چنین گنبدی به ازای $n = 8$ حدوداً برابر 0.54 است یعنی شعاع هر طبقه حدود نصف شعاع طبقه قبل است، چنین گنبدی بیش از اندازه کوتاه شده و خیز کمی دارد، در نتیجه از نظر ایستایی مقاومت کافی ندارد و فرو خواهد ریخت.



تصویر ۲. گنبد بقعه یعقوب لیث صفاری، نزدیک دزفول، خوزستان

سایر روش‌های افزایش مقدار قدر نسبت

اما برای افزایش قدر نسبت راه‌های دیگری نیز وجود دارد که در برخی گنبد‌های اُرجین به‌کار رفته است، به عنوان مثال می‌توان به جای کمان‌های کاهنده شعاع دایره محاطی کمان‌هایی را به صورت محدب به کاربرد که دایره محیطی را بزرگ کند. از این روش احتمالاً به دلیل اشکالات اجرایی کمتر استفاده شده است، تنها نمونه یافت شده از گنبد‌های اُرجین که از این روش برای افزایش اختلاف شعاع طبقات استفاده کرده است، گنبد امامزاده سلیمان بن علی در گناوه است.

روش دیگر استفاده از چندضلعی‌های ستاره ایست. در این حالت بخشی که در گونه پیشین به صورت مقعر یا محدب درآمد بود، به سمت داخل شکسته شده تا شکلی ستاره‌ای پدید آورد. این بخش به سمت داخل شکسته می‌شود و دارای زوایایی است که در چندضلعی ستاره‌ای به زوایای بازتاب موسوم است. در این‌گونه از گنبد‌های اُرجین زوایای بازتاب روی دایره محاطی و زوایای رأس آنها روی دایره محیطی هر حلقه قرار دارد. از این‌گونه از گنبد‌های اُرجین نمونه‌های فراوانی در خوزستان و میانرودان باقی مانده است، از جمله گنبد آرامگاه امامزاده میر محمد (خارک)، آرامگاه امامزاده ابراهیم جایزان (خوزستان) و نمونه‌های دیگری مانند

اینها؛ حدود بیست گنبد از این گونه گنبدهای اُرچین در منطقه جنوب استان خوزستان، استان کهگیلویه و بویراحمد و همچنین استان فارس گسترده شده‌اند.

در این حالت نیز مانند حالت قبل با افزایش اختلاف دایرهٔ محاطی و محیطی در طبقات، ارتفاع کل گنبد کم می‌شود. مقدار این کاهش مانند حالت قبل و طبق روابط مشابه میزان اختلاف شعاع دواير محاطی و محیطی ارتباط مستقیم دارد. اما مقدار این متغیر که با پارامتر q معرفی شد در این حالت با زاویه بازتاب شکل ستاره رابطه دارد. اگر این زاویه را α بنامیم، این رابطه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sin \frac{\pi}{n} \cot \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{n} \right) + 1 = \frac{R}{r} = q$$

در رابطهٔ فوق R شعاع دایرهٔ محیطی و r شعاع دایرهٔ محاطی است.

در نمونه‌هایی از گنبدهای اُرچین افزایش میزان قدر نسبت به وسیلهٔ برآمدگی گوشه‌ها تأمین شده است. نمونه‌های محدودی با این شکل نیز در ایران و منطقهٔ میانرودان وجود دارد، از جمله آرامگاه امامزاده جعفر (بروجرد) یا آرامگاه یعقوب لیث صفاری (دزفول) که نمی‌توان رابطهٔ قابل قبولی میان اندازهٔ برجستگی گوشه‌های چندضلعی و نسبت ابعاد طبقات یافت، و شاید این شکل از گنبدهای اُرچین را گونه‌ای اولیه از تبدیل طرح گنبدهای ساده با گونه‌های اختری دانست.

گونه دیگر گنبدهای مقرنس است که شکل طبقات ترکیبی از طبقات گنبدهای اُرچین اختری با سه‌کنج‌های داخلی است نمی‌توان رابطهٔ دقیقی میان نسبت‌های طبقات یافت که در گنبد لحاظ شده باشد، علت این امر نیز پیچیدگی شکل نهایی و عدم امکان دقت کافی در هنگام ساخت است. از آنجایی که از این گونه گنبدهای اُرچین نمونه‌های محدودی مانند گنبد امامزاده عبدالله در شوشتر در داخل ایران وجود دارد، و نمونه‌های متکامل گنبدهای اُرچین مقرنس نظیر آنچه در بغداد و دمشق وجود دارد در خوزستان یافت نشده است، می‌توان گنبدهای اُرچین را مقدمه‌ای بر ساخت گنبدهای مقرنس دانست. زیرا پدید آمدن سه‌کنج در بخش داخلی گنبدهای اُرچین حاصل ستاره‌ای شکل شدن طبقات در گونه اختری گنبدهای اُرچین است، بنا بر این می‌توان گونه اختری را مرحله‌ای از تکامل گنبدهای اُرچین در رسیدن به شکل‌های پیچیدهٔ مقرنس در گنبدهای اُرچین مقرنس دانست. گنبد امامزاده عبدالله

در شوشتر را می‌توان نمونه خوبی از این روند تکاملی دانست که از نظر شکلی مرز میان گونه اختری و مقرنس است و نسبتاً خصوصیات هر دو گونه را داراست.

نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

چنانکه گفته شد گنبد‌های اُرچین ساختار برخالی متنوعی دارند که در مناطق مختلف حسب دلایل هندسی یا سازه‌ای تغییر کرده است. بنا بر این با جمع‌بندی یافته‌های پژوهش می‌توان یک طبقه‌بندی را به منظور گونه‌شناسی گنبد‌های اُرچین متصور شد که این گونه‌شناسی در جدول یک تشریح شده است.



پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

نسبت‌های تکرارشونده در هندسهٔ برخالی.../ ۳۰۹

جدول ۱. گونه شناسی پیشنهادی برای گنبد‌های ارجین، منبع: نگارنده

نمونه	مقدار q (n=۱۶)	روش کاهش ارتفاع	شکل حلقه	انواع گنبد‌های ارجین
بقعهٔ سید صلاح‌الدین محمد (ایلام)، مقبرهٔ ذوالکفل نبی (عراق)، مقام خضر نبی (شوشتر)، امامزاده ابراهیم (هویزه)	۰/۹۸۰۸	-	چندضلعی منتظم	ساده
بقعهٔ دانیال نبی (شوش)، امامزاده حمزه (ماهشهر)	۰/۸۶۸۱ (m=۳)	کمان‌های کاهندهٔ شعاع دایره حلقه پسین	چندضلعی باکمان‌های مقعر	کماندار مقعر
گنبد امامزاده سلیمان بن علی (گناوه)	۰/۸۶۸۱ (m=۳)	کمان‌های افزایشندهٔ شعاع دایره حلقه پیشین	چندضلعی باکمان‌های مقعر	کماندار محدب
امامزاده میر محمد (خارک) امامزاده ابراهیم جایزان (خوزستان) زیارتگاه کوخرد-بندر لنگه (بوشهر)، امامزاده بابا منیر (ممسنی)	۰/۸۲ ($\alpha = ۸۳^\circ$)	شکستن اضلاع چندضلعی	منتظم ستاره الاضلاع	اختری
امامزاده جعفر (بروجرد)، آرامگاه یعقوب لیث صفاری (دزفول)	بسته به میزان برجستگی گوشه‌ها	برجستگی گوشه‌ها	چندضلعی با گوشه‌های برجسته (شکل ۱۴)	کنج دار
امامزاده عبد الله (شوشتر)، بیمارستان نورالدین (دمشق)، بقعهٔ زمره خاتون (بغداد)، شیخ عمر سهروردی (بغداد)	متفاوت	اضلاع شکستن چندضلعی	مانند ستاره‌ای با طاقی‌های برآمده (شکل ۱۵)	مقرنس

پرتال جامع علوم انسانی

منابع

- پیرنیا، محمد کریم. (۱۳۷۴ش). آشنایی با معماری اسلامی ایران. تدوین غلامحسین معماریان. تهران: نشر سروش دانش.
- _____ . (۱۳۷۸ش). نیارش در سازه‌های طاقی ایران. تدوین غلامحسین معماریان. تهران: سازمان میراث فرهنگی کشور.
- _____ . (۱۳۸۲ش). سبک‌شناسی معماری ایرانی. تدوین غلامحسین معماریان. تهران: نشر سروش دانش.
- _____ . (۱۳۸۷ش). معماری ایرانی. تدوین غلامحسین معماریان. تهران: نشر سروش دانش.
- گرابار، الگ و اتینگهاوزن، ریچارد. (۱۳۷۸ش). هنر و معماری اسلامی. ترجمه یعقوب آژند. تهران: انتشارات سمت.
- مهدوی نژاد، محمدجواد و مشایخی، محمد. (۱۳۹۱ش). نقش‌مایه آرچین و تجلی آن در هنر و معماری ایرانی. مجله نقش‌مایه، دوره ۵، شماره ۱۰.
- Tabbaa, Y. (1985). THE MUQARNAS DOME: Its Origin and Meaning, Muqarnas. *Islamic art and architecture academic journal*. Pp. 61-74.