

## قیمت گذاری مستمری های عمر با استفاده از نرخ بهره فنی فازی

تاریخ دریافت: ۹۳/۰۱/۲۶	اکبر کمیجانی <sup>۱</sup>
تاریخ پذیرش: ۹۳/۱۰/۲۹	شاپور محمدی <sup>۲</sup>
	مجید کوششی <sup>۳</sup>
	لیلی نیاکان <sup>۴</sup>

### چکیده

بیمه مستمری یکی از انواع محصولات بیمه عمر است که در آن پرداخت های دوره ای معینی تا زمان زنده بودن ذی نفع بیمه نامه تضمین می شود. در قیمت گذاری مستمری های عمر بایستی ناطمینانی پدیده های جمعیت شناسی و متغیرهای مالی در نظر گرفته شود. ناطمینانی پدیده های جمعیتی با استفاده از احتمالات فوت جدول عمر در قیمت گذاری وارد می گردد ولی به صورت متداول، متغیرهای مالی در طول قرارداد ثابت در نظر گرفته می شوند. در مطالعات اخیر دانش بیمه سنجی، جهت وارد کردن ناطمینانی پارامترهای اقتصادی - که مهم ترین آن نرخ بهره فنی است - از متغیرها و فرایندهای تصادفی استفاده می شود. در این مقاله، قیمت گذاری مستمری های عمر را توسعه داده و بیان تصادفی مرگ و میر را با بیان فازی نرخ بهره فنی ترکیب می کنیم تا همگی منابع ناطمینانی در قیمت گذاری مورد توجه قرار گیرد. این مدل بندی، امکان کمی پذیر کردن ریسک انتظاری ناشی از منابع عدم حتمیت مورد اشاره را به دست می دهد. از این رو، مدل بندی ارزش حال مستمری ها توسط متغیر تصادفی فازی ارائه می شود و در نهایت، یک مثال عددی بیان می گردد.

**واژگان کلیدی:** مستمری عمر، قیمت گذاری، نرخ بهره، متغیرهای تصادفی فازی

۱. استاد دانشگاه تهران

۲. دانشیار دانشگاه تهران

۳. استادیار دانشگاه تهران

۴. دکتری علوم اقتصادی، دانشگاه تهران (نویسنده مسئول)

## ۱. مقدمه

بیمه عمر<sup>۱</sup> از مهم‌ترین رشته‌های بیمه‌های اشخاص است. ایده اصلی در بیمه عمر آن است که بیمه‌گذار<sup>۲</sup> در این بیمه‌نامه<sup>۳</sup> حق بیمه<sup>۴</sup> می‌پردازد و در عوض، شرکت بیمه سرمایه مشخصی<sup>۵</sup> را در صورت فوت بیمه‌شده<sup>۶</sup> یا زنده ماندن او در زمان معینی به بیمه‌گذار یا شخص ثالث تعیین شده از طرف وی می‌پردازد. بنابراین، تعهدات بیمه عمر تابعی از طول عمر انسان است. محصولات متعددی از بیمه‌های عمر وجود دارد که از جمله آن بیمه عمر مستمری<sup>۷</sup> است. بیمه عمر مستمری شامل شامل دنباله‌ای از پرداخت‌هاست که تا زمانی که ذی‌نفع زنده است، پرداخت می‌شود؛ بنابراین، یک قرارداد بیمه عمر مستمری می‌تواند به‌عنوان یک مقرری قطعی در دوره زمانی باقی‌مانده عمر شخص تلقی شود. این بیمه‌نامه به‌ظاهر ساده، مسائل و مشکلاتی دارد که حل آن بر عهده دانش بیمه‌سنجی<sup>۸</sup> است. بیمه‌سنج با استفاده از تجارب سال‌های قبل - آمارهای پیشین - نسبت به ایجاد مدل‌های ریاضی که به‌وسیله آنها بتوان ریسک‌های موجود در هر بیمه‌نامه و حق بیمه متناسب با آن را محاسبه کرد، اقدام می‌کند.

بیمه‌سنج برای قیمت‌گذاری مستمری‌های عمر باید ناطمینانی پیشامدهای جمعیتی و متغیرهای مالی را مدل‌سازی کند. در ریاضیات بیمه عمر استاندارد، ناطمینانی

1. Life Insurance
2. Policy Holder
3. Policy
4. Premium
5. Sum Insured
6. Insured
7. Life Annuity

۸. دانش بیمه‌سنجی، ریاضیات و آمار، بیمه، اقتصاد و علوم رایانه‌ای را به یکدیگر پیوند می‌زند تا ریسک‌های موجود در صنعت بیمه و بازارهای مالی را بررسی و ارزیابی کند و بیمه‌سنج متخصصی است که به ارزیابی این ریسک‌ها می‌پردازد و سرمایه مورد نیاز برای پوشش این ریسک‌ها را محاسبه می‌کند.

تصادفی پدیده‌های جمعیتی مورد توجه قرار گرفته و احتمالات مربوطه از جدول عمر به دست می‌آید (Gerber, 1995).

در کلیه مقالات علم بیمه‌سنجی در حوزه قیمت‌گذاری، تصادفی بودن ارزش حال حق‌بیمه‌ها و منافع بیمه‌نامه به صورت امید ریاضی آنها بیان شده و به این ترتیب، فرایندها قطعی و معین می‌شوند. این رویکرد امکان قیمت‌گذاری قراردادهای بیمه با توجه به نااطمینانی متغیرهای مالی را فراهم می‌کند. مهم‌ترین متغیر مالی در محاسبه حق‌بیمه، نرخ بهره است. نوسانات و تغییرات نرخ بهره در نتیجه اعمال سیاست‌های مختلف پولی، مالی و ارزی دولت، منافع بیمه‌گران و حق‌بیمه بیمه‌گذاران بیمه عمر را دستخوش نااطمینانی می‌کند.

در حوزه علم بیمه‌سنجی، تئوری مجموعه فازی برای مدل‌سازی مسائلی به کار می‌رود که نیازمند قضاوت ذهنی بیمه‌سنج بوده یا اطلاعات در دسترس اندک یا مبهم است. یکی از این کاربردها، قیمت‌گذاری قراردادهای بیمه عمر با نرخ بهره فازی است که بدین ترتیب، اکچوئری می‌تواند نااطمینانی متغیر مالی نرخ بهره را در قیمت‌گذاری مورد توجه قرار دهد. فرض می‌شود که نرخ بهره (نرخ تنزیل) توسط اعداد فازی توصیف می‌گردد. این رویکرد امکان وارد کردن هم‌زمان منابع نااطمینانی تصادفی و فازی از جانب پیشامدهای جمعیتی و متغیرهای مالی را فراهم می‌سازد.

هدف از ارائه این مقاله، معرفی رویکرد فازی در حوزه بیمه از طریق قیمت‌گذاری محصول مستمری‌های عمر است. برای این منظور، نرخ بهره فنی مورد استفاده در قیمت‌گذاری محصول را یک متغیر فازی در نظر می‌گیریم که در نتیجه، نرخ حاصله نیز یک عدد فازی تصادفی خواهد بود. اعداد فازی تصادفی به بیانی همان اعداد قطعی هستند که در بازه‌ای تصادفی تغییر می‌کنند. بدین ترتیب امکان تصمیم‌سازی در یک محدوده متغیر فراهم خواهد شد.

## ۲. پیشینه تحقیق

بیمه‌سنج‌ها به طور سنتی از یک رویکرد قطعی در اغلب محاسبات بیمه‌ای خود استفاده کرده و نرخ بهره را ثابت فرض می‌کردند، اما در عمل و به‌ویژه در قراردادهای بلندمدت، نرخ بهره ثابت نیست. یکی از اولین مقالاتی که بازدهی دارایی و در نتیجه، بازدهی پورتنفوی دارایی را به‌عنوان متغیر تصادفی در نظر می‌گیرد، مقاله معروف مارکوینتر<sup>۱</sup> است. این ایده سال‌ها در زمینه علم بیمه‌سنجی مورد توجه قرار نگرفت.

از جمله اولین مقالات در حوزه بیمه‌سنجی که با رویکرد نرخ بهره تصادفی نگاه شده، می‌توان به مقاله دی پائولو<sup>۲</sup> اشاره کرد. پائولو با استفاده از آمارهای تاریخی، یک توزیع احتمال برای بازدهی تعریف کرد. این توزیع، منعکس‌کننده ناطمینانی سرمایه‌گذاری است.

پس از آن کان<sup>۳</sup> در مقاله خود فرض کرد بازدهی پورتنفوی سرمایه‌گذاری پایه دارای توزیع لوگ‌نرمال<sup>۴</sup> است. توزیع لوگ‌نرمال از دو ویژگی اساسی برخوردار است: کاربرد آن آسان است و شواهد تجربی بسیاری آن را به‌عنوان یک مدل مناسب برای بازدهی پورتنفوی معرفی می‌کنند (Lintner, 1972). کان از این رویکرد در محاسبه گشتاورهای هزینه تضمین‌های سررسید در بیمه‌نامه بیمه تمام عمر استفاده کرد.

زیوک<sup>۵</sup> از تکنیک‌های سری زمانی و شبیه‌سازی در مدل‌سازی تصادفی عایدی اوراق قرضه استفاده کرد.

بویلی<sup>۶</sup> در مقاله‌اش فرض کرد که بازدهی‌های سالانه توسط یک فرایند تصادفی مستقل ایجاد می‌شوند که این توزیع در طول زمان ثابت باقی می‌ماند. او فرض کرد

1. Markowitz, 1952
2. Di Paolo, 1969
3. Kahn, 1971
4. Lognormal
5. Ziocok, 1973
6. Boyle, 1976

که بازدهی یک‌ساله در هر سال دارای توزیع لوگ‌نرمال است، بنابراین لگاریتم بازدهی سالانه دارای میانگین و واریانس ثابت می‌باشد. وی سپس گشتاورهای سه‌گانه توابع بیمه‌سنجی تحت فرض نرخ بهره تصادفی را محاسبه کرد. این محاسبات در کاربردهای نرخ بهره مرکب در توابع بیمه‌سنجی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

پانجر و بلهاوس<sup>۱</sup> در مقاله خود از یک رویکرد تصادفی برای بیان گشتاورهای جریانات نقدی معین و تصادفی در مستمری‌های عمر استفاده کردند. در این مقاله ارزش انتظاری عامل تنزیل به‌عنوان تابع گشتاورساز از توابع نرخ بهره در نظر گرفته می‌شود. در این مطالعه تابع نرخ بهره به‌صورت نرمال (گوسی) در نظر گرفته شده و سپس مدل بسط می‌یابد تا فرایند تصادفی نرخ بهره را به مقادیر جاری و گذشته مشروط کند. برای این منظور از مدل نرخ بهره خودرگرسیون شرطی<sup>۲</sup> گسسته در توابع مستمری و بیمه استفاده می‌شود. این رویکرد مشابه فرایند تصادفی زمانی در کار بویلی است که نرخ عایدی سالانه را با استفاده از یک فرایند خودرگرسیونی مرتبه اول (AR(1)) تعیین می‌کند.

بیکن و فیولینگ<sup>۳</sup> از یک فرایند تصادفی وینری<sup>۴</sup> برای مدل‌سازی نرخ بهره و طول عمر آتی تصادفی در یک مستمری معین استفاده کردند. آنها فرض کردند که در یک مستمری معین، در طول مستمری نوساناتی در نرخ بهره رخ می‌دهد. سپس این مدل اولیه را با مدلی ترکیب کردند که در آن طول مستمری و به‌عبارت‌دیگر، مدت زمان باقی‌مانده عمر بیمه‌گذار یک متغیر تصادفی است. در این مقاله مقدار میانگین و انحراف استاندارد ارزش حال پرداخت‌های احتمالی و احتمالات مرزی متقاطع فرایند تصادفی وینری محاسبه شده است.

- 
1. Panjer and Bellhouse, 1981
  2. Conditional Autoregressive
  3. Beekman and Fuelling, 1992
  4. Wiener Stochastic Process

کامینز و دریگ<sup>۱</sup> با استفاده از تئوری مجموعه فازی به حل مسئله قیمت‌گذاری مالی قراردادهای بیمه مسئولیت و اموال پرداختند. تئوری مجموعه فازی دربرگیرنده قواعد ریاضی است که می‌تواند از اطلاعات مبهم، ذهنی و قضاوتی در فرایندهای تصمیم‌گیری پیچیده استفاده کند. از آنجاکه در قیمت‌گذاری بیمه، اطلاعات درمورد جریان‌های نقدی<sup>۲</sup>، شرایط اقتصادی آینده، صرف ریسک<sup>۳</sup> و سایر عوامل موثر بر تصمیمات قیمت‌گذاری ذهنی بوده و در نتیجه، کمی کردن آنها با استفاده از روش‌های مرسوم کار مشکلی است، استفاده از تئوری مجموعه فازی می‌تواند به این امر کمک کند. آنها از فازی‌سازی یک مدل قیمت‌گذاری مالی بیمه‌ای برای قیمت‌گذاری محصولات بیمه‌ای و از قواعد فازی برای تصمیم‌گیری پروژه استفاده کردند. نتایج بررسی کامینز و دریگ نشان می‌دهد که استفاده از تئوری مجموعه فازی نسبت به رویکرد متداول، تفاوت‌های اساسی در تصمیم‌گیری ایجاد می‌کند.

سانچز و پوچادس<sup>۴</sup> با بیان تصادفی مرگ‌ومیر و بیان فازی نرخ بهره، قیمت‌گذاری مستمری‌های عمر را توسعه دادند. در قیمت‌گذاری مستمری‌های عمر، بایستی نااطمینانی پیشامدهای جمعیتی و متغیرهای مالی مدل‌سازی شوند. در این مقاله برای پیشامدهای جمعیتی، از نااطمینانی تصادفی استفاده می‌شود و احتمالات مربوطه از جدول عمر محاسبه می‌گردد. متغیرها و فرایندهای تصادفی را می‌توان برای ترسیم نااطمینانی پارامترهای اقتصادی به‌کاربرد. در حوزه بیمه‌سنجی، تئوری مجموعه فازی برای مدل‌سازی مسائلی به‌کار می‌رود که نیازمند قضاوت ذهنی بیمه‌سنج است یا اطلاعات موجود، کمیاب یا مبهم است. یکی از کاربردهای تئوری مجموعه فازی در قیمت‌گذاری قراردادهای بیمه با نرخ بهره فازی است. آنها نشان دادند که مدل‌سازی ارزش حال مستمری‌ها با متغیرهای تصادفی فازی، امکان

- 
1. Cummins and Derrig, 1997
  2. Cash Flows
  3. Risk Premium
  4. Sanchez and Puchades, 2012

کمی کردن قیمت انتظاری قراردادهای مستمری و ریسک ناشی از منابع مختلف ناطمینانی را فراهم می‌کند. سپس با استفاده از میانگین و واریانس متغیرهای تصادفی فازی، قیمت و ریسک پورتهویی از مستمری‌ها محاسبه شده است.

### ۳. مبانی نرخ‌گذاری در بیمه‌های عمر

نرخ<sup>۱</sup> بیمه، قیمت هر واحد بیمه است که همانند هر محصول دیگری تابعی از هزینه تولید می‌باشد. در صنعت بیمه، برخلاف سایر صنایع، هزینه تولید در زمان فروش قرارداد معلوم نیست و تا زمانی در آینده مشخص نخواهد شد. بنابراین، قیمت‌گذاری بیمه مبتنی بر پیش‌بینی خواهد بود. فرایند پیش‌بینی خسارات و هزینه‌های آتی و تخصیص این هزینه‌ها میان طبقات مختلف بیمه‌شدگان را نرخ‌گذاری گویند. نرخ‌گذاری در یک شرکت بیمه عمر توسط بخش بیمه‌سنجی شرکت یا یک شرکت مشاور بیمه‌سنجی انجام می‌شود. نرخ حق بیمه باید در طول زمان نسبتاً پایدار بوده و در عین حال پاسخ‌گوی تغییر در شرایط وقوع خسارت باشد. حق بیمه از ضرب نرخ بیمه در تعداد واحدهای پوشش خریداری شده به دست می‌آید. حق بیمه تعیین شده باید پوشش دهنده خسارات و هزینه‌های شرکت باشد. حق بیمه نهایی که توسط بیمه‌شده پرداخت می‌شود، حق بیمه ناخالص<sup>۲</sup> نام دارد. نرخ ناخالص از دو قسمت تشکیل می‌شود: بخش حق بیمه خالص<sup>۳</sup> برای پوشش خسارات و بخش سربار<sup>۴</sup> برای پوشش هزینه‌های عملیاتی. برای انواع بیمه، حق بیمه خالص از تقسیم خسارت انتظاری به تعداد افراد در معرض خسارت به دست می‌آید.

- 
1. Rate
  2. Gross Premium
  3. Pure Premium
  4. Loading

در نرخ گذاری انواع محصولات بیمه عمر سه عنصر اصلی وارد می شود:

- احتمال مرگ و میر<sup>۱</sup>؛

- نرخ بهره<sup>۲</sup>؛

- هزینه سربار.

دو عنصر مرگ و میر و نرخ بهره در محاسبه حق بیمه خالص وارد می شوند که تنها هزینه خسارات را محاسبه کرده و هزینه های اجرایی شرکت بیمه را در نظر نمی گیرند. مجموع حق بیمه خالص و هزینه سربار، حق بیمه ناخالص را تشکیل می دهد که همان قیمت فروش بیمه نامه است.

جدول عمر اصلی ترین پایه محاسبه حق بیمه است. در واقع، از آنجاکه حق بیمه پرداختی توسط بیمه گذار متناسب با تعهدات بیمه گر در مقابل فوت بیمه شده یا رسیدن وی به سن معینی است، می بایست بیمه گر از احتمال فوت یا زنده ماندن بیمه شده در سنین مختلف آگاهی داشته باشد.

عنصر دیگر در محاسبه حق بیمه های عمر - با توجه به فاصله زمانی میان پرداخت حق بیمه ها از سوی بیمه گذار و پرداخت سرمایه از سوی بیمه گر - نرخ بهره است. در کلیه بیمه نامه های عمر، پرداخت حق بیمه قبل از اجرایی شدن قرارداد صورت می گیرد، در حالی که منافع آن در زمانی در آینده پرداخت خواهد شد. از آنجاکه حق بیمه ها از پیش دریافت شده و خسارات و غرامات در تاریخی در آینده پرداخت می گردد، بیمه گر از انباشت حق بیمه ها برای سرمایه گذاری استفاده کرده و بنابراین، باید بهره ای به بیمه گذار تعلق گیرد. با توجه به این مسئله، نیازی نیست که بیمه گر کل خسارت آتی را از بیمه گذاران دریافت کند. بر این اساس، مفهوم ارزش حال<sup>۳</sup> یک واحد پولی آتی در محاسبه حق بیمه اهمیت دارد.

- 
1. Mortality Probability
  2. Interest
  3. Present Value



برای تبدیل حق بیمه خالص به نرخ ناخالص (تجاری) باید هزینه سربار را به آن افزود تا هزینه‌های مربوط به ارائه محصول و خدمات بیمه‌ای نیز پوشش داده شود. تعیین هزینه سربار اساساً مربوط به حسابداری هزینه است و انواع مخارج مربوط به فراهم‌سازی محصول را شامل می‌شود: حق کمیسیون<sup>۱</sup> (کارمزد)، سایر مخارج فروش، مخارج عمومی اداری، مالیات بر حق بیمه، سود و حوادث محتمل الوقوع<sup>۲</sup>.

#### ۴. مبانی محاسباتی بیمه عمر مستمری

در ارزیابی پرداخت مستمری سالیانه که در پایان هر سال پرداخت می‌شود، این احتمال وجود دارد که یک یا چند پرداخت در این مستمری صورت نگیرد. بنابراین، بیمه‌سنج‌ها مجموعه‌ی پرداخت‌ها را ارزش‌گذاری می‌کنند، در حالی که از تعداد پرداخت‌هایی که صورت خواهد گرفت، اطمینان ندارند و حتی اگر از تعداد پرداخت‌ها اطمینان داشته باشند، از مقدار آن مطمئن نیستند. برای این منظور، چهارچوبی برای ارزشیابی سلسله پرداخت‌های احتمالی ارائه خواهد شد.

یکی از انواع متداول پرداخت، مستمری است که در آن دنباله‌ای از پرداخت‌ها با فواصل منظم زمانی انجام می‌شود. نمونه متعارف چنین پرداخت‌هایی، پرداخت حق بیمه در بیمه‌های عمر و سرمایه‌گذاری و اقساط ماهیانه وام خرید مسکن است.

نماد  $a_{\overline{n}|}^i$  نشان‌دهنده ارزش حال دنباله پرداخت‌های یک واحدی است که در پایان هر دوره و برای  $n$  دوره صورت می‌گیرد. این مقدار تحت نرخ بهره موثر  $i$  برای هر دوره محاسبه می‌شود. چنین مستمری را مستمری ته فصلی<sup>۳</sup> گویند.

برای محاسبه  $a_{\overline{n}|}^i$  ارزش حال هر یک از پرداخت‌ها را محاسبه و آنها را تجمیع می‌کنیم (گربر، ۱۳۹۰):

$$a_{\overline{n}|}^i = v + v^2 + v^3 + \dots + v^n \quad (1)$$

- 
1. Commissions
  2. Contingencies
  3. Annuity in Arrear

که در آن،  $v$  (که از رابطه  $v = \frac{1}{1+i}$  محاسبه می‌شود) ارزش حال قسط اول در پایان اولین دوره،  $v^2$  ارزش حال قسط دوم در پایان دومین دوره و ... است. پس از انجام محاسبات ریاضی داریم:

$$a_{\overline{n}|}^i = \frac{1-v^n}{i} \quad (۲)$$

می‌توان نشان داد که برای هر مقدار غیر صفر  $i$ ، با افزایش مقدار  $n$  (دوره اقساط) مقدار  $a_{\overline{n}|}^i$  به سمت یک مقدار حدی میل می‌کند:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{\overline{n}|}^i = \frac{1-v^n}{i} = \frac{1}{i} \quad (۳)$$

بنابراین، ارزش حال مستمری مادام‌العمر<sup>۱</sup> که اقساطی است که برای مدت نامحدودی در پایان هر دوره پرداخت می‌شود، به صورت  $a_{\overline{\infty}|}^i$  نمایش داده شده و برابر با  $\frac{1}{i}$  است.

به مستمری که در آغاز هر دوره پرداخت می‌گردد، مستمری حال (سرفصلی)<sup>۲</sup> گفته می‌شود. علامت  $\ddot{a}_{\overline{n}|}^i$  نشانگر ارزش حال دنباله پرداخت‌های یک واحدی در ابتدای هر یک از  $n$  دوره آتی است. ارزش مقدار  $\ddot{a}_{\overline{n}|}^i$  از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^i = 1 + v + v^2 + \dots + v^{n-1} = (1+i)a_{\overline{n}|}^i = 1 + a_{\overline{n-1}|}^i = \frac{1-v^n}{d}, d = 1-v$$

مستمری بافاصله یا تأخیری<sup>۳</sup> (معوق)، دنباله پرداخت‌هایی است که پس از یک یا چند دوره تأخیر که طی آن هیچ پرداختی صورت نمی‌گیرد، آغاز می‌شود. علامت

1. Perpetuity
2. Annuity Due
3. Deferred Annuity

$m | a_n^i$  بیانگر ارزش حال یک مستمری معوق  $n$  دوره‌ای است که پس از  $m$  دوره آغاز می‌شود. به عبارتی، نخستین پرداخت در دوره  $m+1$  انجام می‌گیرد:

$$m | a_n^i = v^{m+1} + v^{m+2} + \dots + v^{m+n} = v^m \frac{1-v^n}{i} = a_{m+n}^i - a_m^i \quad (5)$$

بیمه عمر مستمری شامل دنباله‌ای از پرداخت‌هاست که تا زمانی که ذی‌نفع (با سن  $x$  در زمان عقد قرارداد) زنده است، پرداخت می‌شود. به عبارتی، یک قرارداد بیمه عمر مستمری می‌تواند به عنوان یک مقرری قطعی در دوره زمانی باقی‌مانده عمر شخص ارائه شود. ارزش حال این مستمری را با  $y$  نشان می‌دهیم که یک متغیر تصادفی است. امید ریاضی ارزش حال این مستمری،  $E(y)$  برابر با تک حق بیمه خالص معادل آن خواهد بود که در محاسبه آن احتمالات مربوطه از جدول عمر استخراج می‌گردد (اتکینسن و دیکسون، ۱۳۹۱).

## ۵. محاسبات بیمه مستمری عمر در شرایط فازی

اصل برابری<sup>۱</sup> کلاسیک بیان می‌کند زمانی که امید ریاضی ارزش حال متغیرهای تصادفی حق بیمه‌ها و منافع بیمه‌های عمر بر هم منطبق باشند، برابری بیمه‌سنجی مالی بین حق بیمه‌ها و منافع وجود دارد. تحقیقاتی که در حوزه تحلیل بیمه‌سنجی فازی هستند، از اصل برابری کلاسیک همراه با نرخ بهره فازی استفاده می‌کنند (Betzen et al., 1997). تصادفی بودن ارزش حال حق بیمه‌ها و منافع بیمه‌نامه توسط امید ریاضی آنها نشان داده می‌شود. ریاضیات مالی استاندارد را می‌توان با پارامترهای تخمین‌زده شده به صورت اعداد فازی توسعه داد. استفاده از نرخ تنزیل فازی و بیان ارزش حال حق بیمه‌ها و منافع قراردادهای بیمه عمر به صورت متغیرهای تصادفی فازی باعث می‌شود ویژگی تصادفی بودن مرگ و میر نیز در مدل لحاظ شود. به این ترتیب می‌توان ارزش انتظاری یک بیمه‌نامه عمر را به دست آورد.

در بسیاری از مسائل بیمه‌سنجی، محقق با ارزیابی یک پرداخت ثابت یا دنباله‌ای از پرداخت‌ها در آینده و بنابراین، فرایند تنزیل سروکار دارد. این پرداخت‌ها به وقایع محتمل الوقوع نظیر زنده ماندن فرد بستگی دارد. در رویکرد متداول بیمه‌سنجی، ارزش انتظاری هر پرداخت آتی تحت نرخ بهره مناسب تنزیل می‌شود. اما در بسیاری از کاربردهای بیمه‌سنجی به ویژه در مسائل مرتبط با پرداخت‌های تضمین شده در آینده، مناسب است که از نرخ تنزیل تصادفی استفاده شود؛ زیرا نرخ تنزیل تصادفی بهتر می‌تواند بازدهی نامطمئن دارایی‌ها را نشان دهد (Boyle, 1976).

همانگونه که اشاره شد، در قیمت‌گذاری قراردادهای مستمری عمر دو منبع نااطمینانی رفتار مرگ و میر و تغییرات نرخ بهره در طول زمان باید وارد شود. با مدل‌سازی تصادفی نااطمینانی مرگ و میر با استفاده از جدول عمر، برای مدل‌سازی نااطمینانی نرخ بهره می‌توان از متغیرها و فرایندهای تصادفی و همچنین اعداد فازی استفاده کرد.

استفاده از نرخ تنزیل فازی و بیان ارزش حال حق بیمه‌ها و منافع قراردادهای بیمه عمر به صورت متغیرهای تصادفی فازی<sup>۱</sup> باعث می‌شود ویژگی تصادفی بودن مرگ و میر نیز در مدل حفظ شود. به این ترتیب می‌توان ارزش انتظاری یک بیمه‌نامه عمر را به دست آورد.

یک مستمری عمر معوق  $m$  ساله برای یک واحد مرگ و میر<sup>۲</sup> در هر سال، قابل پیش‌پرداخت<sup>۳</sup> در طول  $n$  سال برای شخص بیمه‌شده با سن  $x$  در نظر بگیرید. باید توجه داشت که تعریفی که ارائه می‌شود، مستمری‌های عمر فوری (آنی)<sup>۴</sup> و مستمری‌های تمام عمر<sup>۵</sup> را نیز شامل می‌شود. اگر مستمری فوری باشد،  $m=0$  می‌شود و اگر مستمری تمام عمر باشد،  $n=\omega-m+1$  است که  $\omega$  حداکثر سن قابل حصول در

- 
1. Fuzzy Random Variables
  2. Mortality Unit (M.U)
  3. Prepayable
  4. Immediate Life Annuities
  5. Whole Life Annuities

جدول مرگ و میر می‌باشد. فضای پیشامدها  $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}, \omega_n\}$  است که  $\omega_0$  نشانگر این پیشامد است که بیمه‌شده در طول  $m$  سال آینده می‌میرد (و در نتیجه، هیچ مستمری دریافت نمی‌کند)،  $\omega_j$  نشانگر این پیشامد است که بیمه‌شده در سال  $m+j$  از مستمری فوت می‌شود (و در نتیجه،  $j$  مستمری اول را دریافت می‌کند) و  $\omega_n$  نشانگر این پیشامد است که بیمه‌شده  $m+n-1$  سال زنده می‌ماند (و در نتیجه، همه مستمری‌ها را دریافت می‌کند).

به‌طور کلی، داده‌های قطعی (غیر فازی) را می‌توان با اضافه کردن یک عدد  $\pm\theta$  به هر مقدار، تبدیل به داده‌های فازی کرد که  $\theta$  نسبت به مقادیر مرکزی کوچک انتخاب می‌شود. انتخاب  $\theta$  اختیاری بوده یا از طریق اعداد تصادفی تولید می‌شود (Chang and Ayyub, 2001).

با استفاده از بیان فازی برای نرخ تنزیل،  $\tilde{d}_t$ ، می‌توان متغیر تصادفی فازی ارزش حال مستمری معوق  $m$  ساله برای مدت  $n$  سال و برای یک فرد  $x$  ساله،  ${}_{m|n}\tilde{a}_x$  را ایجاد کرد.

تخمین نرخ بهره مؤثر به صورت عدد فازی  $\tilde{i}$  با تابع عضویت  $\mu_{\tilde{i}}(z)$  و برش‌های آلفای  $[\underline{i}_\alpha, \bar{i}_\alpha]$  می‌باشد. با استفاده از  $\tilde{i}$  می‌توان فاکتور تنزیل برای یک واحد مرگ و میر، قابل پرداخت در  $t$  سال را چنین محاسبه کرد:

$$\tilde{d}_t = (1 + \tilde{i})^{-t} \quad (6)$$

و با توجه به اینکه عامل تنزیل، تابعی کاهنده از نرخ بهره است، برش‌های آلفای  $\tilde{d}_t$  برای  $\forall \alpha \in [0, 1]$  چنین تعریف می‌شود:

$$d_{t\alpha} = [\underline{d}_{t\alpha}, \bar{d}_{t\alpha}] = [(1 + \bar{i}_\alpha)^{-t}, (1 + \underline{i}_\alpha)^{-t}] \quad (7)$$

بنابراین، ارزش حال مستمری معوق به صورت زیر بیان خواهد شد:

$$\begin{aligned} & {}_{m|n}\tilde{a}_x : \Omega \rightarrow F(R) \\ & \forall \omega \in \Omega \rightarrow {}_{m|n}\tilde{a}_x(\omega) = \{(z, \mu_{{}_{m|n}\tilde{a}_x(x)}(z)) \mid z \in F(R)\} \end{aligned} \quad (8)$$

باید توجه داشت که نتایج ارزش حال مستمری‌ها به دلیل وابستگی به سن فوت بیمه‌شده تصادفی بوده و ازسوی دیگر، این نتایج اعداد فازی هستند، زیرا با نرخ‌های تنزیلی محاسبه می‌شوند که در یک بازه تعمیم یافته قرار می‌گیرند. این متغیر تصادفی فازی، اعداد فازی زیر را با احتمالات مربوطه‌ی  $p$  اتخاذ می‌کند (Sanches and Puchades, 2012):

نتایج	$p$
$0$ $\sum_{t=m}^{m+r-1} \tilde{d}_t$ $\sum_{t=m}^{m+n-1} \tilde{d}_t$	${}_m q_x$ $m+r-1   q_x, r=1, 2, \dots, n-1$ ${}_{m+n-1} P_x$

متغیر تصادفی فازی  ${}_{m|n} \tilde{a}_x$ ،  $\forall \alpha \in [0, 1]$  متغیرهای اینفیمای<sup>۲</sup> و سوپرمای<sup>۳</sup>  $\frac{{}_{m|n} \tilde{a}_x}{\alpha}$  و  $\frac{{}_{m|n} \tilde{a}_x}{\alpha}$  را چنین تعریف می‌کند:

نتایج برای	$p$
$\frac{{}_{m n} \tilde{a}_x}{\alpha}$	
$0$ $\sum_{t=m}^{m+r-1} \underline{d}_{t\alpha}$ $\sum_{t=m}^{m+n-1} \underline{d}_{t\alpha}$	${}_m q_x$ $m+r-1   q_x, r=1, 2, \dots, n-1$ ${}_{m+n-1} P_x$

1. Outcomes
2. Infima Variable
3. Suprema Variable

نتایج برای	
${}_{m n}\tilde{a}_{x\alpha}$	$p$
$0$	${}_m q_x$
$\sum_{t=m}^{m+r-1} \bar{d}_{t\alpha}$	$m+r-1 q_x, r=1,2,\dots,n-1$
$\sum_{t=m}^{m+n-1} \bar{d}_{t\alpha}$	${}_{m+n-1} P_x$

بر اساس تعاریف ارائه شده در قسمت‌های قبل، مقادیر زیر را می‌توان تعیین کرد:

- برش‌های آلفای امید ریاضی متغیر تصادفی فازی  ${}_{m|n}\tilde{a}_{x\alpha}$ ،  $\forall \alpha \in [0,1]$ ، به صورت  $E({}_{m|n}\tilde{a}_{x\alpha}) = [E({}_{m|n}\tilde{a}_{x\alpha}), \overline{E({}_{m|n}\tilde{a}_{x\alpha})}]$  با مقادیر زیر:

$$E(\tilde{a}_{x\alpha}) = E(\tilde{a}_{x\alpha}) = \sum_{s=m}^{m+n-2} \sum_{t=m}^s d_{t\alpha} \cdot {}_s|q_x + \sum_{t=m}^{m+n-1} d_{t\alpha} \cdot {}_{m+n-1} P_x = \sum_{t=m}^{m+n-1} d_{t\alpha} \cdot {}_t P_x \quad (9)$$

(۱۰)

$$\overline{E(\tilde{a}_{x\alpha})} = \overline{E(\tilde{a}_{x\alpha})} = \sum_{s=m}^{m+n-2} \sum_{t=m}^s \overline{d_{t\alpha} \cdot {}_s|q_x} + \sum_{t=m}^{m+n-1} \overline{d_{t\alpha} \cdot {}_{m+n-1} P_x} = \sum_{t=m}^{m+n-1} \overline{d_{t\alpha} \cdot {}_t P_x}$$

- واریانس و انحراف استاندارد برش‌های آلفای متغیر تصادفی فازی  ${}_{m|n}\tilde{a}_{x\alpha}$ :

$$Var({}_{m|n}\tilde{a}_{x\alpha}) = \sum_{s=m}^{m+n-2} [\sum_{t=m}^s d_{t\alpha}]^2 \cdot {}_s|q_x + [\sum_{t=m}^{m+n-1} d_{t\alpha}]^2 \cdot {}_{m+n-1} P_x - [\sum_{t=m}^{m+n-1} d_{t\alpha} \cdot {}_t P_x]^2 \quad (11)$$

$$Var(\overline{{}_{m|n}\tilde{a}_{x\alpha}}) = \sum_{s=m}^{m+n-2} [\sum_{t=m}^s \overline{d_{t\alpha}}]^2 \cdot {}_s|q_x + [\sum_{t=m}^{m+n-1} \overline{d_{t\alpha}}]^2 \cdot {}_{m+n-1} P_x - [\sum_{t=m}^{m+n-1} \overline{d_{t\alpha}} \cdot {}_t P_x]^2 \quad (12)$$

بنابراین، می‌توان نوشت:

$$Var({}_{m|n}\tilde{a}_{x\alpha}) = \frac{1}{2} \int_0^1 [Var({}_{m|n}\tilde{a}_{x\alpha}) + Var(\overline{{}_{m|n}\tilde{a}_{x\alpha}})] \cdot d\alpha \quad (13)$$

$$D({}_{m|n}\tilde{a}_{x\alpha}) = \sqrt{Var({}_{m|n}\tilde{a}_{x\alpha})}$$

- دو تابع توزیع تعریف شده برای متغیرهای تصادفی فازی،  $\forall \alpha \in [0,1]$ ،

$$F_{{}_{m|n}\tilde{a}_{x\alpha}}(y)_\alpha = [F_{{}_{m|n}\tilde{a}_{x\alpha}}(y)_\alpha, \overline{F_{{}_{m|n}\tilde{a}_{x\alpha}}(y)_\alpha}]$$

:( $r=1, \dots, n-1$ )

$$F_{m|n}^{a_x}(y)_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{if } y < 0 \\ mq_x & \text{if } 0 \leq y < \bar{d}_{m\alpha} \\ mq_x + \sum_{s=m}^{m+r-1} s|q_x & \text{if } \sum_{t=m}^{m+r-1} \bar{d}_{t\alpha} \leq y < \sum_{t=m}^{m+r} \bar{d}_{t\alpha} \\ 1 & \text{if } y \geq \sum_{t=m}^{m+n-1} \bar{d}_{t\alpha} \end{cases} \quad (14)$$

$$\overline{F}_{m|n}^{\tilde{a}_x}(y)_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{if } y < 0 \\ mq_x & \text{if } 0 \leq y < \underline{d}_{m\alpha} \\ mq_x + \sum_{s=m}^{m+r-1} s|q_x & \text{if } \sum_{t=m}^{m+r-1} \underline{d}_{t\alpha} \leq y < \sum_{t=m}^{m+r} \underline{d}_{t\alpha} \\ 1 & \text{if } y \geq \sum_{t=m}^{m+n-1} \underline{d}_{t\alpha} \end{cases} \quad (15)$$

• دو جفت کوانتیل  $\epsilon$ ام برای متغیرهای تصادفی فازی اینفیمای  $m|n \tilde{a}_x$  و سوپرمای  $\alpha$

به صورت زیر تعریف می شوند:

$$Q_{m|n \tilde{a}_x}^{\epsilon, \alpha} = [Q_{m|n \tilde{a}_x}^{\epsilon, \alpha}, Q_{m|n \tilde{a}_x}^{\epsilon, \alpha}]$$

✓ اگر  $0 < \epsilon \leq m q_x$ ، آنگاه  $Q_{m|n \tilde{a}_x}^{\epsilon, \alpha} = 0$ .

✓ اگر  $m q_x < \epsilon \leq m q_x + m |q_x$ ، آنگاه  $Q_{m|n \tilde{a}_x}^{\epsilon, \alpha} = \{ \underline{d}_{m\alpha}, \bar{d}_{m\alpha} \}$ .

✓ اگر  $m q_x + \sum_{s=m}^{m+r-1} |q_x < \epsilon \leq m q_x + \sum_{s=m}^{m+r} |q_x$ ، آنگاه  $Q_{m|n \tilde{a}_x}^{\epsilon, \alpha} = \{ \sum_{t=m}^{m+r} \underline{d}_{t\alpha}, \sum_{t=m}^{m+r} \bar{d}_{t\alpha} \}$  و  $\{1, 2, \dots, n-2\} = \emptyset$  و  $n-2 < m$  و  $r \in \{1, 2, \dots, n-2\}$

✓ اگر  $m q_x + \sum_{s=m}^{m+n-2} |q_x < \epsilon \leq 1$ ، آنگاه  $Q_{m|n \tilde{a}_x}^{\epsilon, \alpha} = \{ \sum_{t=m}^{m+n-1} \underline{d}_{t\alpha}, \sum_{t=m}^{m+n-1} \bar{d}_{t\alpha} \}$ .



## ۶. یافته‌ها

در آیین‌نامه شماره ۶۸ بیمه مرکزی ج.ا.ا، مصوب تاریخ ۱۳۹۰/۹/۲۲، معیارهای اختصاصی تعیین نرخ در کلیه بیمه‌نامه‌های زندگی و مستمری تعیین شده است (ثبات، ۱۳۹۳):

- جدول مرگ‌ومیر TD88-90 فرانسه: که بیمه مرکزی ج.ا.ا موظف است حداقل هر پنج سال یک‌بار جدول مرگ‌ومیر را به‌روز نماید (این جدول در به پیوست مقاله آمده است)؛

- نرخ سود فنی علی‌الحساب: حداکثر نرخ سود فنی در بیمه‌نامه‌های با مدت حداکثر

پنج سال ۱۸٪، در بیمه‌نامه‌های با مدت حداکثر تا ده سال، ۱۸٪ برای پنج سال اول و

۱۵٪ برای مدت مازاد بر پنج سال اول و در بیمه‌نامه‌های با مدت بیش از ده سال، ۱۸٪

برای پنج سال اول و ۱۵٪ برای پنج سال دوم و ۱۰٪ برای مدت مازاد بر ده سال. بیمه

مرکزی ج.ا.ا موظف است هر دو سال یکبار نرخ سود فنی را مورد بازنگری قرار دهد؛

- هزینه‌های اداری و بیمه‌گری؛

- هزینه کارمزد.

در این قسمت یک مستمری عمر قابل پرداخت به یک مرد ۶۲ ساله را تحلیل

می‌کنیم که به مدت ۳ سال حق‌بیمه پرداخت می‌کند ( $m=3$ ) و پس از آن به مدت

۱۰ سال مستمری دریافت می‌دارد ( $n=10$ ). فرض می‌شود مستمری در ابتدای دوره

پرداخت می‌گردد. برای قیمت‌گذاری این مستمری از جدول عمر TD88-90

استفاده کرده و احتمالات مربوطه را از این جدول استخراج می‌کنیم. برای

فازی کردن نرخ بهره فنی، با توجه به مقادیر مرکزی ۱۸، ۱۵ و ۱۰ درصد، بازه  $\pm 2$

درصد را برای آن منظور می‌کنیم. بدین ترتیب، نرخ بهره فنی فازی را با توجه به

آیین‌نامه ۶۸، عدد فازی مثلثی  $\tilde{i}_1 = (0.16, 0.18, 0.20)$  برای ۵ سال اول قرارداد، عدد

فازی مثلثی  $\tilde{i}_2 = (0.13, 0.15, 0.17)$  برای ۵ سال دوم قرارداد و عدد فازی مثلثی

$\tilde{i}_3 = (0.08, 0.10, 0.12)$  برای مدت مازاد بر ۱۰ سال در نظر می‌گیریم که برش آلفای این

اعداد فازی مثلثی چنین بیان می‌شود:

$$\forall \alpha \in [0,1], i_{1\alpha} = [\underline{i}_1(\alpha), \bar{i}_1(\alpha)] = [0.16 + 0.02\alpha, 0.2 - 0.02\alpha]$$

$$\forall \alpha \in [0,1], i_{2\alpha} = \left[ \underline{i}_2(\alpha), \overline{i}_2(\alpha) \right] = [0.13 + 0.02\alpha, 0.17 - 0.02\alpha]$$

$$\forall \alpha \in [0,1], i_{3\alpha} = \left[ \underline{i}_3(\alpha), \overline{i}_3(\alpha) \right] = [0.08 + 0.02\alpha, 0.12 - 0.02\alpha]$$

بنابراین، برش آلفای تابع تنزیل  $\tilde{d}_i = (1 + \tilde{i})^{-t}$  به صورت زیر تعریف خواهد شد:

$$d_{1t\alpha} = \left[ \underline{d}_{1t\alpha}, \overline{d}_{1t\alpha} \right] = [(1.2 - 0.02\alpha)^{-t}, (1.16 + 0.02\alpha)^{-t}]$$

$$d_{2t\alpha} = \left[ \underline{d}_{2t\alpha}, \overline{d}_{2t\alpha} \right] = [(1.17 - 0.02\alpha)^{-t}, (1.13 + 0.02\alpha)^{-t}]$$

$$d_{3t\alpha} = \left[ \underline{d}_{3t\alpha}, \overline{d}_{3t\alpha} \right] = [(1.12 - 0.02\alpha)^{-t}, (1.08 + 0.02\alpha)^{-t}]$$

متغیر تصادفی فازی ارزش حال مستمری،  ${}_{3|10}\tilde{a}_{62}$ ، اعداد فازی درج شده در

جدول ۱ را با احتمالات مربوطه اتخاذ می‌کند:



جدول ۱. متغیر تصادفی فازی ارزش حال مستمری  $\tilde{A}_{62}^{3|10}$

برآمدهای فازی	برآمدهای قطعی	برش آلفای برآمدها	احتمال براساس جدول TD88-90
0	0	$0=[0,0]$	${}_3q_{62}=0.0571$
$(1 + \tilde{r}_1)^{-3}$	0.6086	$[(1.2 - 0.02\alpha)^{-3}, (1.16 + 0.02\alpha)^{-3}]$	${}_3q_{62}=0.0208$
$\sum_{t=3}^4 (1 + \tilde{r}_1)^{-t}$	1.1244	$\left[ \sum_{t=3}^4 (1.2 - 0.02\alpha)^{-t}, \sum_{t=3}^4 (1.16 + 0.02\alpha)^{-t} \right]$	${}_4q_{62}=0.0216$
$\sum_{t=3}^5 (1 + \tilde{r}_1)^{-t}$	1.5615	$\left[ \sum_{t=3}^5 (1.2 - 0.02\alpha)^{-t}, \sum_{t=3}^5 (1.16 + 0.02\alpha)^{-t} \right]$	${}_5q_{62}=0.0228$
$\sum_{t=3}^5 (1 + \tilde{r}_1)^{-t} + (1 + \tilde{r}_2)^{-6}$	1.9922	$\left[ \sum_{t=3}^5 (1.2 - 0.02\alpha)^{-t}, \sum_{t=3}^5 (1.16 + 0.02\alpha)^{-t} \right] + [(1.17 - 0.02\alpha)^{-6}, (1.13 + 0.02\alpha)^{-6}]$	${}_6q_{62}=0.0240$
$\sum_{t=3}^5 (1 + \tilde{r}_1)^{-t} + \sum_{t=6}^7 (1 + \tilde{r}_2)^{-t}$	2.4165	$\left[ \sum_{t=3}^5 (1.2 - 0.02\alpha)^{-t}, \sum_{t=3}^5 (1.16 + 0.02\alpha)^{-t} \right] + \left[ \sum_{t=6}^7 (1.17 - 0.02\alpha)^{-t}, \sum_{t=6}^7 (1.13 + 0.02\alpha)^{-t} \right]$	${}_7q_{62}=0.0253$
$\sum_{t=3}^5 (1 + \tilde{r}_1)^{-t} + \sum_{t=6}^8 (1 + \tilde{r}_2)^{-t}$	2.8345	$\left[ \sum_{t=3}^5 (1.2 - 0.02\alpha)^{-t}, \sum_{t=3}^5 (1.16 + 0.02\alpha)^{-t} \right] + \left[ \sum_{t=6}^8 (1.17 - 0.02\alpha)^{-t}, \sum_{t=6}^8 (1.13 + 0.02\alpha)^{-t} \right]$	${}_8q_{62}=0.0266$
$\sum_{t=3}^5 (1 + \tilde{r}_1)^{-t} + \sum_{t=6}^9 (1 + \tilde{r}_2)^{-t}$	3.2463	$\left[ \sum_{t=3}^5 (1.2 - 0.02\alpha)^{-t}, \sum_{t=3}^5 (1.16 + 0.02\alpha)^{-t} \right] + \left[ \sum_{t=6}^9 (1.17 - 0.02\alpha)^{-t}, \sum_{t=6}^9 (1.13 + 0.02\alpha)^{-t} \right]$	${}_9q_{62}=0.0285$
$\sum_{t=3}^5 (1 + \tilde{r}_1)^{-t} + \sum_{t=6}^{10} (1 + \tilde{r}_2)^{-t}$	3.6521	$\left[ \sum_{t=3}^5 (1.2 - 0.02\alpha)^{-t}, \sum_{t=3}^5 (1.16 + 0.02\alpha)^{-t} \right] + \left[ \sum_{t=6}^{10} (1.17 - 0.02\alpha)^{-t}, \sum_{t=6}^{10} (1.13 + 0.02\alpha)^{-t} \right]$	${}_{10}q_{62}=0.0300$
$\sum_{t=3}^5 (1 + \tilde{r}_1)^{-t} + \sum_{t=6}^{10} (1 + \tilde{r}_2)^{-t} + (1 + \tilde{r}_3)^{-11}$	4.0209	$\left[ \sum_{t=3}^5 (1.2 - 0.02\alpha)^{-t}, \sum_{t=3}^5 (1.16 + 0.02\alpha)^{-t} \right] + \left[ \sum_{t=6}^{10} (1.17 - 0.02\alpha)^{-t}, \sum_{t=6}^{10} (1.13 + 0.02\alpha)^{-t} \right] + [(1.12 - 0.02\alpha)^{-11}, (1.08 + 0.02\alpha)^{-11}]$	${}_{11}q_{62}=0.0315$
$\sum_{t=3}^5 (1 + \tilde{r}_1)^{-t} + \sum_{t=6}^{10} (1 + \tilde{r}_2)^{-t} + \sum_{t=11}^{12} (1 + \tilde{r}_3)^{-t}$	4.3563	$\left[ \sum_{t=3}^5 (1.2 - 0.02\alpha)^{-t}, \sum_{t=3}^5 (1.16 + 0.02\alpha)^{-t} \right] + \left[ \sum_{t=6}^{10} (1.17 - 0.02\alpha)^{-t}, \sum_{t=6}^{10} (1.13 + 0.02\alpha)^{-t} \right] + \left[ \sum_{t=11}^{12} (1.12 - 0.02\alpha)^{-t}, \sum_{t=11}^{12} (1.08 + 0.02\alpha)^{-t} \right]$	${}_{11}p_{62}=0.743$

آشکار است که به ازای  $\alpha=1$  مقدار قطعی برآمدهای این بیمه نامه به دست خواهد آمد. متغیر تصادفی فازی ارزش حال مستمری،  ${}_3|_{10}\tilde{a}_{62}$ ، اعداد فازی با احتمالات مربوطه می باشد که در جدول ۱ درج شده است. محاسبه حق بیمه سالانه<sup>۱</sup> این مستمری براساس احتمالات فوت و بقای جدول عمر TD88-90 رقم قطعی ۱/۱۶۱۵ را به دست می دهد. این حق بیمه میزان حق بیمه پرداختی در ابتدای سه سال اول قرارداد را نشان می دهد که برای بازپرداخت منافع ۱ واحدی در ابتدای ۱۰ سال مستمری کفایت می کند (به غیر از هزینه های اداری و اجرایی بیمه گر). به عنوان مثال، چنانچه نرخ بهره فنی مورد استفاده در قیمت گذاری مستمری مذکور از ۱۸ به ۱۴/۸ یا ۲۰ درصد کاهش یا افزایش پیدا کند و به عبارت دیگر، نرخ بهره فنی در بازه [۲۰ ۱۴/۸] تغییر کند، حق بیمه سالانه در محدوده [۱/۲۸۱۵ ۱/۰۲۰۳] تغییر خواهد کرد.

برش آلفای اعداد فازی بیانگر امید ریاضی این متغیرهای تصادفی فازی براساس روابط (۹) و (۱۰) چنین محاسبه می گردد:

$$\frac{E({}_{m|n}\tilde{a}_x)}{\alpha} = E({}_{m|n}\tilde{a}_{x\alpha}) = \sum_{t=3}^{12} d_{t\alpha} \cdot t p_x = (1.2 - 0.02\alpha)^{-3} \times 0.943 + (1.2 - 0.02\alpha)^{-4} \times 0.922 + (1.2 - 0.02\alpha)^{-5} \times 0.901 + (1.17 - 0.02\alpha - 6 \times 0.878 + 1.17 - 0.02\alpha - 7 \times 0.854 + 1.17 - 0.02\alpha - 8 \times 0.828 + 1.17 - 0.02\alpha - 9 \times 0.802 + 1.17 - 0.02\alpha - 10 \times 0.773 + 1.12 - 0.02\alpha - 11 \times 0.743 + (1.12 - 0.02\alpha)^{-12} \times 0.712$$

$$\frac{E({}_{m|n}\tilde{a}_x)}{\alpha} = E({}_{m|n}\tilde{a}_{x\alpha}) = \sum_{t=3}^{12} \bar{d}_{t\alpha} \cdot p_x = (1.16 + 0.02\alpha)^{-3} \times 0.943 + (1.16 + 0.02\alpha)^{-4} \times 0.922 + (1.16 + 0.02\alpha)^{-5} \times 0.901 + (1.13 + 0.02\alpha)^{-6} \times 0.878 + (1.13 + 0.02\alpha)^{-7} \times 0.854 + (1.13 + 0.02\alpha)^{-8} \times 0.828 + (1.13 + 0.02\alpha)^{-9} \times 0.802 + (1.13 + 0.02\alpha)^{-10} \times 0.773 + (1.08 + 0.02\alpha)^{-11} \times 0.743 + (1.08 + 0.02\alpha)^{-12} \times 0.712$$

۱. تک حق بیمه خالص (یکجا) کل مبلغی است که اگر در زمان صدور بیمه نامه پرداخت شود و توسط نرخ بهره مرکب افزونه گردد، بیمه گر قادر به پرداخت منافع در سرسید خواهد بود. اغلب افراد قادر به پرداخت حق بیمه یکجا نیستند. برای محاسبه حق بیمه خالص سالانه ابتدا حق بیمه خالص یکجا را محاسبه و سپس آن را به یک سری از پرداخت های سالانه تبدیل می کنند.

واریانس و انحراف استاندارد متغیر تصادفی فازی  ${}_{3|10}\tilde{a}_{62}$  از روابط (۱۳ و ۱۲، ۱۱) محاسبه می‌گردد:

$$\begin{aligned} \text{Var}(\underline{{}_{m|n}\tilde{a}_{x\alpha}}) = & \{(1.2 - 0.02\alpha)^{-6} \times 0.0208 + [\sum_{t=3}^4 (1.2 - \\ & 0.02\alpha)^{-t}]^2 \times 0.0216 + [\sum_{t=3}^5 (1.2 - 0.02\alpha)^{-t}]^2 \times 0.0228 + \\ & ([\sum_{t=3}^5 (1.2 - 0.02\alpha)^{-t}]^2 + (1.17 - 0.02\alpha)^{-12}) \times 0.0240 + \\ & ([\sum_{t=3}^5 (1.2 - 0.02\alpha)^{-t}]^2 + [\sum_{t=6}^7 (1.17 - 0.02\alpha)^{-t}]^2) \times 0.0253 + \\ & ([\sum_{t=3}^5 (1.2 - 0.02\alpha)^{-t}]^2 + [\sum_{t=6}^8 (1.17 - 0.02\alpha)^{-t}]^2) \times 0.0266 + \\ & ([\sum_{t=3}^5 (1.2 - 0.02\alpha)^{-t}]^2 + [\sum_{t=6}^9 (1.17 - 0.02\alpha)^{-t}]^2) \times 0.0285 + \\ & ([\sum_{t=3}^5 (1.2 - 0.02\alpha)^{-t}]^2 + [\sum_{t=6}^{10} (1.17 - 0.02\alpha)^{-t}]^2) \times 0.0300 + \\ & ([\sum_{t=3}^5 (1.2 - 0.02\alpha)^{-t}]^2 + [\sum_{t=6}^{10} (1.17 - 0.02\alpha)^{-t}]^2 + (1.12 - \\ & 0.02\alpha)^{-22}) \times 0.0315 + ([\sum_{t=3}^5 (1.2 - 0.02\alpha)^{-t}]^2 + [\sum_{t=6}^{10} (1.17 - \\ & 0.02\alpha)^{-t}]^2 + [\sum_{t=11}^{12} (1.12 - 0.02\alpha)^{-t}]^2) \times 0.743\} - \{(1.2 - \\ & 0.02\alpha)^{-3} \times 0.943 + (1.2 - 0.02\alpha)^{-4} \times 0.922 + (1.2 - 0.02\alpha)^{-5} \times \\ & 0.901 + (1.17 - 0.02\alpha)^{-6} \times 0.878 + (1.17 - 0.02\alpha)^{-7} \times 0.854 + \\ & (1.17 - 0.02\alpha)^{-8} \times 0.828 + (1.17 - 0.02\alpha)^{-9} \times 0.802 + \\ & (1.17 - 0.02\alpha)^{-10} \times 0.773 + (1.12 - 0.02\alpha)^{-11} \times 0.743 + \\ & (1.12 - 0.02\alpha)^{-12} \times 0.712\}^2 \\ \text{Var}(\overline{{}_{m|n}\tilde{a}_{x\alpha}}) = & \{(1.16 + 0.02\alpha)^{-6} \times 0.0208 + [\sum_{t=3}^4 (1.16 + \\ & 0.02\alpha)^{-t}]^2 \times 0.0216 + [\sum_{t=3}^5 (1.16 + 0.02\alpha)^{-t}]^2 \times 0.0228 + \\ & ([\sum_{t=3}^5 (1.16 + 0.02\alpha)^{-t}]^2 + (1.13 + 0.02\alpha)^{-12}) \times 0.0240 + \\ & ([\sum_{t=3}^5 (1.16 + 0.02\alpha)^{-t}]^2 + [\sum_{t=6}^7 (1.13 + 0.02\alpha)^{-t}]^2) \times 0.0253 + \\ & ([\sum_{t=3}^5 (1.16 + 0.02\alpha)^{-t}]^2 + [\sum_{t=6}^8 (1.13 + 0.02\alpha)^{-t}]^2) \times 0.0266 + \\ & ([\sum_{t=3}^5 (1.16 + 0.02\alpha)^{-t}]^2 + [\sum_{t=6}^9 (1.13 + 0.02\alpha)^{-t}]^2) \times 0.0285 + \\ & ([\sum_{t=3}^5 (1.16 + 0.02\alpha)^{-t}]^2 + [\sum_{t=6}^{10} (1.13 + 0.02\alpha)^{-t}]^2) \times 0.0300 + \\ & ([\sum_{t=3}^5 (1.16 + 0.02\alpha)^{-t}]^2 + [\sum_{t=6}^{10} (1.13 + 0.02\alpha)^{-t}]^2 + (1.08 + \\ & 0.02\alpha)^{-22}) \times 0.0315 + ([\sum_{t=3}^5 (1.16 + 0.02\alpha)^{-t}]^2 + [\sum_{t=6}^{10} (1.13 + \\ & 0.02\alpha)^{-t}]^2 + [\sum_{t=11}^{12} (1.08 + 0.02\alpha)^{-t}]^2) \times 0.743\} - \{(1.16 + \end{aligned}$$

$$0.02\alpha)^{-3} \times 0.943 + (1.16 + 0.02\alpha)^{-4} \times 0.922 + (1.16 + 0.02\alpha)^{-5} \times 0.901 + (1.13 + 0.02\alpha)^{-6} \times 0.878 + (1.13 + 0.02\alpha)^{-7} \times 0.854 + (1.13 + 0.02\alpha)^{-8} \times 0.828 + (1.13 + 0.02\alpha)^{-9} \times 0.802 + (1.13 + 0.02\alpha)^{-10} \times 0.773 + (1.08 + 0.02\alpha)^{-11} \times 0.743 + (1.08 + 0.02\alpha)^{-12} \times 0.712\}^2$$

جفت توابع توزیع احتمال این متغیر تصادفی فازی چنین تعریف می شود  
 $(r=1, \dots, n-1)$

$$\overline{F_{m|n, \tilde{a}_x}(y)}_{\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{if } y < 0 \\ 0.0571 & \text{if } 0 \leq y < (1.16 + 0.02\alpha)^{-3} \\ 0.0779 & \text{if } (1.16 + 0.02\alpha)^{-3} \leq y < \sum_{t=3}^4 (1.16 + 0.02\alpha)^{-t} \\ \vdots & \vdots \\ 0.2882 & \text{if } \sum_{t=3}^5 (1.16 + 0.02\alpha)^{-t} + \sum_{t=6}^{10} (1.13 + 0.02\alpha)^{-t} \\ & + (1.08 + 0.02\alpha)^{-11} \leq y < \sum_{t=3}^5 (1.16 + 0.02\alpha)^{-t} \\ & + \sum_{t=6}^{10} (1.13 + 0.02\alpha)^{-t} + \sum_{t=11}^{12} (1.08 + 0.02\alpha)^{-t} \\ 1 & \text{if } y \geq \sum_{t=3}^5 (1.16 + 0.02\alpha)^{-t} + \sum_{t=6}^{10} (1.13 + 0.02\alpha)^{-t} \\ & + \sum_{t=11}^{12} (1.08 + 0.02\alpha)^{-t} \end{cases}$$

$$\overline{F_{m|n, \tilde{a}_x}(y)}_{\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{if } y < 0 \\ 0.0571 & \text{if } 0 \leq y < (1.2 - 0.02\alpha)^{-3} \\ 0.0779 & \text{if } (1.2 - 0.02\alpha)^{-3} \leq y < \sum_{t=3}^4 (1.2 - 0.02\alpha)^{-t} \\ \vdots & \vdots \\ 0.2882 & \text{if } \sum_{t=3}^5 (1.2 - 0.02\alpha)^{-t} + \sum_{t=6}^{10} (1.17 - 0.02\alpha)^{-t} \\ & + (1.12 - 0.02\alpha)^{-11} \leq y < \sum_{t=3}^5 (1.2 - 0.02\alpha)^{-t} \\ & + \sum_{t=6}^{10} (1.17 - 0.02\alpha)^{-t} + \sum_{t=11}^{12} (1.12 - 0.02\alpha)^{-t} \\ 1 & \text{if } y \geq \sum_{t=3}^5 (1.2 - 0.02\alpha)^{-t} + \sum_{t=6}^{10} (1.17 - 0.02\alpha)^{-t} \\ & + \sum_{t=11}^{12} (1.12 - 0.02\alpha)^{-t} \end{cases}$$

بر اساس توابع توزیع نوشته شده در بالا، جفت چندک (کوانتیل)  $\mathcal{E}^{\alpha}$  برای متغیرهای

تصادفی فازی اینفیمای  $\tilde{a}_x$  و سوپرمای  $\tilde{a}_x$  چنین تعریف می‌شود:

• اگر  $0 < \varepsilon < 0.0571$ ، آنگاه  $Q_{\tilde{a}_x}^{\varepsilon} = 0$ .

• اگر  $0.0571 < \varepsilon \leq 0.0779$ ، آنگاه:

$$Q_{\tilde{a}_x}^{\varepsilon} = \{(1.2 - 0.02\alpha)^{-3}, (1.16 + 0.02\alpha)^{-3}\}$$

• اگر  $0.2567 < \varepsilon < 0.2882$ ، آنگاه:

$$Q_{\tilde{a}_x}^{\varepsilon} = \left\{ \sum_{t=3}^5 (1.2 - 0.02\alpha)^{-t} + \sum_{t=6}^{10} (1.17 - 0.02\alpha)^{-t} + (1.12 - 0.02\alpha - 11), [t=351.16+0.02\alpha-t+t=6101.13+0.02\alpha-t+t=1.08+0.02\alpha-11] \right\}$$

و  $\{1, 2, \dots, n-2\} = \emptyset$  و  $n-2 < m$  و  $r \in \{1, 2, \dots, n-2\}$

• اگر  $0.2882 < \varepsilon \leq 1$ ، آنگاه

$$Q_{\tilde{a}_x}^{\varepsilon} = \left\{ \sum_{t=3}^5 (1.2 - 0.02\alpha)^{-t} + \sum_{t=6}^{10} (1.17 - 0.02\alpha)^{-t} + \sum_{t=11}^{12} (1.12 - 0.02\alpha - t), [t=351.16+0.02\alpha-t+t=6101.13+0.02\alpha-t+t=11121.08+0.02\alpha-t] \right\}$$

باید توجه داشت که امید ریاضی، توزیع احتمال و چندک‌های یک عدد تصادفی فازی، خود یک عدد فازی است، درحالی‌که برای بیان حق‌بیمه‌ها یا حساب ذخایر به یک کمیت قطعی نیاز است. بنابراین، اعداد فازی باید به اعداد قطعی تبدیل شوند. با این حال می‌توان اعداد فازی را به‌عنوان یک تقریب در نظر گرفت که یک حد بالا و پایین برای قضاوت بیمه‌سنجی از قیمت قابل قبول بازاری تعیین می‌کند.

## ۷. نتیجه‌گیری

در حوزه دانش بیمه‌سنجی، تئوری مجموعه‌های فازی برای مدل‌سازی مسائلی به‌کار می‌رود که نیازمند قضاوت ذهنی بیمه‌سنج بوده یا اطلاعات در دسترس مبهم یا اندک است. یکی از کاربردهای تئوری مجموعه فازی در بیمه‌سنجی، قیمت‌گذاری قراردادهای بیمه عمر با نرخ بهره فازی است. در این مقاله از اعداد فازی برای

کمی کردن نرخ تنزیل بیمه‌ای استفاده کرده و فرض می‌کنیم رفتار مرگ و میر تصادفی است. استفاده از متغیرهای تصادفی فازی نه تنها کمی کردن قیمت انتظاری بیمه‌نامه را امکان‌پذیر می‌کند، بلکه ریسک مرگ و میر را نیز در محاسبات لحاظ می‌نماید که این مطلب برای تطابق ذخایر با تعهدات پیش‌بینی‌نشده شرکت بیمه عمر ضروری است.

توجه به این نکته ضروری است که امید ریاضی یک متغیر تصادفی فازی، خود یک عدد فازی است، اگرچه، بیان حق بیمه یا ذخایر در صورت‌های مالی باید به صورت اعداد قطعی باشد. محاسبه برش آلفای برآمدهای فازی در بیمه‌نامه مستمری عمر به معنای آن است که به جای یک برآمد قطعی، یک حد بالا و پایینی برای این برآمد در نظر گرفته می‌شود که برآمد قطعی در بین آن نوسان می‌کند. بدین ترتیب می‌توان حاشیه‌ای برای "قضاوت ذهنی بیمه‌سنجی" یا بازه‌ای برای "قیمت‌های بازاری قابل قبول" تعریف کرد.

همانگونه که در مقدمه مقاله ذکر شد، نوسانات نرخ بهره فنی در نتیجه تغییر در سیاست‌های پولی، مالی و ارزی دولت می‌تواند ذخایر و تعهدات یک شرکت بیمه عمر را تحت تأثیر قرار دهد. با استفاده از رویکرد فازی به نرخ بهره فنی، محدوده‌ای برای شرکت بیمه قابل ترسیم خواهد بود که نوسان ذخایر و تعهدات در این بازه می‌تواند اطمینان از توانگری را به دنبال داشته باشد. بدین ترتیب، امکان پیش‌نگری و برنامه‌ریزی بهینه برای بیمه‌گران فراهم خواهد شد.

اگرچه در این مقاله صرفاً به قیمت‌گذاری بیمه‌نامه مستمری عمر پرداخته شد، این امکان وجود دارد که محاسبات را برای سایر انواع محصولات بیمه عمر نظیر بیمه تمام عمر، بیمه عمر و پس‌انداز، بیمه عمر جامع و... و همچنین برای حق بیمه‌های دوره‌ای توسعه داد. لازم به ذکر است با توجه به پیچیدگی محاسبات فازی، نویسندگان، ارائه مقاله حاضر را مقدمه‌ای برای معرفی این تکنیک در حوزه بیمه و به ویژه بیمه عمر دانسته و امتداد تحقیقات نظری و عملی آن را به سایر محققان علاقه‌مند پیشنهاد می‌نمایند.



## منابع

۱. اتکینسن، م. و دیکسن. د.، ۱۳۹۱. مبانی مطالعات اکچوئریال، ترجمه غدیر مهدوی و کیوان اسمعیلی، تهران: پژوهشکده بیمه.
۲. ثبات، غ.م.، ۱۳۹۳. مجموعه کامل قوانین و مقررات صنعت بیمه، تهران: انتشارات پژوهشکده بیمه، چ ۲.
۳. گریب، ه.ی.، ۱۳۹۰. ریاضیات بیمه عمر، ترجمه غدیر مهدوی، حمید حاتمی و محمد عباسی، تهران: پژوهشکده بیمه.
4. Beekman, J.A. and Fuelling, C.P., 1992, Extra-randomness in certain annuity models. *Insurance : Mathematics and Economics*, 10, pp.275–287.
5. Betzuen, A., Jiménez, M. and Rivas, J.A., 1997. Actuarial mathematics with fuzzy parameters, An application to collective pension plans. *Fuzzy Economic Review*, 2, pp.47–66.
6. Boyle, P.P., 1976. Rates of return as random variables. *Journal of Risk and Insurance*, 43, pp.693–713.
7. Chang, Y.H.O. and Ayyub, B.M., 2001. Fuzzy regression methods: A comparative assessment. *Fuzzy Sets and Systems*, 119, pp.187–203.
8. Cummins, J.D. and Derrig, R.A., 1997. Fuzzy financial pricing of property-liability insurance, *North American Actuarial Journal*, 1, pp.21–44.
9. Di Paolo, F., 1969. An application of simulated stock market trends to Investigate a Ruin Problem. *Transactions of the Society of Actuaries*, XXI, pp.549-562.
10. Gerber, H.U., 1995. *Life insurance mathematics*. Berlin: Springer-Verlag.
11. Kahn, P.M., 1971. Projections of variable life insurance operation. *Transactions of the Society of Actuaries*. XXIII, pp.335-366.
12. Lintner, J., 1972. *Equilibrium in a random walk and lognormal securities market*. Discussion Paper No.235, Harvard Institute of Economic Research, Harvard University, Cambridge, Massachusetts.
13. Markowitz, H.M., 1952. Portfolio selection. *Journal of Finance*, VII(1), pp.77-91.
14. Panjer, H.H. and Bellhouse, D.R., 1981. Stochastic modeling of interest rates with applications to life contingencies—part II. *Journal of Risk and Insurance*, 48, pp.628–637.
15. Sanches, J.A. and Puchades, L.G., 2012. Using fuzzy random variables in life annuities pricing. *Fuzzy Sets and Systems*, 188, pp.27–44.
16. Ziocck, R.W., 1973. A realistic profit model for individual non-participating life insurance. *Journal of Risk and Insurance*, XL(3), p.357.

جدول عمر مردان فرانسه (TD88-90)

$(e_0=72.015) TD 88-90$			
سن	تعداد زنده‌ها	تعداد فوت	احتمال فوت
۰	۱۰۰۰۰۰	۸۷۱	۰/۰۰۰۸۷۱
۱	۹۹۱۲۹	۷۲	۰/۰۰۰۰۷۲۶
۲	۹۹۰۵۷	۴۷	۰/۰۰۰۰۴۷۴
۳	۹۹۰۱۰	۳۳	۰/۰۰۰۰۳۳۳
۴	۹۸۹۷۷	۲۹	۰/۰۰۰۰۲۹۳
۵	۹۸۹۴۸	۲۷	۰/۰۰۰۰۲۷۳
۶	۹۸۹۲۱	۲۴	۰/۰۰۰۰۲۴۳
۷	۹۸۸۹۷	۲۱	۰/۰۰۰۰۲۱۲
۸	۹۸۸۷۶	۲۱	۰/۰۰۰۰۲۱۲
۹	۹۸۸۵۵	۲۰	۰/۰۰۰۰۲۰۲
۱۰	۹۸۸۳۵	۲۱	۰/۰۰۰۰۲۱۲
۱۱	۹۸۸۱۴	۲۱	۰/۰۰۰۰۲۱۳
۱۲	۹۸۷۹۳	۲۲	۰/۰۰۰۰۲۲۳
۱۳	۹۸۷۷۱	۲۶	۰/۰۰۰۰۲۶۳
۱۴	۹۸۷۴۵	۳۳	۰/۰۰۰۰۳۳۴
۱۵	۹۸۷۱۲	۴۵	۰/۰۰۰۰۴۵۶
۱۶	۹۸۶۶۷	۶۱	۰/۰۰۰۰۶۱۸
۱۷	۹۸۶۰۶	۸۶	۰/۰۰۰۰۸۷۲
۱۸	۹۸۵۲۰	۱۱۴	۰/۰۰۰۱۱۵۷
۱۹	۹۸۴۰۶	۱۲۹	۰/۰۰۰۱۳۱۱
۲۰	۹۸۲۷۷	۱۴۰	۰/۰۰۰۱۴۲۵
۲۱	۹۸۱۳۷	۱۵۰	۰/۰۰۰۱۵۲۸
۲۲	۹۷۹۸۷	۱۵۷	۰/۰۰۰۱۶۰۲
۲۳	۹۷۸۳۰	۱۵۳	۰/۰۰۰۱۵۶۴
۲۴	۹۷۶۷۷	۱۵۳	۰/۰۰۰۱۵۶۶
۲۵	۹۷۵۲۴	۱۵۱	۰/۰۰۰۱۵۴۸
۲۶	۹۷۳۷۳	۱۵۱	۰/۰۰۰۱۵۵۱
۲۷	۹۷۲۲۲	۱۵۲	۰/۰۰۰۱۵۶۳

سن	تعداد زنده ها	تعداد فوت	احتمال فوت
۲۸	۹۷۰۷۰	۱۵۴	۰/۰۰۱۵۸۶
۲۹	۹۶۹۱۶	۱۵۷	۰/۰۰۱۶۲
۳۰	۹۶۷۵۹	۱۶۲	۰/۰۰۱۶۷۴
۳۱	۹۶۵۹۷	۱۶۸	۰/۰۰۱۷۳۹
۳۲	۹۶۴۲۹	۱۷۴	۰/۰۰۱۸۰۴
۳۳	۹۶۲۵۵	۱۸۴	۰/۰۰۱۹۱۲
۳۴	۹۶۰۷۱	۱۹۳	۰/۰۰۲۰۰۹
۳۵	۹۵۸۷۸	۲۰۲	۰/۰۰۲۱۰۷
۳۶	۹۵۶۷۶	۲۱۳	۰/۰۰۲۲۲۶
۳۷	۹۵۴۶۳	۲۲۶	۰/۰۰۲۳۶۷
۳۸	۹۵۲۳۷	۲۴۰	۰/۰۰۲۵۲
۳۹	۹۴۹۹۷	۲۵۱	۰/۰۰۲۶۴۲
۴۰	۹۴۷۴۶	۲۷۰	۰/۰۰۲۸۵
۴۱	۹۴۴۷۶	۲۹۴	۰/۰۰۳۱۱۲
۴۲	۹۴۱۸۲	۳۱۴	۰/۰۰۳۳۳۴
۴۳	۹۳۸۶۸	۳۵۳	۰/۰۰۳۷۶۱
۴۴	۹۳۵۱۵	۳۸۲	۰/۰۰۴۰۸۵
۴۵	۹۳۱۳۳	۴۰۶	۰/۰۰۴۳۵۹
۴۶	۹۲۷۲۷	۴۳۲	۰/۰۰۴۶۵۹
۴۷	۹۲۲۹۵	۴۶۲	۰/۰۰۵۰۰۶
۴۸	۹۱۸۳۳	۵۰۱	۰/۰۰۵۴۵۶
۴۹	۹۱۳۳۲	۵۵۴	۰/۰۰۶۰۶۶
۵۰	۹۰۷۷۸	۶۰۷	۰/۰۰۶۶۸۷
۵۱	۹۰۱۷۱	۶۶۰	۰/۰۰۷۳۱۹
۵۲	۸۹۵۱۱	۷۲۰	۰/۰۰۸۰۴۴
۵۳	۸۸۷۹۱	۷۸۰	۰/۰۰۸۷۸۵
۵۴	۸۸۰۱۱	۸۴۶	۰/۰۰۹۶۱۲
۵۵	۸۷۱۶۵	۹۲۴	۰/۰۱۰۶۰۱
۵۶	۸۶۲۴۱	۹۸۵	۰/۰۱۱۴۲۱
۵۷	۸۵۲۵۶	۱۰۴۵	۰/۰۱۲۲۵۷
۵۸	۸۴۲۱۱	۱۱۲۸	۰/۰۱۳۳۹۵

سن	تعداد زنده‌ها	تعداد فوت	احتمال فوت
۵۹	۸۳۰۸۳	۱۱۹۹	۰/۰۱۴۴۳۱
۶۰	۸۱۸۸۴	۱۲۸۲	۰/۰۱۵۶۵۶
۶۱	۸۰۶۰۲	۱۳۵۹	۰/۰۱۶۸۶۱
۶۲	۷۹۲۴۳	۱۴۳۶	۰/۰۱۸۱۲۱
۶۳	۷۷۸۰۷	۱۵۱۲	۰/۰۱۹۴۳۳
۶۴	۷۶۲۹۵	۱۵۷۵	۰/۰۲۰۶۴۴
۶۵	۷۴۷۲۰	۱۶۴۵	۰/۰۲۲۰۱۶
۶۶	۷۳۰۷۵	۱۷۰۹	۰/۰۲۳۳۸۷
۶۷	۷۱۳۶۶	۱۸۰۷	۰/۰۲۵۳۳۲
۶۸	۶۹۵۵۹	۱۹۰۴	۰/۰۲۷۳۷۲
۶۹	۶۷۶۵۵	۲۰۰۶	۰/۰۲۹۶۵
۷۰	۶۵۶۴۹	۲۱۰۶	۰/۰۳۲۰۸
۷۱	۶۳۵۴۳	۲۲۵۸	۰/۰۳۵۵۳۵
۷۲	۶۱۲۸۵	۲۳۷۴	۰/۰۳۸۷۳۷
۷۳	۵۸۹۱۱	۲۴۹۵	۰/۰۴۲۳۵۲
۷۴	۵۶۴۱۶	۲۵۹۸	۰/۰۴۶۰۵۱
۷۵	۵۳۸۱۸	۲۷۳۲	۰/۰۵۰۷۶۴
۷۶	۵۱۰۸۶	۲۸۳۵	۰/۰۵۵۴۹۵
۷۷	۴۸۲۵۱	۲۹۶۷	۰/۰۶۱۴۹۱
۷۸	۴۵۲۸۴	۳۰۸۱	۰/۰۶۸۰۳۷
۷۹	۴۲۲۰۳	۳۱۶۲	۰/۰۷۴۹۲۴
۸۰	۳۹۰۴۱	...	...