



A Review of Geometric Shape of Components of Body from the View of Democritus and His Followers

Muhammad Hussein Heshmatpoor*

Received: 10/07/2016

Accepted: 06/10/2017

Abstract

Two views have been proposed about the simplicity and complexity of body in philosophy which is responsible for knowing realities. One is simplicity-based which holds that body is simply froma corporalis (corporeal form) and denies that it is composed of matter and form as well as small components. The other is complexity-based whose proponents are divided into two groups. One group regards body composed of matter and form (i.e. corporeal form) and the other holds that body is composed of small components. The latter has specified a shape for each constituting components of elements and celestial spheres, two of which are discussed in the present paper. It should be noted that there are four simple elements and celestial spheres have a shared shape in the view of the latter. Thus there are totally five shapes for the components of elements and celestial spheres. The paper takes into consideration two shapes (the shapes of components of fire and components of the earth). It takes into consideration and explains how these two shapes, which correspond to sixteenth and seventeenth shapes in Elucid's writing, are formed and presents arguments for its accuracy, having mentioned the hypotheses.

Keywords:

body, Democritus, shape, fire, earth.



بررسی شکل هندسی اجزای جسم از نگاه ذیمقراطیس و پیروانش

محمد حسین حشمت‌پور

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۴/۲۰ | تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۷/۱۴

چکیده

در بارهٔ بساطت و ترکیب جسم، در فلسفه - که عهده‌دار شناخت واقعیات است - دو قول مطرح شده یکی قول به بساطت که جسم را تنها صورت جسمیه می‌داند و ترکیب آن از ماده و صورت و نیز ترکیب از اجزاء صغار را منکر می‌شود. و دیگر قول به ترکیب که صاحبان این قول به دو دسته تقسیم می‌شوند: یکی آنان که جسم را از ماده و صورت (یعنی صورت جسمیه) مرکب می‌دانند. و دیگر کسانی که به ترکیب آن از اجزاء صغار معتقدند. گروه اخیر برای هر کدام از اجزاء سازندهٔ عناصر و نیز برای هر کدام از اجزاء سازندهٔ افلاک شکلی را تعیین کرده‌اند که این مقاله دو شکل از آن‌ها را بحث کرده است. توضیح این که عناصر بسیط چهارتا هستند و افلاک در نظر آنان شکل مشترک دارد، پس شکل‌هایی که برای اجزاء عناصر و افلاک وجود دارند مجموعاً پنج شکل اند. در این مقاله به تبیین دو شکل (شکل اجزاء نار و شکل اجزاء ارض) عنایت شده است. در بیان هر یک از این دو شکل - که در تحریر اقلیدس شکل شانزدهم و هفدهم مقاله سیزدهم واقع شده‌اند - به نحوهٔ ساخت شکل توجه شده و پس از ذکر مفروضات مسئله، طریقهٔ ساخت بیان شده و آنگاه بر صحت طریقهٔ ساخت، دلیل اقامه شده است.

کلیدواژه‌ها

جسم، ذیمقراطیس، شکل، آتش، زمین.

مقدمه

فلاسفه و حکمای پیش از سقراط در جهان‌شناسی تلاش بسیار کرده‌اند و درصدد کشف حقیقت اشیاء بوده‌اند در این راستا فلاسفه طبیعی در تعیین اجزاء اولیه عالم یا ماده‌المواد اختلاف داشته‌اند. نظر طالس به آب بود، آنکسیمنس به هوا و هراکلیتوس به آتش (کاپلستون، ۱۳۶۸، ص ۲۸). ابن سینا این اقوال را در فصل اول و دوم فن سوم طبیعیات شفا آورده است (ابن سینا، ۱۴۰۴، ص ۳-۷۷). قول مشهور آنست که اجزاء اولیه طبیعت پنج چیز است. اجزاء ناری، خاکی، هوایی، مایی و فلکی. گروهی از حکمای قدیم در تعیین شکل هریک از این پنج چیز نظریه‌ای دادند که این مقاله درصدد تبیین نظریه‌های مربوط به اجزاء ناری و خاکی بر اساس تحریر اقلیدس است.

۱. شکل اجزاء نار (شکل شانزدهم از مقاله سیزدهم)

در تحریر اقلیدس شکل شانزدهم از مقاله سیزدهم به شکل اجزاء نار توجه دارد (طوسی، ۱۲۹۸، ص ۱۹۱). این شکل - که در آن، یک خواسته و یک مدعا مطرح است - بیانش این است:
مفروض: کره‌ای داریم با قطری به اندازه «ا ب»^۱ و با مرکزی به نام «ر» که به کمک شکل ۱ مقاله ۱۳ می‌توان تعیین کرد.

خواسته: می‌خواهیم در داخل این کره مخروط مضلعی (هرمی) بسازیم که چهار سطح (قاعدہ) داشته باشد و همه سطح‌های آن مثلث متساوی‌الاضلاع باشند.
مدعا: مربع قطر چنین کره‌ای یک برابر و نیم مربع ضلع چنین هرمی است. به عبارت دیگر، مربع ضلع چنین هرمی دو ثلث مربع قطر چنین کره‌ای است. (ا ب قطر کره م ل ضلع هرم) (مربع قطر کره = یک و یک دوم ضلع هرم)، (مربع ا ب مساوی است با یک و یک دوم مربع م ل) روش ساخت: ۱. خط «ا ب» را - که قطر کره به اندازه آن انتخاب می‌شود، ولی خودش قطر کره نیست^۲ - به کمک ش ۱۲ م ۶ بر نقطه «ح» تثلیث می‌کنیم، یعنی بر دو قسم «ا ح» و «ح ا»

۱. قطر کره را در نیم دایره پایین نشان داده‌ایم.

۲. بنابراین، قول خواجه «و لیکن قطر الكرة ا ب» را باید به معنای «ولیکن قطر الكرة مثل ا ب» قرار داد

۲- ش = شکل م = مقاله از کتاب تحریر اصول اقلیدس

که یکی ثلث خط و دیگری دو ثلث است تقسیم می‌کنیم («ب حـ») ثلث «اب» و «حـا» دو ثلث آن است).

۲. بر این خط «اب» اولاً نیم‌دایره «ادب» را رسم می‌کنیم و ثانیاً - به کمک ش ۱۱ م ۱ - عمود «حد» را وارد می‌کنیم (این عمود از نقطه «حـا»^۱ اخراج می‌شود و در نقطه «د») نیم‌دایره را قطع می‌کند. واضح است که پای این عمود نقطه «حـا» روی خط «اب» است. ش شماره ۲

۳. از نقطه «ا») به نقطه «د») وصل می‌کنیم تا خط «اد») به‌وجود آید. (ش شماره ۲).

۴. دایره‌ای رسم می‌کنیم که مرکزش نقطه «ر») و نصف قطرش به اندازه «دح») باشد.

۵. در این دایره رسم شده مثلث متساوی‌الاضلاع «کل م») را محاط می‌کنیم.

۶. از مرکز این دایره - به ش ۱۲ م ۱۱ - عمودی را که از یک طرف به سمت سمک^۲ (نقطه «ه»)) و از طرف دیگر به سمت مقابل سمک (یعنی زیر دایره و نقطه «ح»)) امتداد دارد بر سطح دایره وارد می‌کنیم (معلوم است که پای این عمود از هر دو طرف نقطه مرکز و به عبارت دیگر، سطح دایره است. بنابراین این خطوطی که در سطح دایره‌اند و با این عمود برخورد می‌کنند زاویه قائمه می‌سازند، یعنی زوایای «هر ک») و «هر م») و «هر ل») و «ح ر ک») و «ح ر م») و «ح ر ل») - که سه تای اول آن‌ها با قطعه‌ای از عمود که به سمت سمک رفته و سه تای بعدی با قطعه‌ای که به سمت مقابل رفته ساخته شده‌اند - همگی قائمه هستند).

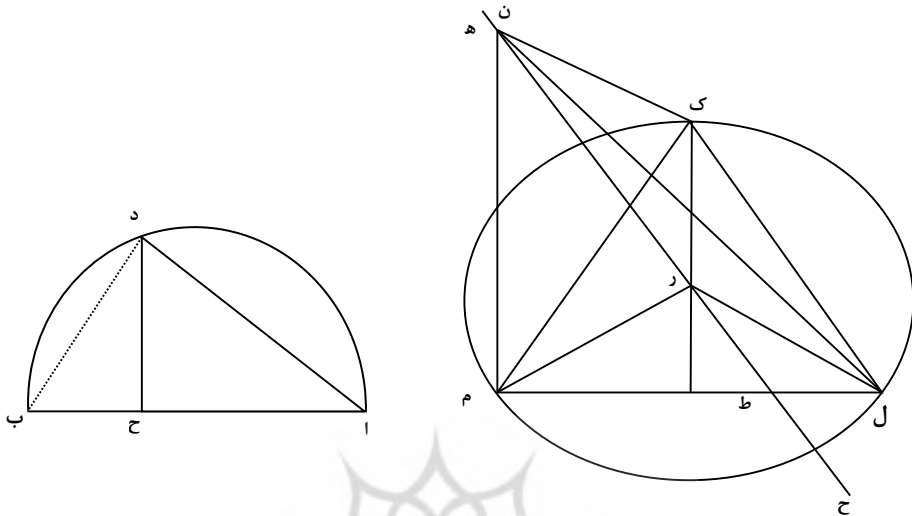
۷. به کمک ش ۳ م ۱ بر روی این عمود، در قسمت «ره»)، قطعه «رن») را به اندازه «حـا») تعیین و مشخص می‌کنیم.

۸. از نقطه «ن») که در سمک است به سه رأس مثلث یعنی سه نقطه «ک») و «ل») و «م») وصل می‌کنیم تا سه خط «کن») و «لن») و «من») به‌وجود آیند. با انجام این اعمال مخروط «کل م ن») - که یکی از سطوحش (و به قول خواجه: قواعدش) یعنی مثلث «کل م») در سطح دایره و سه سطح دیگرش یعنی سه مثلث «کل ن») و «ل م ن») و «م ک ن») در سمک‌اند - به‌وجود می‌آید که همان مخروط مطلوب ماست، یعنی مخروطی است که اگر دایره را به کره

۱. در ریاضیات قدیم ح را به شکل حـ می‌نوشتند

۲. ضخامت جسم اگر به سمت پایین ملاحظه شود، «عمق» و اگر به سمت بالا لحاظ شود «سمک» (ارتفاع) می‌نامند، مانند عمق چاه و سمک منار.

تبدیل کنیم محاط این کره می شود.



شکل شماره ۲

شکل شماره ۱

دلیل بر صحت روش، یعنی موصل بودنش به مطلوب بودنش: در این دلیل اولاً ثابت می شود که تمام اضلاع این مخروط - یعنی سه ضلعی که در سطح دایره اند و سه ضلعی که در سمک اند - همگی با «ا د» و در نتیجه خودشان با هم مساوی اند و ثانیاً ثابت می شود که این چنین مخروطی در کره مفروض واقع می شود:

۱. ثابت می کنیم که سه ضلعی که در سطح دایره اند، یعنی «ک ل» و «ل م» و «م ک» همگی با «ا د» مساوی اند. نقطه «ب» را به نقطه «د» وصل می کنیم تا خط «ب د» به وجود آید (قبل از این خط، در نیم دایره «ا د ب» تنها مثلث «ا د ح» را داشتیم و با رسم این خط دو مثلث دیگر درست شد، یکی مثلث «ب د ح» و دیگری مثلث «ا د ب»، مثلث «ا د ب» را می توان کل نامید و دو مثلث دیگر را جزء خواند) با رسم این خط زاویه «ا د ب» به وجود می آید که به خاطر واقع شدنش در نیم دایره به مدعای اولش ۳۰ م ۱۳ زاویه قائمه است پس مثلث «ا د ب» می شود یک مثلث قائم الزاویه که از زاویه قائمه اش خط «د ح» خارج شده و بر وترش فرود آمده این

۱. کل زاویه فی قطعة فهی قائمه ان كانت القطعة نصف دائرة...

خط، مثلث «ا د ب» را به دو مثلث «ا د ح» و «ب د ح» تقسیم کرده که به ش ۸ م ۱۶ هم خودشان متشابه‌اند و هم با مثلث «ا د ب» تشابه دارند. پس سه مثلث که هر سه متشابه‌اند در این نیم‌دایره وجود دارند و ما دو مثلث «ا د ب» و «ب د ح» را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم و با توجه به دو زاویه «د ا ب» (در مثلث بزرگ) و «ب د ح» (در مثلث کوچک) تناسب اضلاع را این چنین بیان می‌کنیم: نسبت «ا د» (از مثلث بزرگ) به «د ح» (از مثلث کوچک) برابر است با نسبت «ا ب» (وتر مثلث بزرگ) به «ب د» (وتر مثلث کوچک) یعنی داریم $\frac{اد}{دح} = \frac{اب}{بد}$ و چون در فرض تساوی دو مقدار اگر هر یک را در خودش ضرب کنیم تساوی محفوظ می‌ماند یعنی بین حاصل ضرب‌ها نیز تساوی برقرار است پس داریم $\frac{اد}{دح} \times \frac{اد}{دح} = \frac{اب}{بد} \times \frac{اب}{بد}$ و چون در مثلث «ا د ب» از زاویه قائمه عمود «د ح» بر وتر وارد شده به استبانة^۲ دوم ش ۸ م ۶ - که می‌گوید در چنین مثلثی هر کدام از دو ضلع زاویه قائمه وسط در نسبت است بین خود وتر و قسمتی از وتر که مجاور این ضلع است - مراجعه می‌کنیم و رابطه مستفاد از آن را که $\frac{ب د}{ب ح} = \frac{ب د}{ب ح}$ است، می‌نویسیم به هفتمین مصادره مقاله ۵ - که می‌گوید: اگر تناسبی با سه مقدار داشته باشیم نسبت اولی به آخری یعنی سومی برابر است با مربع نسبت اولی به دومی - مراجعه می‌کنیم و این رابطه اخیر را به این صورت می‌نویسیم $\frac{اد}{ب ح} = \frac{اد}{ب د} \times \frac{اد}{ب د}$ طرف دوم این رابطه با طرف دوم رابطه‌ای که قبلاً داشتیم یعنی با طرف دوم $(\frac{اد}{دح} \times \frac{اد}{دح} = \frac{اب}{ب د} \times \frac{اب}{ب د})$ مساوی است از این رو، با استفاده از شکل ۱۱ م ۳۵ طرف‌های اول را مساوی قرار می‌دهیم یعنی - همان‌طور که خواجه فرموده - می‌نویسیم $\frac{اد}{ب ح} = \frac{اد}{ب د} \times \frac{اد}{دح}$ و می‌گوییم به ش ۱۹ م ۶ - که نسبت سطحی به سطح دیگر را مساوی با مربع نسبت ضلعی از سطح اول به ضلع نظیرش از سطح دوم قرار می‌دهد - داریم $\frac{اد}{ب ح} = \frac{اد}{ب د} \times \frac{اد}{دح}$ مربع اد

۱. «اذا خرج عمود من زاوية قائمة في مثلث علی وترها قسم المثلث بمثلثین متشابهین ومشابهین للمثلث الاعظم».

۲. گاهی بعد از تبیین شکل و استدلال بر حکمی که در آن مطرح شده قانونی از آن حکم استخراج و استنباط می‌شود. این قانون را که بیانش با کلمه «قیدان» شروع می‌شود، استبانة آن شکل می‌نامند.

۳. «النسب المتساوية لنسبة واحدة متساوية».

این رابطه را با رابطه قبل ملاحظه می‌کنیم، می‌بینیم که طرف‌های دو مثلث یکی هستند به ش ۱۱ م ۱۵ حکم می‌کنیم که طرف‌های اولشان مساوی‌اند، یعنی داریم $\frac{\text{مربع اد}}{\text{مربع دح}} = \frac{\text{اب}}{\text{ب ح}}$ قبلاً گفتیم «ا ب ر» بر نقطه ح تثلیث می‌کنیم» پس «ا ب» به عمل سه برابر «ب ح» است.

بنابراین در رابطه اخیر می‌گوییم: به عمل، صورت نسبت اول، یعنی «ا ب» سه برابر مخرجش یعنی «ب ح» است، پس به مقتضای تساوی دو طرف باید صورت نسبت دوم نیز سه برابر مخرجش باشد؛ یعنی مربع «ا د» سه برابر مربع «د ح» است و قبلاً (در ذیل بیان روش در شماره (۴) گفتیم که «ک ر» را که نصف قطر دایره است به اندازه «د ح» قرار می‌دهیم، پس «ک ر» مساوی «د ح» است. بنابراین، گفته قبل یعنی «مربع ا د سه برابر مربع د ح است» را به این صورت درمی‌آوریم «مربع ا د سه برابر مربع ک ر است» و می‌گوییم به ش ۱۱ همین مقاله ۲۱۳ مربع «ک ل» (یعنی مربع ضلعی از اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع مورد بحث) نیز سه برابر مربع نصف قطر دایره یعنی سه برابر «ک ر» است؛ چون هم مربع «ا د» سه برابر مربع «ک ر» است و هم مربع «ک ل» سه برابر مربع «ک ر» است، کشف می‌کنیم که مربع «ک ل» با مربع «ا د» و در نتیجه خود «ک ل» با خود «ا د» مساوی است.

تا اینجا ثابت شد که ضلع «ک ل» از اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع مورد بحث با «ا د» مساوی است. حال، می‌گوییم چون به فرض، مثلث متساوی‌الاضلاع است پس دو ضلع دیگرش - یعنی «ل م» و «م ک» - نیز هر کدام مساوی «ا د» هستند. نتیجه این شد که سه ضلعی از مخروط ساخته شده که در سطح دایره‌اند هر کدامشان با «ا د» مساوی‌اند.

۲. ثابت می‌کنیم که سه ضلعی که در سمک‌اند - یعنی «ک ن» و «ل ن» و «م ن» - نیز هرکدامشان با «ا د» مساوی هستند در دو مثلث «ک ر ن» و «د ح ا» (که اولی یک ضلعش - یعنی ضلع «ک ر» - در سطح دایره و دو ضلع دیگرش در سمک است و دومی در نیمه دایره «ا د ب» است) چون به عمل، خط «ر ن» و نیز خط «د ح» عمودند زاویه «ک ر ن» (در اولی) و زاویه «د ح ا» (در دومی) قائمه هستند و دو ضلع محیط به این زاویه نظیر به نظیر مساوی‌اند (یعنی ضلع «ک ر» از مثلث اول با ضلع «د ح» از مثلث دوم برابرند. چنان‌که در بیان روش در

۱. «النسب المتساوية لنسبة واحدة متساوية».

۲. «إذا احاطت دائرة بمثلث متساوی الاضلاع فمربع ضلعه ثلاثة أمثال مربع نصف قطرها».

شماره ۴ بیان شد و ضلع «ن ر» از مثلث اول با ضلع «ح ا» از مثلث دوم برابرند، همان‌گونه که در بیان روش در شماره ۷ بیان شد). پس دو مثلث مذکور در دو ضلع و زاویه بین مساوی‌اند و بنابراین به ش ۴ م ۱ مساوی‌اند.

از مساوات این دو مثلث به دست می‌آوریم که ضلع‌های سومشان نیز مساوی‌اند، یعنی «ک ن» با «ا د» مساوی است. به همین بیان هم «ل ن» در مثلث قائم‌الزاویه «ل ر ن» و «ا د» در مثلث قائم‌الزاویه «ا د ح» مساوی‌اند و هم «م ن» در مثلث قائم‌الزاویه «م ر ن» و «ا د» در مثلث قائم‌الزاویه «ا د ح» مساوی هستند (در مثلث «ل ر ن» ضلع «ل ر» با «د ح» و ضلع «ر ن» با «ح ا» مساوی است و با توجه به مساوات زاویه بین که قائمه است، مساوات مثلث و به دنبال آن مساوات «م ن» با «ا د» نتیجه گرفته می‌شود). از آن‌چه در شماره (۱) آمد معلوم شد که سه ضلع از اضلاع مخروط که در سطح دایره‌اند با «ا د» مساوی‌اند و از آن‌چه در شماره (۲) آمد معلوم شد که سه ضلع دیگر از اضلاع مخروط که در سمک هستند با «ا د» مساوی هستند (توجه کنید «ر ن» از اضلاع مخروط نیست، بلکه سهم مخروط است که ضلع مشترک هر یک از سه مثلث «ک ر ن» و «ل ر ن» و «م ر ن» قرار داده شد) پس هر شش ضلع موجود در مخروط مورد بحث با «ا د» مساوی‌اند. بنابر این، هر شش تا باهم مساوی‌اند و در نتیجه هر چهار مثلث سازنده مخروط مورد بحث - یعنی مثلث‌های «ک ل م» که در سطح دایره است و «ک ل ن» و «ل م ن» و «م ک ن» که در سمک‌اند - همگی متساوی‌الاضلاع هستند.

۳. (بعد از اثبات متساوی‌الاضلاع بودن مثلث‌ها ثابت می‌کنیم که مخروط ساخته شده از آن‌ها، در کره مفروضه واقع شده) قبلاً گفتیم: عمود «ن ر» را از طرف مقابل سمک ادامه می‌دهیم تا به زیر دایره نفوذ کند و خط «ر ح» را پدید آورد و اینک می‌گوییم: روی این خط «ر ح» خط «ر ط» را به اندازه «ح ب» معین و مشخص می‌کنیم. توجه کنید! «ن ر» را به اندازه «ح ا» انتخاب کردیم و الآن «ر ط» را به اندازه «ح ب» انتخاب می‌کنیم. حال اگر «ن ر» را با «ر ط» جمع کنیم تا خط «ن ط» به دست آید این مجموع با مجموع «ح ا» و «ح ب» که «ا ب» است مساوی است و چون «ا ب» به اندازه قطر کره فرض شد، پس «ن ط» مساوی قطر

۱. «اذا ساوی ضلعان وزاویة بینهما من مثلث ضلعین وزاویة بینهما من مثلث آخر کل لظیره یساوی الضلعان والزوايا الباقية والمثلثان کل لظیره».

کره است. بعد از حصول خط «ن ط» یعنی قطر کره نیم‌دایره‌ای بر آن می‌سازیم، یعنی خط «ن ط» را نصف می‌کنیم و نقطه نصف را مرکز قرار می‌دهیم و با این مرکز نیم‌دایره‌ای بر خط «ن ط» که قرار است قطر کره باشد می‌سازیم (همان‌طور که «ن ط» به اندازه «ا ب» است.

همچنین نیم‌دایره‌ای که روی «ن ط» ساخته می‌شود، به اندازه نیم‌دایره‌ای است که روی خط «ا ب» رسم شده و نیز همان‌طور که خط «ا ب» تثلیث شده به طوری که «ح ا» دو ثلث آن و «ب ح» ثلث آن است همچنین «ن ط» تثلیث می‌شود به طوری که «ن ر» دو ثلث «و «ر ط» ثلث آن باشد) این نیم‌دایره ساخته شده را - با محور قرارداد خط «ن ط» - یک دور کامل می‌چرخانیم تا به وضعی که قبلاً داشته برگردد با این چرخاندن، کره‌ای که قطرش به اندازه «ا ب» است، یعنی قطرش خط «ن ط» است پدید می‌آید. این کره بر دو نقطه «ن» و «ط» عبور می‌کند (زیرا نیم‌دایره‌ای که روی خط «ن ط» ساختیم یک طرفش بر «ن» و طرف دیگرش بر «ط» بود و واضح است که با چرخیدن، بر دو نقطه «ن» و «ط» عبور می‌کند) اگر ما ثابت کنیم که بر سه نقطه «ک» و «ل» و «م» - که رأس‌های مثلث «ک ل م» هستند نیز عبور می‌کند، ثابت می‌شود که مخروط مورد بحث در درون کره مفروضه واقع شده و ما این را (یعنی عبور کره از سه نقطه «ک» و «ل» و «م») را ثابت می‌کنیم به این بیان: دو خط «ن ر» و «ر ط» به هم متصل‌اند و بر فصل مشترک این دو که نقطه «ر» است عمود «ر ک» وارد شده (عمود «ر ل» و همچنین عمود «ر م» نیز وارد شده‌اند، ولی ما دربارهٔ عمود «ر ک» به تنهایی بحث می‌کنیم شما این بحث را دربارهٔ این دو عمود دیگر نیز اجراء کنید) این عمود - همان‌طور که قبلاً گذشت - مثل «ح د» است.

بنابراین همان‌طور که «ح د» وسط در نسبت است بین دو خط «ا ح» و «ح ب» همچنین «ر ک» نیز وسط در نسبت است بین دو خط «ن ر» و «ر ط» و در استبانه ش ۹ م ۶ آمد که اگر بر چنین دو خطی که بر فصل مشترکشان چنین عمودی وارد شده نیم‌دایره‌ای رسم شود، این نیم‌دایره برطرف عمود عبور می‌کند. پس در مورد بحث ما نیز نیم‌دایره رسم شده برطرف عمود که نقطه «ک» است عبور می‌کند (به همین بیان ثابت می‌کنیم که به طرف دو عمود «ر ل» و «ر م» یعنی به دو نقطه «ل» و «م» نیز عبور می‌کند).

معلوم شد که کره از هر چهار نقطه مخروط مورد بحث عبور می‌کند، یعنی معلوم شد که مخروط مورد بحث در درون کره مفروضه واقع شده و قبلاً معلوم شد که همه اضلاعش مساوی‌اند

و در نتیجه چهار مثلث سازنده آن متساوی‌الاضلاع هستند. از این دو مطلب ثابت شده معلوم می‌شود که روش مذکور روش صحیحی بوده و مطلوب ما را حاصل کرده است.

دلیل بر صحت مدعا، یعنی این که مربع قطر چنین کره‌ای یک برابر و نیم مربع ضلع چنین مخروطی است. به عبارت دیگر، یعنی این که مربع ضلع چنین مخروطی دو ثلث مربع قطر چنین کره‌ای است: در مثلث «ا د ب» که قائم‌الزاویه است از زاویه قائمه «ا د ب» بر وتر «ا ب» عمود «د ح» وارد شده. به دومین استبان ش ۸ م ۶ هر کدام از دو ضلع زاویه قائمه چنین مثلی وسط در نسبت است بین وتر و قطعه‌ای از وتر که مجاور این ضلع هست. بنابراین در مورد بحث داریم $\frac{اب}{اد} = \frac{اد}{اح}$. به هفتمین مصادره مقاله ۵ - که می‌گوید در چنین تناسبی نسبت اولی به آخری مانند

مربع نسبت اولی به دومی است - رابطه مذکور به این صورت درمی‌آید $\frac{اب}{اد} = \frac{اب}{اد} \times \frac{اب}{اح}$. به ش ۱۹

م ۶ داریم $\frac{اب}{اد} = \frac{اب}{اد} \times \frac{اب}{اد}$ این رابطه را با رابطه قبلیش ملاحظه می‌کنیم و می‌گوییم طرف‌های دوم

این دو رابطه یکی هستند. پس به ش ۱۱ م ۵ طرف‌های اولشان مساوی‌اند یعنی داریم $\frac{اب}{مربع\ ad} = \frac{اب}{مربع\ ad}$

و به عمل دانستیم که «ا ح» دو ثلث «ا ب» است یعنی در این رابطه اخیر منخرج نسبت دوم دو ثلث صورتش است پس به مقتضای تساوی دو طرف باید منخرج نسبت اول نیز دو ثلث صورتش باشد یعنی باید مربع «ا د» دو ثلث مربع «ا ب» باشد، ولی «ا د» ضلع مخروط مورد بحث و «ا ب» قطر کره مورد بحث است. پس باید مربع ضلع مخروط مورد بحث دو ثلث مربع قطر کره مورد بحث باشد و به عبارت دیگر: باید مربع قطر کره مورد بحث یک برابر و نیم مربع ضلع مخروط مورد بحث باشد و هوالمطلوب.

خواجه در پایان شکل در ذیل «اقول» می‌فرماید «این شکل منسوب الی النار است» (طوسی، ۱۲۹۸، ص ۱۹۱)، یعنی گفته می‌شود که «شکل نار این است». توضیح: بعضی از قدما همچون ذیمقراطیس، معتقد بودند که اجسام بسیط عنصری یعنی نار و ارض و هوا و ماء و همچنین اجرام فلکی از اجزاء صلب و صغار که تقسیم فکّی نمی‌پذیرند (اگرچه قابل تقسیم وهمی هستند) تشکیل شده‌اند. این گروه شکل هر جزء نار را مخروط تشکیل شده از چهار مثلث متساوی‌الاضلاعی که محاط کره هست قرار می‌دادند و می‌گفتند هر جزئی از اجزاء نار به این شکل هستند.

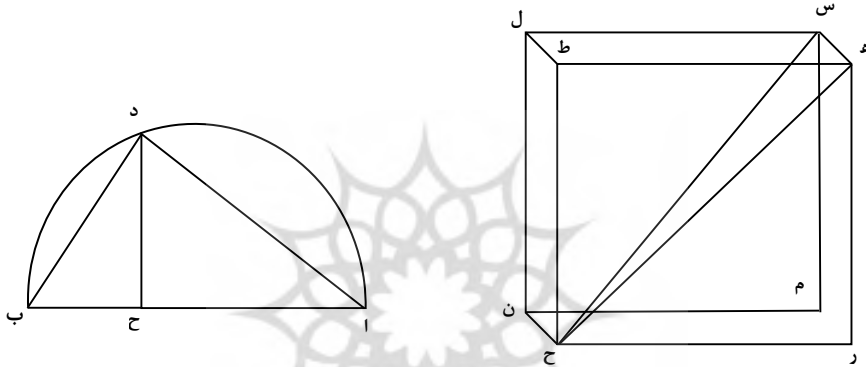
۲. شکل اجزاء خاکی (شکل هفدهم از مقاله سیزدهم)

خواجه نصیر طوسی در این شکل که شکل هفدهم از مقاله سیزدهم را می‌سازد، اجزای خاکی را ترسیم می‌کند:

مفروض: کره‌ای داریم با قطری به اندازه «ا ب».

خواسته: می‌خواهیم در این کره مکعبی بسازیم.

مدعا: مربع قطر چنین کره‌ای (که قطر مکعب نیز هست) سه برابر مربع چنین مکعبی است.



شکل شماره ۴

شکل شماره ۳

روش ساخت: ۱. خط «ا ب» را که به اندازه قطر کره است، به ش ۱۲ م ۶ بر نقطه «ح» تثلیث می‌کنیم یعنی آن را به دو ثلث و یک ثلث تقسیم می‌کنیم («ا ح» دو ثلث آن و «ح ب» ثلث دیگرش).

۲. بر این خط «ا ب» اولاً نیم‌دایره «ا د ب» را رسم می‌کنیم. و ثانیاً به کمک ش ۱۱ م ۱ عمود «ح د» را وارد می‌کنیم (عمودی که از نقطه «ح» - که پای عمود است - اخراج می‌شود و در نقطه «د» نیم‌دایره را قطع می‌کند).

۳. از نقطه «ب» به نقطه «د» وصل می‌کنیم تا خط «ب د» به‌وجود آید.

۴. به کمک ش ۲ م ۱ خط «ه ر» را به اندازه خط «ب د» ایجاد می‌کنیم.

۵. بر این خط ایجاد شده یعنی خط «ه ر» به کمک ش ۴۶ م ۱ مربع «ه ر ح ط» را می‌سازیم و بعد از ساختن این مربع، مکعب «ر ل»^۱ را به‌وجود می‌آوریم (به این نحو که به ش ۱۲ م ۱۱ خط «ر م» را که به اندازه «ر ه» است بر «ر ه» عمود می‌کنیم و با تکمیل آن، مربع «ر ه س م» را

۱. مکعب را به اسم دو سرش که مقابل همدیگرنند، می‌خوانیم.

به وجود می‌آوریم و همین‌طور ادامه می‌دهیم تا مربع‌های دیگر ساخته شوند و مکعب حاصل شود. قاعده این مکعب را مربع «ر ه ط ح» و ارتفاعش را خط «س ه» قرار می‌دهیم. این مکعب به دست آمده همان مکعب مطلوب ماست.

دلیل بر صحت مدعا، یعنی این که مربع قطر چنین کره‌ای سه برابر مربع ضلع چنین مکعبی است (مربع ا ب مساوی است با سه برابر مربع ه ر است):

اولاً: شکل را آماده استدلال می‌کنیم یعنی: ۱. خط «ه ح» را رسم می‌کنیم. این خط قطر مربع «ر ط»^۱ یعنی قطر قاعده مکعب است. ۲. خط «س ح» را رسم می‌کنیم. این خط - که بعداً مساوی بودنش با «ا ب» یعنی قطر کره ثابت می‌شود - قطر مکعب است.

ثانیاً: استدلال می‌کنیم:

۱. (ثابت می‌کنیم که قطر مکعب یعنی «س ح» سه برابر ضلع مکعب یعنی «ه ر» است) مثلث «س ح ه» را که از «س ح» (قطر مکعب) و «ه ح» (قطر قاعده مکعب) و «س ه» (ضلعی از اضلاع مکعب که ما ارتفاع مکعب قرارش دادیم) تشکیل شده و زاویه «س ه ح» در آن قائمه است مورد توجه قرار می‌دهیم و درباره آن به ش ۴۷ م ۱ (شکل عروس) می‌نویسیم (مربع ه ح + مربع س ه = مربع س ح). همچنین مثلث «ه ح ر» را که زاویه «ح ه ر» در آن قائمه است ملاحظه می‌کنیم و درباره آن نیز به ش ۴۷ م ۱ می‌نویسیم (مربع ر ح + مربع ه ر = مربع ه ح) در رابطه اول به جای «مربع ه ح» مساوی‌اش را که در رابطه دوم تعیین شده قرار می‌دهیم می‌شود (مربع ر ح + مربع ه ر + مربع س ه = مربع س ح) یعنی مربع «س ح» که قطر مکعب است برابر است با مربع سه ضلع یعنی ضلع «س ه» و ضلع «ه ر» و ضلع «ر ح». و چون این سه ضلع سه ضلع مکعب‌اند یعنی با هم مساوی‌اند به جای این که بگوییم مربع «س ح» برابر است با مربع سه ضلع می‌گوییم مربع «س ح» یعنی مربع قطر مکعب سه برابر مربع «ه ر» است، یعنی سه برابر ضلع مکعب است و چون به عمل، ضلع «ه ر» که ضلع مکعب است به اندازه «ب د» انتخاب شد می‌گوییم مربع «س ح» سه برابر مربع «ب د» است.

تا اینجا ثابت شد که مربع قطر مکعب سه برابر مربع ضلع مکعب است، ولی مدعای ما این بود که مربع قطر کره‌ای که مکعب در آن است سه برابر مربع ضلع مکعب است. پس باید ثابت کنیم

۱. مربع را به اسم دو سرش که مقابل یک‌دیگرند، می‌خوانیم.

که قطر مکعب با قطر کره مذکور مساوی است.

۲. ثابت می‌کنیم که قطر مکعب یعنی «س ح» و قطر کره یعنی «ا ب» با هم مساوی‌اند (ضلع «ا د» را رسم می‌کنیم. با این کار در نیم‌دایره «ا د ب» مثلث «ا د ب» وجود می‌گیرد که در آن، زاویه «ا د ب» به مدعای اول ش ۳۰ م ۱۳ زاویه قائمه است و از آن، عمود «د ح» بر وتر یعنی «ا ب» وارد شده پس به دومین استبانه ش ۸ م ۶ (که می‌گویید: در چنین مثلثی هر کدام از دو ضلع زاویه قائمه وسط در نسبت است بین خود وتر و قسمی از وتر که مجاور این ضلع است) درباره این

مثلث این تناسب صدق می‌کند $\frac{ب د}{ب ح} = \frac{ا ب}{ب د}$ به هفتمین مصادره مقاله ۵ - که می‌گویید: اگر تناسبی با سه مقدار داشته باشیم نسبت اولی به آخری یعنی سومی برابر است با مربع نسبت اولی به دومی -

مراجعه می‌کنیم و این رابطه مذکور را به این صورت می‌نویسیم $\frac{ا ب}{ب د} \times \frac{ا ب}{ب د} = \frac{ا ب}{ب ح}$. به ش ۱۹ م ۶ - که نسبت سطحی به سطح دیگر را مساوی با مربع نسبت ضلعی از سطح اول به ضلع نظیرش از سطح دوم قرار می‌دهد - نظر می‌کنیم و در مورد بحثمان این رابطه را می‌نویسیم

$\frac{ا ب}{ب د} \times \frac{ا ب}{ب د} = \frac{ا ب}{ب ح}$. این رابطه اخیر را با رابطه قبل ملاحظه می‌کنیم، می‌بینیم که طرف‌های دویشان یکی است به ش ۱۱ م ۵ حکم می‌کنیم که طرف‌های اولشان مساوی‌اند یعنی - همان‌طور

که خواهی می‌گوید (طوسی، ۱۲۹۸، ص ۱۹۱) - داریم $\frac{ا ب}{ب ح} = \frac{ا ب}{ب د}$ به عمل - یعنی به تثلیثی که درباره خط «ا ب» اعمال شد - «ا ب» سه برابر «ا ب ح» است، یعنی در این رابطه اخیر صورت نسبت اول سه برابر مخرجش است پس به مقتضای تساوی دو طرف باید صورت نسبت دوم نیز سه برابر مخرجش باشد. یعنی مربع «ا ب» سه برابر مربع «ب د» است.

۳. در آخر شماره (۱) ثابت کردیم که مربع «س ح» سه برابر مربع «ب د» است و در این شماره (۲) ثابت کردیم که مربع «ا ب» سه برابر مربع «ب د» است. اگر این دو مطلب - یعنی مربع «ا ب» سه برابر مربع «ب د» است و مربع «س ح» سه برابر مربع «ب د» است - را کنار هم بگذاریم، نتیجه می‌گیریم که «س ح» یعنی قطر مکعب و «ا ب» یعنی قطر کره با هم مساوی‌اند.

۱. «کل زاویه فی قطعة فهي قائمة ان كانت القطعة نصف دائرة...».

حال که ثابت شد این دو قطر با هم مساوی اند می‌گوییم: در شماره (۱) ثابت شد که مربع قطر مکعب سه برابر مربع ضلع مکعب است. و در شماره (۲) ثابت شد که قطر کره با قطر مکعب مساوی است. نتیجه گرفته می‌شود که قطر کره سه برابر ضلع مربع است. و هو المطلوب.

دلیل بر صحت روش، یعنی موصل به مطلوب بودنش^۱: اولاً: بر خط «س ح» - که قطر مکعب است و گفتیم که مساوی قطر کره است و از این رو، می‌تواند قطر کره نیز قرار داده شود - نیم‌دایره‌ای رسم می‌کنیم (یعنی وسط این خط را مرکز قرار می‌دهیم و با این مرکز و با قطر قرار دادن «س ح») نیم‌دایره رسم می‌کنیم) و آن را می‌چرخانیم تا به جای اول برگردد و کره ساخته شود. و ثانیاً می‌گوییم:

۱. این نیم‌دایره بر نقطه «ه» - که یکی از گوشه‌های مکعب است - عبور می‌کند به این بیان: زاویه «س ه ح» قائمه است. پس به عکس مدعای اول ش ۳۰ م ۳ در نیم‌دایره واقع شده (واضح است که دو ضلعش نیز در نیم‌دایره واقع‌اند). دو ضلع این زاویه قائمه عبارت‌اند از: «س ه» و «ه ح» این دو ضلع در نقطه «ه» به همدیگر متصل شده‌اند، پس نقطه «ه» فصل مشترک آن دو است. اگر از این محل اتصال دو ضلع و به عبارت دیگر: از فصل مشترک آن دو، عمودی بر وتر خارج کنیم این عمود که وتر را به دو قسم تقسیم بکند، می‌تواند در تناسبی که تشکیل می‌شود وسط دو قسم وتر قرار بگیرد^۲. استبانة ش ۹ م ۶ دلالت دارد بر این که نیم‌دایره‌ای که این دو خط متصل به هم یعنی دو ضلعی که زاویه قائمه ساخته‌اند در آن واقع شده‌اند از طرف یعنی سر این عمود - که از فصل مشترک این دو خط خارج شده و در تناسب حاصل شده وسط دو قسمت وتر واقع می‌شود - رد می‌شود. پس در مورد بحث ما نیم‌دایره‌ای که بر قطر «س ح» رسم می‌شود و دو ضلع «س ه» و «ه ح» را دربر می‌گیرد از طرف عمودی که از فصل مشترک این دو ضلع

۱. در شکل قبل هم ثابت کردیم که مثلث‌های سازنده مخروط همگی متساوی‌الاضلاع هستند و هم ثابت کردیم که مخروط در کره مفروضه واقع می‌شود، اما در این شکل، تنها ثابت می‌کنیم که مکعب در کره مفروضه واقع می‌شود. سبب این کار این است که در شکل قبل متساوی‌الاضلاع بودن سه مثلثی که در سمک بودند، مفروض نبود و احتیاج به اثبات داشت و به عبارت دیگر، باید ثابت می‌کردیم که تمام اضلاع مخروط مورد بحث با هم مساوی‌اند، ولی در این شکل چون مکعب مطرح است و تمام اضلاع مکعب با هم مساوی هستند احتیاجی به اثبات تساوی اضلاع نداریم.

۲. در مکعب با قطر قرار دادن «س ح» فرض می‌کنیم که عمودی از فصل مشترک «س ه» و «ه ح» بر وتر یعنی «س ح» خارج شود، ولی در نیم‌دایره «ا د ب» که قطرش «ا ب» است عمود «د ح» از فصل مشترک دو خط متصل به هم یعنی دو خط «ا د» و «ب د» خارج شده و احتیاج به فرض نیست. ما چون بحث را در مکعب اجرا کردیم فرض را مطرح کردیم و گفتیم «اگر از فصل مشترک عمودی بر وتر خارج کنیم...».

اخراج شده یعنی از نقطه «ه» عبور می کند.

۲. این نیم دایره افزون بر نقطه «ه» از نقاط دیگر مکعب، یعنی از گوشه‌های دیگر آن نیز عبور می کند به این بیان: تمام قطرهای مکعب با هم مساوی‌اند و اگر رسم شوند، همدیگر را در یک نقطه که وسطشان است قطع می کنند. پس هر نیم دایره‌ای که روی قطری رسم شود مساوی نیم دایره‌ای است که روی «س ح» رسم شد و حکم همان را دارد، یعنی همان طور که این نیم دایره از طرف عمود داخل خودش عبور کرد. نیم دایره‌های دیگر که در واقع، همین نیم دایره مورد نظر هستند نیز از طرف عمودهای داخل خودشان که گوشه‌های دیگر مکعب هستند می گذرند. به عبارت دیگر، چون اقطار مکعب مساوی‌اند و در نتیجه نصف‌های اقطار نیز مساوی‌اند و بالتبع محل تقاطعشان یکی است پس فاصله تمام نقاط مکعب از مرکز، مساوی است و در نتیجه، اگر نیم دایره رسم شده بر «س ح» از یکی از نقاط مکعب یعنی نقطه «ه» عبور کند از دیگر نقاط مکعب نیز عبور می کند.

۳. در شماره (۱) ثابت شد که نیم دایره رسم شده بر «س ح» از نقطه «ه» عبور می کند و در شماره (۲) ثابت شد که از دیگر نقاط مکعب نیز عبور می کند. نتیجه این می شود که مکعب مورد بحث در کره مفروضه واقع شده و هوالمطلوب.

خواجه در پایان می فرماید: «این مجسم را به ارض نسبت می دهند» (طوسی، ۱۲۹۸، ص ۱۹۱)، یعنی می گویند: این شکل، شکل این عنصر است. به عبارت دیگر، این عنصر شکل این مجسم را دارد. ابن سینا در فن سوم طبیعیات شفا نیز شکل ارضی را این گونه گزارش کرده است (ابن سینا، ۱۴۰۴، ج ۲، ص ۹۱).

خلاصه سخن

از مباحث پیش گفته نتیجه می شود که هر کدام از اجزای آتش در فرض این که اجزای آتش مرکب از اجزا باشد به شکل مخروط مضلعی (هرم) است که ۴ سطح دارد که هر یک از آنها مثلث متساوی الاضلاع است و اگر کره‌ای این هرم را احاطه کند قطر آن کره یک برابر و نیم مربع ضلع این هرم خواهد بود.

$$\text{قطره کره محیط بر هرم} = 1 \frac{1}{2} \text{ مربع ضلع هرم}$$

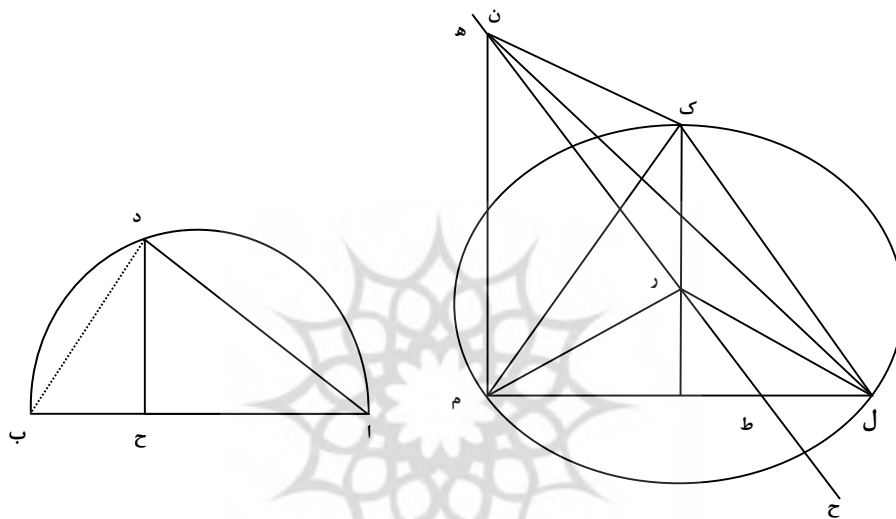
$$ab = \left(l \text{ م} \right)^2 \frac{1}{2}$$

هر یک از اجزای زمین (در فرض این که زمین مرکب از اجزا باشد) به شکل مکعب است اگر کره‌ای این مکعب را احاطه کند قطر آن کره سه برابر مربع ضلع آن مکعب است.

قطره کره محیط بر مکعب = (۳ برابر مربع ضلع مکعب)

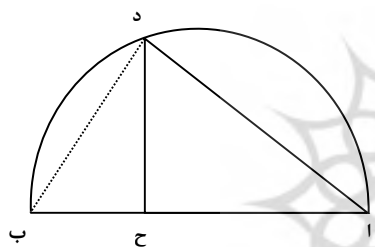
$$اب = 3(ل ن)^2$$

شکل ۱۶ مقاله ۱۳ اصول اقلیدس (طوسی، ۱۲۹۸، ص ۱۹۰).

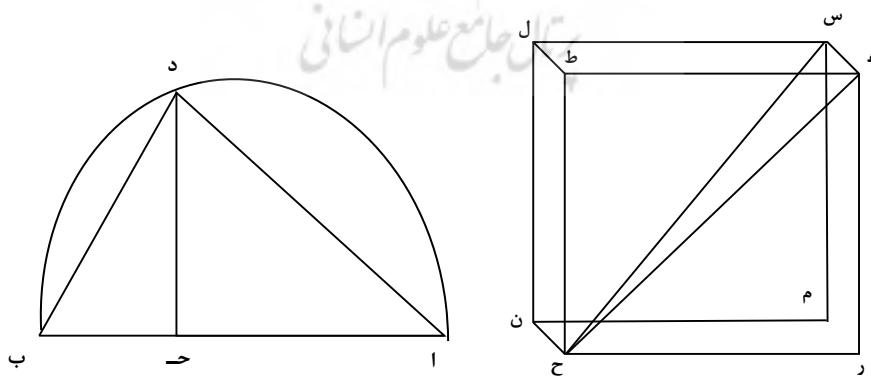


شکل شماره ۱

شکل شماره ۲



شکل ۱۷ مقاله ۱۳ اصول اقلیدس
شکلهای جامع علوم انسانی و مطالعات فرهنگی



شکل شماره ۳

شکل شماره ۴

فهرست منابع

۱. ابن سینا، ابو عبدالله. (۱۴۰۴ق). طبیعیات شفا، مصر.
۲. طوسی، خواجه نصیر. (۱۲۹۸ق). تحریر اصول اقلیدس. چاپ سنگی. بی جا.
۳. کاپلستون، فردریک. (۱۳۶۸). تاریخ فلسفه یونان و روم. ترجمه: جلال الدین مجتبیوی. تهران: انتشارات علمی و فرهنگی.





پروفیسر شگاہ علوم انسانی و مطالعات فرہنگی
پرتال جامع علوم انسانی