

## ناسازگاری پیوسته‌گرایی هندسی و اتم‌گرایی کلام در آرا فخر رازی

بنفشه افتخاری\*

### چکیده

اتم‌گرایی کلام که هم معتزله و هم اشاعره از آن دفاع کرده اند، شامل اتم‌گرایی هندسی نیز می‌گردد. اتم‌گرایی هندسی، اتم‌گرایی است که خطوط و اشکال هندسی را متشکل از تقسیم ناپذیرها می‌داند. به بیانی دیگر، در این نگاه، خط از گرد هم آمدن نقاط بوجود می‌آید. این دیدگاه با تعاریف اولیه کتاب اصول اقلیدس و در نهایت با هندسه کلاسیک ناسازگار می‌باشد. فخر رازی که در دهه‌های آخر عمر خود از اتم‌گرایی دفاع کرده است، از این ناسازگاری آگاه بوده است. او در خلال بحث در برهان‌های مرتبط با اتم‌گرایی، تلاش‌هایی برای رفع این ناسازگاری کرده است. علی‌رغم اینکه تلاش وی در بنیان نهادن هندسه ای سازگار با اتم‌گرایی به ثمر نمی‌نشیند، ولی استدلال‌ات او حاوی نکات ظریف و مهمی است که به لحاظ تاریخ و فلسفه ریاضیات حائز اهمیت است. در این مقاله، چند برهان فخر رازی از کتاب المطالب العالیة بررسی و تحلیل شده و به زبان ریاضیات نوین تبیین می‌گردد. پس‌زمینه نظری این براهین تحلیل می‌شود تا به چارچوبی دست‌یافته که اهمیتشان از نظر تاریخ ریاضیات روشن گردد. در این بین نشان داده می‌شود که چگونه رازی ساختار متفاوتی از هندسه کلاسیک روزگار خود را می‌آزماید. و همچنین پیشنهاد می‌گردد که ادله رازی در تاریخ نظریه بی‌نهایت کوچک‌ها در حد یک امکان در نظر گرفته شود.

**کلیدواژه‌ها:** اتم‌گرایی کلام، اتم‌گرایی هندسی، فخر رازی، جوهر فرد، پیوسته‌گرایی هندسی.

### ۱. مقدمه

بحث اختلاف بین دو دیدگاه درباره خط، و اینکه آیا متشکل از نقاط است یا نه، به یونان باستان باز می‌گردد. فیثاغوریان، از اولین کسانی هستند که از پیدایش خط از نقاط دفاع

---

\* دکترای تاریخ و فلسفه علم، دانشگاه لیون (ژان مولن)، b.eftkhari@gmail.com  
تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۹/۱۸، تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱۲/۱۴

نمودند و همان آنها نیز به وجود مقادیر ناصحیح و گنگ در اشکال هندسی پی بردند. از همان زمان، این دیدگاه دچار چالش‌های جدی بود که چگونه مقادیر ناصحیح و گنگ را نشان دهد. از اینرو این دیدگاه در هندسه یونانی طرد شد. اتم‌گرایانی چون دموکریتوس، با وجودی که به وجود اتم در طبیعت اعتقاد داشتند، ولیکن در هندسه از پیوسته‌گرایی<sup>۱</sup> یا پیوسته بودن کمیات و در نتیجه از عدم تشکیل خط از نقاط دفاع کرده‌اند. (هیث، ۱۳۸۱: ۱۱۶) پیوسته‌گرایی، دیدگاهی است که کمیات یا اندازه پذیرها را تا بی‌نهایت قابل تقسیم شدن بدانند. به طور خاص، در پیوسته‌گرایی هندسی<sup>۲</sup>، نقطه جزئی از خط نیست، بلکه نهایت آن است. نقطه بعدی ندارد که بتواند سازنده خط باشد. اگر چه این دیدگاه، قبل از ارسطو پیروانی داشته، و ریاضیدانانی بدون توجه به اصول و نام آن، در عمل در حل مسائل از آن تبعیت می‌کردند، ولی کسی که آن را در قالب گزاره‌های مشخص صورتبندی کرده است، ارسطو می‌باشد (هیث، ۱۳۸۱: ۱۸۵-۱۸۶). ارسطو در کتاب ششم فیزیک، نقطه و خط و سطح را پیوسته دانسته و استدلال می‌کند که هیچ کمیت پیوسته‌ای (Continuum) نمی‌تواند متشکل از تقسیم ناپذیرها باشد. (Aristotle, Physics, 2005: 138-139 (Bekker: 231b6)). مفاهیمی چون نقطه، خط، سطح، دایره و حجم که ارسطو زیربنای نظری آن را توضیح داده بود، تقریباً به همان شکل در کتاب اصول اقلیدس تحت عنوان تعاریف آورده شده است (Euclid, 1908, Vol/I: 153-154) و پس از آن اصول به عنوان مرجعی کلاسیک برای هندسه رواج یافت.<sup>۳</sup>

با این حال، اتم هندسی همچنان جایگاه خود را در مباحث فلسفه ریاضی حفظ نمود. پس از ارسطو، اپیکوروس و رواقیون همچنان درباره اتم هندسی بحث کرده‌اند. اتم‌گرایان پسا ارسطویی، در پی پاسخ به شبهات ارسطو بودند (Berryman, 2013). این مباحث به دنیای اسلام نیز راه یافت. از همان نخستین روزهایی که مباحث علمی در جهان اسلام پا می‌گرفت، بحث معادل بودن اتم و نقطه مطرح بود.<sup>۴</sup> با همه اختلاف دیدگاه‌ها، تقریباً از قرن سوم هجری به بعد، در متون مربوطه، نقطه و اتم‌ها معادل هم هستند؛ بخش عظیمی از برهان‌های اثبات‌کننده یا ابطال‌کننده اتم، هندسی‌اند. در این مقاله که به طور خاص به کتب فخر رازی می‌پردازیم، اتم و نقطه کاملاً معادل هم فرض شده‌اند و بعضاً عبارت جزء لایتجزی یا جوهر به معنای اتم برای نقاط هم به کار رفته است.<sup>۵</sup>

نکته‌ای که قبل از بررسی آراء فخر رازی نباید از نظر دور داشت این است که حکم دادن درباره آراء فخر رازی که قلمی نقاد و شکاک داشته است، بسیار دشوار است. فخر

رازی، اغلب به تحلیل و بررسی آراء دیگران پرداخته است تا اینکه به صراحت نظر خود را بیان دارد. به علاوه، وی در برهه‌های مختلف در مسائل مختلف تغییر نظر داده است. این مسئله در مورد اتم‌گرایی بسیار به چشم می‌آید؛ به در کتب اولیه‌اش، اتم به وضوح رد شده است، ولیکن در کتبی دیگر از آن دفاع شده است. فخر رازی در سالهای آخر عمر خود بیشتر از اتم دفاع کرده است و این مقاله بر مبنای کتب متأخر او و عمدتاً بر اساس المطالب العالیة است.

## ۲. چگونگی تشکیل خط از اتم‌ها/ نقطه‌ها

اتم‌گرایان برای اثبات نظریه خود به چندین برهان هندسی متوسل می‌شوند. لازم به ذکر است که هر دو دیدگاه رقیب، چه اتم‌گراها و چه پیوسته‌گراها، براینکه نقطه یک تقسیم‌ناپذیر باشد، اجماع داشتند. مسئله اصلی این بود که آیا این نقاط تقسیم‌ناپذیر خط را بوجود می‌آورند یا نه. اتم‌گراها در برهان‌هایشان از مفهوم حرکت استفاده می‌کنند؛ نقطه ای که در حال حرکت است، از جابجایی‌اش خط بوجود می‌آید. این برهان‌ها تقریباً در اغلب کتب فلسفی-کلامی که درباره اتم‌گرایی بحث می‌کند تکرار شده‌اند. فخر رازی نیز در بیشتر کتب خود آنها را تکرار کرده و به تحلیل آنها پرداخته است.<sup>۱</sup> این برهین اگرچه به صورت‌های مختلفی طرح شده است، اما می‌توان آنها را در دو شکل کلی مطرح کرد: یکی برهان کره و صفحه و دیگری برهان دو خط.

### ۱.۲ برهان کره و صفحه

در این برهان کره‌ای بر روی صفحه‌ای تخت، مفروض شده است. براساس استدلال هندسی، نقطه تماس کره و سطح تنها یک نقطه است. حال فرض بگیریم که این کره شروع به غلتیدن بر روی صفحه بکند. باغلتش کره نقطه تماس جابجا می‌شود و در صورتیکه کره در یک راستا بغلتد نقاط تماس متوالی یک خط را تشکیل می‌دهند (شکل ۱). این خط در بازه زمانی شکل می‌گیرد که خود از بهم پیوستن آنها (لحظات غیرقابل تقسیم) تشکیل شده است؛ بگونه‌ای که هر نقطه در یک لحظه تقسیم‌ناپذیر طی شده است (رازی، المطالب العالیة، ۱۹۸۷: ج ۶/۴۷-۵۲). البته این برهان، چندان محکم نمی‌نماید. چرا که مفهوم دایره در مدل اتم‌گرایی هندسی دچار اشکال است. متعاقب آن، در این مدل، ما یک کره کامل که

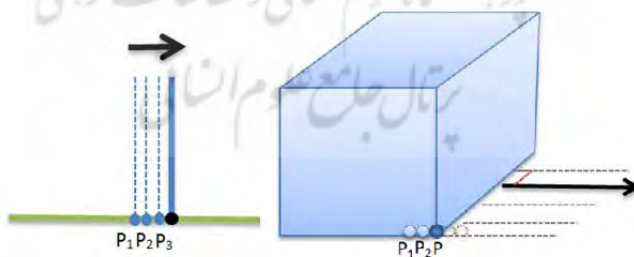
محل تماس آن با صفحه تنها یک نقطه باشد را هم نخواهیم داشت. فخر رازی در کتب خود این نکته را گوشزد نموده است.<sup>۷</sup>



شکل ۱. غلتش کره بر روی صفحه مسطح

## ۲.۲ برهان دو خط

در این برهان، دو خط عمود بر هم در نظر گرفته می‌شوند که یکی از آن دو ثابت و دیگری متحرک باشد. این دو خط در یک نقطه همدیگر را قطع می‌کند. مادام که این خط حرکت می‌کند، محل برخورد خطی را شکل می‌دهند که بر خط دیگر منطبق است (شکل ۲). این حرکت نیز در بازه ای از زمان متشکل از لحظات تقسیم ناپذیر انجام می‌پذیرد (رازی، المطالب العالیة، ۱۹۸۷: ج ۶/۵۲). این برهان از آنجائیکه بر مفهوم دایره تکیه ندارد، از نظر فخر رازی برهان بهتری است (رازی، إثبات، ۲۰۱۷: ۲۳۶) و (رازی، المطالب العالیة، ۱۹۸۷: ج ۶/۵۲-۵۳).



شکل ۲. دو خط عمود بر هم که یکی بر دیگری حرکت می‌کند.

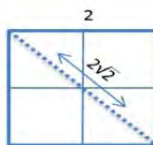
بر این اساس، خط از ردیف شدن نقاط بر اثر حرکت بوجود می‌آید. این نقاط تجزیه ناپذیرند. در استدلال پیوسته گراها، بر اساس استدلال ارسطو، نقاط هیچ بعدی ندارند. چرا که هر بعدی که برای آن تصور شود، یک خط خواهد بود. در واقع نقطه تنها، نهایت یک خط است. اتم‌گرایان متکلم، اگر چه نظر صریحی درباره آن ندارند، ولیکن از آنجاییکه نقاط امتداد طول را تشکیل می‌دهند، می‌توان اینگونه تفسیر کرد که نقاط در واقع پاره خطک‌ها ی تجزیه ناپذیرند که از بهم پیوستن آنها خط بوجود می‌آید. در میان براهین مختلف، چه اتم‌گراها و چه پیوسته گرا، چه براهانهایی مدافع اتم‌گرایی و چه براهانهایی مخالف آن، عباراتی هستند که دو جزء وقتی بحث می‌شود، دو اتم دارای بعد در نظر گرفته شده‌اند.<sup>۸</sup> در صورتیکه اتم‌ها یا نقاط بعدی نداشته باشند، از همپوشانی آنها خط بوجود نمی‌آید.<sup>۹</sup> این نکته را فخر رازی می‌دانسته و از بی بعدی اتم‌ها چنانکه برخی از اتم‌گرایان اولیه دفاع کرده اند، جانبداری نکرده است.<sup>۱۰</sup>

### ۳. ناسازگاری اتم‌گرایی هندسی و هندسه اقلیدسی

بدیهی است که اگر خط از پاره خطک‌های تجزیه‌ناپذیر تشکیل شده باشد، با هندسه کلاسیک اقلیدسی ناسازگار است. پیوسته گراها از این ناسازگاری برای رد امکان وجود اتم هندسی استفاده نموده‌اند. براهانهایی بسیاری بر مقادیری دلالت دارند که معادل عددی ناصحیح یا گنگ می‌باشد.

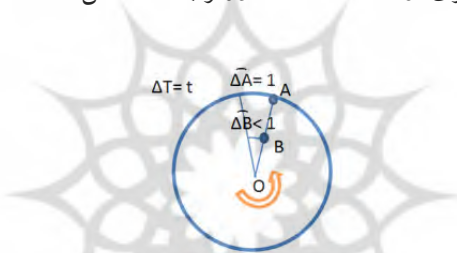
فخر رازی این براهان‌ها را در کتاب المطالب العالیة و إثبات جز الذی لا یتجزی به عنوان براهین نافی جوهر فرد که دو بخش «براهینی که بر مثلثات و مربعات مبتنی می‌باشند» ((رازی، المطالب العالیة، ۱۹۸۷، ۱۴۷-۱۵۷) و (رازی، إثبات، ۲۰۱۷، ۲۷۳-۲۷۹)) و بحث «کندی و تندی سرعت» ((رازی، المطالب العالیة، ۱۹۸۷، ۹۹-۱۰۷) و (رازی، إثبات، ۲۰۱۷، ۲۶۲-۲۵۸)) آورده است.

برای مثال، یکی از این براهانها این است که مربعی که هر ضلع آن دو اتم باشد، قطر آن  $2\sqrt{2}$  می‌باشد. پس اتم‌ها تقسیم می‌شوند. (شکل ۳)



شکل ۳. قطر مربع

برهانهای مبتنی بر کندی و تندی سرعت، سیستمی را در نظر می‌گیرد که شامل دو متحرک است که هر دو در زمان یکسان، مسافت‌های متفاوتی را طی می‌کنند. برای مثال آسیاب سنگی که می‌چرخد، هر دو در یک زمان متفاوت با هم حرکت می‌کنند، ولیکن نقطه‌ای به مرکز نزدیکتر است، مسافت کمتری را طی می‌کند. در نتیجه ممکن است که مسافت نقطه نزدیکتر کسری از مسافت نقطه دورتر باشد. (شکل ۴)



شکل ۴. گردش یک آسیاب سنگی

فخر رازی از این ناسازگاری آگاه بوده و بیان می‌کند که این براهین بسیار محکم هستند و قابل رد نیستند، (رازی، المطالب العالیة، ۱۹۸۷، ج ۶: ۱۵۵) و (رازی، إثبات، ۲۰۱۷: ۲۸۲) و کسی که اتم‌گرایی را باور دارد باید هندسه را به ریشخند بگیرد.

بدان که هندسه از اول تا آخر، جوهر فرد را ابطال می‌کند... و هر کس که حجتا بر وجود جوهر فرد تمام می‌شود، بر او واجب است که علم هندسه را به ریشخند بگیرد. (رازی، المطالب العالیة، ۱۹۸۷، ج ۶/ ۱۶۶) <sup>۱۱</sup>

باور به اتم‌گرایی کلام به عنوان نظریه‌ای که بر چارچوب متافیزیکی کلام استوار است، آبشخور مذهبی می‌تواند داشته باشد. یعنی اینکه اتم‌گرایی کلام یک نظریه فیزیکی است که مبانی متافیزیکی را که متکلمان از آن دفاع می‌کردند را تقویت می‌کند. به عبارتی، فیزیکی است که با متافیزیک مدنظر متکلمان سازگار است. (معصومی همدانی، ۱۳۶۵) و (افتخاری،

۳۲:۱۳۸۶-۳۵)) اما در مورد فخر رازی، به عنوان متکلمی که همواره استقلال رای داشته است، صرفاً چنین برداشتی چندان درست نمی‌نماید. فخر رازی با پشتوانه ای قوی از پدر و اساتید اشعری، در کتب نخستینش به صراحت اتم‌گرایی را رد نموده است. او با دلایل معرفت‌شناختی و ادله ای قویتر در اواخر عمر خود از اتم‌گرایی دفاع نموده است، و در واقع طعن و ریشخند او به هندسه، مبانی قوی فلسفی و معرفت‌شناختی دارد.<sup>۱۲</sup>

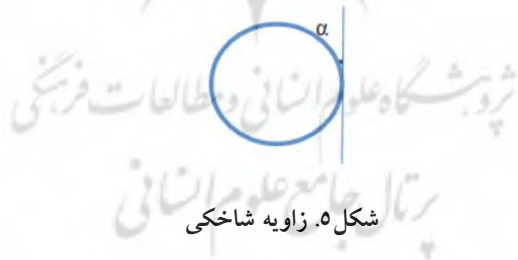
فخر رازی در *المطالب العالیة*، اشاره نموده است که هندسه از عالیترین و قطعیت‌ترین علوم بشری است، ولیکن حتی آن هم عاجز از درک بسیاری از مسائل است و همین دلیل را ادله ای بر نقصان دانش بشری می‌داند. (رازی، *المطالب العالیة*، ۱۹۸۷: ج ۱/ ۴۶)<sup>۱۳</sup> او به طور دقیقتر، در جلد ششم که مفصل به مقوله اتم‌گرایی و هندسه پرداخته است، در ادامه برهان‌های هندسی نافی اتم‌گرایی، بخشی را اختصاص به اعتبار علم هندسه داده است. تلاش نموده که روشن کند چرا هندسه چندان معتبر و قطعی نیست. برای مثال، در مقاله اول جلد ششم *المطالب العالیة*، فصلی مبسوط را به ضعف براهین هندسه دال بر وجود دایره و کره مطلق اختصاص داده است. در این فصل برهان هندسی که مبتنی بر این است که یک سر خط متناهی را ثابت نگاه داشته و سر دیگر آن را دوران دهیم را دچار اشکال می‌داند؛ چرا که مهندسان، هیچ دلیلی بر امکان ابقاء ثبات یک نقطه در تمامی زمان‌ها را ارائه نمی‌دهند. یا برهان دیگر که دایره را سطح مقطع کره فرض می‌گردد مستلزم دور می‌داند. چرا که خود کره از دوران دایره تعریف می‌شود. (رازی، *المطالب العالیة*، ۱۹۸۷: ج ۱/ ۶ م ۱۳۹-۱۴۶)

بدین ترتیب، فخر رازی با زیر سوال بردن روش استدلالی براهین هندسی، هندسه را علمی قاطع و بدون خطایی نمی‌پندارد. وی از آنجا که براهین بعضاً در شرایطی طرح شده‌اند که در واقعیت ممکن است رخ ندهد (مانند برهان دایره)، هندسه را دانشی وهمی معرفی می‌کند. فخر رازی، هندسه را برای بحث درباره مسئله اتم‌ها فاقد شایستگی لازم می‌داند. چرا که اتم‌ها از نظر فخر رازی واقعی و هندسه وهمی است. و از طرفی اتم‌ها را و رای اشکال می‌داند و که توصیف آنها در قالب علم هندسه نمی‌گنجد. (رازی، ۱۹۸۷: ج ۱/ ۶ م ۱۴۶)<sup>۱۴</sup> این مسئله مؤید نوعی پذیرش شکاکیت در مسئله اتم‌ها است؛ و می‌بینیم که فخر رازی برخلاف دیگر اتم‌گرایان اولیه که در مورد شکل اتم‌ها بحث کرده‌اند، (Pines, 1997:8-19) از ورود به این بحث خودداری کرده و تنها به بحث درباره امکان وجود اتم‌ها بسنده می‌کند.

#### ۴. تلاش‌های هندسی فخر رازی برای توجیه اتم‌گرایی

تلاش فخر رازی با طعنه به هندسه پایان نمی‌یابد. او در مجموعه برهان‌های اثبات‌کننده جوهر فرد، در جلد ششم کتاب المطالب العالیة، فصلی را به براهین متفرقه که وجود اتم را اثبات می‌کنند اختصاص داده است.<sup>۱۵</sup> در این برهان‌ها فخر رازی کوشش کرده که در لابلای مسائل هندسی، برهانی بیابد که بر وجود مقداری که کوچکتر از آن مقدار امکانپذیر نیست، دلالت کند. این برهانها، اگر چه دارای اشتباه خلط دو مبحث هستند، ولیکن بررسی این برهانها دریچه تازه‌ای را در نگاه فخر رازی به هندسه، به روی ما می‌گشاید.

در یکی از برهان‌ها، فخر رازی ادعا می‌کند اگر جوهر فرد را نپذیریم، باید قبول کنیم که مقدار/اندازه کوچکتری که در حال رشد است و بزرگتر می‌شود، هرگز به مقدار بزرگتری که در حال کوچک شدن است، نمی‌رسد.<sup>۱۶</sup> (رازی، المطالب العالیة، ۱۹۸۷، ج ۶/۷: ۷۶). در بدو امر، این برهان، پارادوکس زنون را به ذهن می‌آورد، ولیکن در ادامه می‌بینیم که فخر رازی برای اثبات این قضیه، به زاویه‌ای که به زاویه شاخکی (Cornicular-angle or Horn-angle) مشهور است، استناد می‌کند. مسئله از این قرار است که زاویه بین یک خط مماس و یک دایره، به عنوان کوچکترین زاویه ممکن مطرح شده است (شکل ۵). این مسئله که در کتاب اقلیدس مطرح شده است، (Euclid, 1908, Vol/II:37-43) از دیرباز در دوران یونان باستان (هیث، ۱۱۴: ۱۳۸۱) و در دوره اسلامی مورد بحث بین متکلمان و هندسه دانان بوده است. (Rashed, 2005).



شکل ۵. زاویه شاخکی

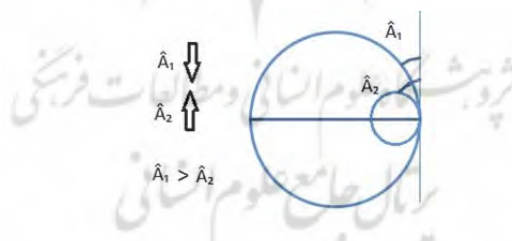
روشن است که این زاویه، یک زاویه با تعریفی که ما از زاویه می‌شناسیم نیست؛ چون قوس دایره یک خط خمیده و مماس یک خط راست است، از نظر ما زاویه بین دایره و خط مماسش صفر است. ولیکن، اینگونه که بر می‌آید که هندسه دانان حتی در زمان خود اقلیدس در اینکه زاویه باشد یا نه، به وفاقی نرسیده و برخی آن را کوچکترین زاویه ممکن معرفی کرده‌اند.<sup>۱۷</sup> فخر رازی بر اینکه این زاویه کوچکترین زاویه ممکن حاده باشد



و متعاقبا زاویه بین قوس دایره و قطر بزرگترین زاویه حاده ممکن باشد به اقلیدس استناد کرده است و مدعی شده است که تنها در صورتی چنین چیزی می‌تواند درست باشد که ما یک دایره کوچکترین داشته باشیم و نتوان دایره ای از آن کوچکتر رسم نمود:

اگر بر روی قطر دایره، دایره ای کوچکتر، مماس بر آن، از نقطه که خط عمود قرار دارد در نظر بگیریم، زاویه ای که از خط عمود تا دایره کوچکتر ایجاد می‌شود، از زاویه اولیه [دایره بزرگتر] بزرگتر و زاویه ای که در داخل دایره [کوچکتر] قرار دارد کوچکتر است. وقتی این ثابت شود، پس می‌گوییم: هر چه دایره کوچکتر باشد، زاویه خارجی‌اش بزرگتر می‌شود، [زاویه] داخلی‌اش کوچکتر. پس اگر، مقادیر تا بی‌نهایت بخشپذیر باشد، می‌توان بی‌نهایت دایره ترسیم کرد که هر کدام از قبلی کوچکتر باشد. و همچنین، ایجاب می‌کند که زوایای خارجی تا بی‌نهایت زیاد شود و زاویه داخلی نیز تا بی‌نهایت کوچک شود. پس آن [زاویه] خارجی مثل این [زاویه]، داخلی نخواهد بود. چون آن [زاویه] خارجی چگونه آنطور بوده است که کوچکترین زاویه ممکن مستقیم الخط باشد. و اگر این [زاویه] داخلی اینطور باشد، چگونه ممکن است که از همه زوایای حاده مستقیم الخط بزرگتر باشد. پس ثابت می‌شود که آنچه محال بودنش را لازم دانستیم، لازم باشد. (رازی، المطالب العالیة، ۱۹۸۷: ج ۷۶/۶)

او استدلال می‌کند که اگر یک دایره کوچکتر در دایره در محل تماس دایره و خط عمود در نظر بگیریم (شکل ۶)، زاویه شاخکی دایره جدید بزرگتری خواهد ساخت، و نیز زاویه داخلی کوچکتر.



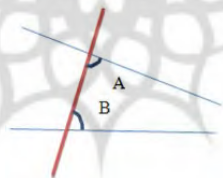
شکل ۶ دو دایره نامساوی داخل هم: بزرگتر کوچک شونده و کوچکتر بزرگ شونده

و اینجا می‌بینیم که زاویه خارجی دایره جدید ( $\hat{A}_2$ ) از ( $\hat{A}_1$ ) بزرگتر شده است و همچنان این دایره کوچک شود، این زاویه بزرگتر می‌شود و نمی‌توان زاویه شاخکی به عنوان کوچکترین زاویه حاده ممکن داشت، مگر اینکه دایره ای باشد که دیگر نتوان از آن کوچکتر دایره ای را رسم کرد.<sup>۱۸</sup>

در برهانی دیگر، فخر رازی استدلال می‌کند که اگر تشکیل خط از اجزاء تجزیه ناپذیر پذیرفته نشود، هندسه باید اصل موضوع خودش را نقض کند. شرح برهان به صورت زیر است:

همانا اقلیدس در مصادره مقاله اول گفته است: «همانا هر دو خط مستقیمی، که خطی بر آندو قرار دارد، اگر دو زاویه آن که در یک جهت قرار دارند، از دو قائمه کمتر باشد، همدیگر را در یک جهت قطع می‌کنند.» و این حکم را اقلیدس داده است و هندسه دانان بر آن اجماع دارند. و ما می‌گوییم که اگر مقادیر به طور نامتناهی قابل قسمت باشند، این حکم صادق نخواهد بود. چرا که این دو خط مادام درازتر می‌شوند، بهم نزدیکتر می‌گردند. ولیکن این نزدیک شدن، موجب نمی‌شود که بهم برسند، اگر به شکل نامتناهی قابل قسمت باشند. (رازی، المطالب العالیة، ۱۹۸۷: ج ۶/ ۷۷)

فخر رازی به اصل موضوع کتاب اصول اقلیدس اشاره دارد که اگر دو خط بهم نزدیک شوند باید همدیگر را قطع کنند. (Euclid, 1908, VI:155) به عبارتی اگر بر طبق شکل ۷، مجموع دو زاویه A و B کمتر از ۱۸۰ درجه باشد، دو خط  $d_1$  و  $d_2$  همدیگر را قطع خواهند کرد (شکل ۷).



شکل ۷. اصل پنجم اصول اقلیدس

فخر رازی در اینجا مدعی شده است که اگر خط نامتناهی قابل قسمت باشد، ممکن است این دو خط بهم نرسند. تعدادی از مثالهایش عبارتند از:

۱. خطوطی در کتاب مخروطات آپولونیوس معرفی شدند و تا ابد به هم نزدیک شده ولی همدیگر را قطع نمی‌کنند.<sup>۱۹</sup>

احتمالا منظور فخر رازی، شاخه‌های مقاطع مخروطی و خط مجانب آنها بوده است.

۲. زاویه خارجی چند ضلعی منتظم، هر چه تعداد اضلاع بیشتر می‌شود، کوچکتر می‌گردد و به ضلع نزدیکتر می‌گردد، ولیکن حتی اگر افزایش تعداد اضلاع تا بی‌نهایت

ناسازگاری پیوسته‌گرایی هندسی و اتم‌گرایی کلام در آرا فخر رازی ۱۱

ادامه یابد هرگز این زاویه صفر نمی‌شود. <sup>۲۰</sup>(شکل ۸) (رازی، المطالب العالیة، ۱۹۸۷: ج ۶/ص ۷۸-۷۹).

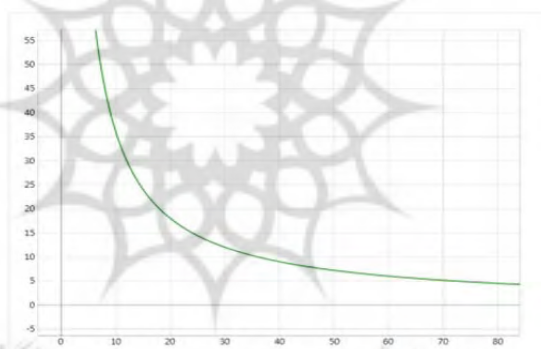


شکل ۸. زاویه خارجی چند ضلعی‌ها منتظم با افزایش ضلع کوچک می‌شود

زاویه خارجی یک چند ضلعی منتظم با رابطه زیر بدست می‌آید:

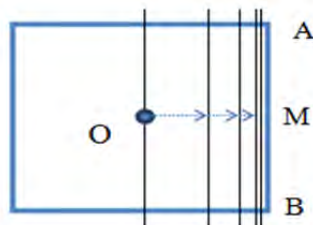
$$\alpha = \frac{360}{n} \quad (\text{رابطه ۱})$$

وقتی  $n$  به سمت بی‌نهایت میل کند،  $\alpha$  به سمت صفر میل می‌کند ولی خود صفر نمی‌شود. (شکل ۹)



شکل ۹. بخشی از نمودار  $f(x) = 360/x$

۱. مربعی را فرض می‌کنیم که طول آن معین باشد. خطی را در نظر می‌گیریم که سطح آن نصف شود، و دوباره نیمه سطح را نصف می‌کنیم. همچنان که تا بی‌نهایت این عمل تکرار شود، خط منصف به ضلع دیگر مربع نزدیک می‌شود، ولیکن به آن هرگز نمی‌رسد. <sup>۲۱</sup>(شکل ۱۰) (رازی، المطالب العالیة، ۱۹۸۷: ج ۶/ص ۷۸)



شکل ۱۰: تقسیمات متوالی سطح مربع

بدین ترتیب همچنانکه ما سطح را نصف کنیم و وسط خط منصف را به با شاخص نقطه M در نظر بگیریم. OM به AB می‌شود ولی هرگز به آن نمی‌رسد. می‌بینیم که در این برهان خط مفهوم مجرد هندسی ندارد، بلکه کمیتی است که مقید به نوعی معادله است. اگر طول مربع را 2a فرض کنیم، مقدار OM برابر یک سری هندسی است با قدر نسبت 1/2 است.

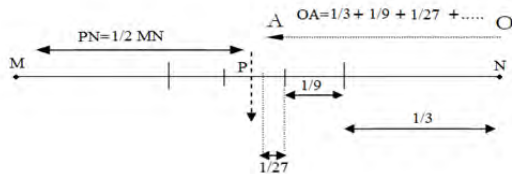
$$(رابطه ۲) \quad OM = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}a + \frac{1}{8}a + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}a$$

این سری هندسی، وقتی به سمت بی‌نهایت میل کند، حد آن به سمت صفر میل می‌کند، ولی هرگز صفر نمی‌شود.

۲. مثالی بعدی که فخر رازی آورده، مشابه مثال قبلی است، که فخر رازی به نقل از المصادرات ابن هیثم، به یک نامساوی اشاره دارد (رازی، المطالب العالیة، ۱۹۸۷: ج ۶/ ۸۲-۸۱).<sup>۲۲</sup> این نامساوی را می‌توان به زبان ریاضی نوین چنین نوشت:

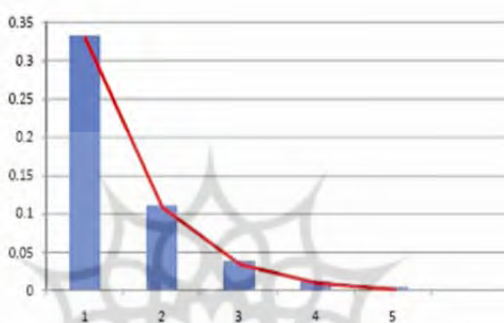
$$(رابطه ۳) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^i} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots < \frac{1}{n-1}$$

این نامساوی حالتی از مثال قبلی است که در آن a = 1 و n = 2 فرض شده بود. اگر بخواهیم این نامساوی را برای n = 3 روی شکلی در نظر بگیریم به شکل زیر (شکل ۱۱) خواهد بود که در آن OA به 1/2 بسیار نزدیک می‌شود، ولی هرگز برابر 1/2 نمی‌شود.



شکل ۱۱. نامساوی ابن هیثم برای n=3

در این دو مثال اخیر، فخر رازی سری‌هایی را نشان داده است که مقدار آنها به حدی نزدیک می‌شود، ولی هرگز به برابر آن حد نمی‌شود. اما این استدلال را فخر رازی برای دوخطی که بهم نزدیک می‌شوند، ولی هرگز بهم نمی‌رسند، آورده است. این مقداری که هرگز صفر نمی‌شود، سطح پوشاننده یک منحنی و خط مجانبش هستند. به عبارتی، سطح زیر یک منحنی دیگر است که مشتق عبارتی است که در اینجا بر آن تاکید شده است. برای مثال، در حالت قبلی، (شکل ۱۲) این عبارت سطح منحنی  $f(x) = \frac{1}{3x}$

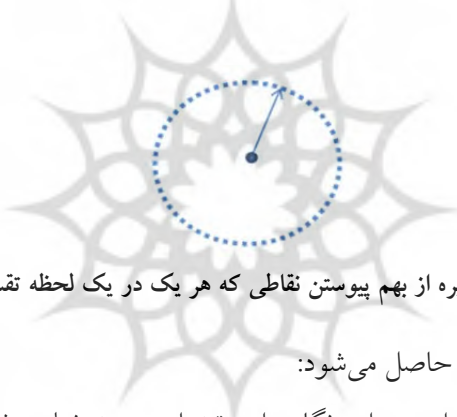


شکل ۱۲. منحنی‌ماسوی ابن هیثم

همچنان که در شکل نیز مشاهده می‌شود، منحنی به نزدیک  $1/2$  گشته ولی هرگز برابر  $1/2$  نمی‌شود.

در این مثالها، می‌بینیم که منظور فخر رازی از دوخطی که بهم نزدیک می‌شوند و بهم نمی‌رسند، یک خط راست و یک منحنی است. همین‌جا، اشتباه فخر رازی روشن می‌شود، چرا که اصل پنجم اقلیدسی که او به آن استناد کرده است، بین دو خط راست برقرار است.<sup>۳۳</sup> اما بررسی به اینجا ختم نمی‌شود که به ناآگاهی و اشتباه بودن استدلال هندسی فخر رازی حکم دهیم. واضح است که با هندسه کلاسیک نمی‌توان اتم‌گرایی هندسی را توجیه کرد، اما از براهین فخر رازی هم نمی‌توان به سادگی گذشت. فخر رازی، در همین مبحث، علم ابن سینا را مختصر در هندسه دانسته، و دیدیم که شواهدی از ابن هیثم می‌آورد که از پیشرفته‌ترین هندسه عصر روزگار خود بوده است.<sup>۳۴</sup> او استدلال ابن هیثم را نیز دچار اشکال می‌داند، چرا که مقدمات وی بر اساس کره متحرک است.<sup>۳۵</sup> این اشاره‌ها، ما را به این نکته رهنمون می‌سازد که براهین هندسی فخر رازی را جدیتر بگیریم، و این احتمال را در نظر آوریم که او در هندسه چندان ناوارد نیست.

چنانکه پیشتر هم اشاره شد، اشکال جدی که فخر رازی به هندسه وارد می‌داند، مفهوم دایره است؛ چراکه خطی یک طرف آن ثابت فرض شده است و طرف دیگر متحرک. در نظر گرفتن حرکت در هندسه، مستلزم در نظر گرفتن مفهوم زمان است که با فرض هندسه کلاسیک که براهین در طول زمان در نظر گرفته نمی‌شود، در تناقض است.<sup>۲۶</sup> فخر رازی یا باید مفهوم دایره را به کنار بگذارد، یا به خود حق دهد که حرکت اشکال هندسی را در طول زمان نیز در نظر بگیرد. در هر دو حالت بر اساس استدلال فخر رازی، برهان تشکیل خط از نقاط موجه می‌شود. در صورتیکه، خطی را یک سر آن ثابت است را دوران دهیم، در طول زمان از گردش یک نقطه که هر لحظه در یک مکان بوده است، دایره ای متشکل از نقاط به وجود می‌آید (شکل ۱۳). این استدلال شبیه برهانی است که متکلمان پیش از این برای اثبات مدعی خود به کار برده اند. یعنی اینکه سر خط در هر لحظه تقسیم ناپذیر (آن) در یک مکان قرار دارد.



شکل ۱۳. تشکیل دایره از بهم پیوستن نقاطی که هر یک در یک لحظه تقسیم ناپذیرند

از این دیدگاه، نتایجی حاصل می‌شود:

۱. دایره کامل وجود ندارد: در این نگاه، دایره تبدیل به چند ضلعی شده، دیگر زاویه بین دایره و خط مماس معنادار می‌شود و حتی ممکن است غیر صفر باشد. (شکل ۱۴)



شکل ۱۴. دایره ای که در حقیقت چند ضلعی باشد

۲. خمش و انحنا بی مفهوم می‌شود: این مسئله نیز در بطن نکته قبلی وجود دارد. همانطور که دیگر دایره کامل نداریم، خمش و انحنا نیز دیگر نخواهیم داشت. در نتیجه

تفاوت ماهوی بین خط مجانب و شاخه ای از منحنی وجود نخواهد داشت. در چنین دیدگاهی، اعتبار به مقدار داده می‌شود، و هر معادله جبری، مفهوم خط را دارد که در هندسه اقلیدسی چنین رویکردی وجود ندارد.

## ۵. استدلال فخر رازی و تاریخ بی‌نهایت کوچک‌ها و اصل پیوستگی

به خاطر تفاوت ماهوی کهریاضیات با سایر رشته‌های علوم دارد، در تاریخ ریاضیات، کمتر شاهد افول و سقوط نظریه‌ها هستیم. با این وجود، علی‌رغم روند نسبتاً خطی تاریخ ریاضیات، مباحث فلسفی ریاضی، دچار افت‌وخیزهای بسیاری است. نظریه‌های ناب ریاضی، برآمده از توازنی است که بین نظریات گاه متضاد فلسفی برقرار شده است. اتم‌گرایی کلام، بخشی از گفتمان تقسیم‌پذیری خط را شامل می‌شود که اگرچه از نظر مبانی ریاضی، امروز پذیرفتنی نیست، اما می‌توان با ملاحظاتی آن را بخشی از تاریخ بی‌نهایت کوچک‌ها (Infinitesimals) دانست؛ هر چند که در این بین، نیاز به کار جدی در بین متون اصلی ما قبل و مابعد فخر رازی هست. با درک فرآیند توازنی که بین نظریات رقیب در این حوزه برقرار شده، ما بهتر می‌توانیم دریابیم که فخر رازی در میان رسائل ابن هیثم به دنبال چه بوده است. قضیه ابن هیثم که فخر رازی بر آنها دست گذاشته، از قضیه‌هایی است که موسوم به روش افناء (The method of exhaustion) اند که در واقع پدر حساب دیفرانسیل-انتگرال است. در این روش، برای اندازه‌گیری طول یک منحنی، آن منحنی را مجموعه‌ای از پاره‌خطک‌های کوچکی در نظر می‌گیرند، تا جایی که بتوان آن قطعه طول را یک خط راست فرض کرد. متناظراً، برای اندازه‌گیری سطح زیر یک منحنی نیز، آن سطح را مجموعه‌ای از سطحک‌های کوچکی در نظر می‌گیرند، تا جایی که اندازه‌گیری مساحت آن سطحک به سادگی قابل محاسبه باشد. در نهایت، جمع طولها یا مساحت‌های اندازه‌گیری شده، می‌شود اندازه طول یا سطح زیر منحنی (هیثم، ۱۳۸۱: ۱۸۰-۱۸۷). برای مثال برای اندازه‌گیری محیط یک دایره، دایره را یک چندضلعی با اضلاع بسیار زیاد در نظر گرفته می‌شود که با تقریبی بتوان، هر ضلع را یک خط راست در نظر گرفت. به بیان دیگر، هر دایره مجموعه‌ای از پاره‌خطک‌های طولی بسیار کوچک در نظر گرفته می‌شود.

حال، پرسش بسیار مهمی که مطرح می‌شود: این پاره‌خطک بسیار کوچک تا کجا و تا چه حدی کوچک است؟ تا کجا می‌توان یک منحنی را تقسیم کرد. هندسه کلاسیک، دیدگاه ارسطویی را که خط را می‌توان تا بی‌نهایت تقسیم نمود را تایید می‌کند، اما برای حل

مسائل به روش افناء، پاسخ این سوال را شرایط مسئله تعیین می‌کند. این تقسیمات تا جایی کوچک می‌شوند که یک هندسه دان قادر به محاسبه باشد؛ برای مثال برای اندازه گیری محیط یک دایره، دایره محاط و محیط بین دو چند ضلعی در نظر گرفته می‌شود.

چیزی که به این بحث مربوط می‌شود، بحث امکان تقسیمات متوالی است. چرا که اگر خط را تا بی‌نهایت تقسیم پذیر فرض کنیم، با مشکلات و معضلات بی‌نهایت کوچک‌ها و پارادوکس زنون درگیر می‌شویم. در حالیکه روش افناء با دلالت بر لم ارشمیدس، هندسه دانان را از درگیری با این مسئله بگریز می‌رساند.

لم ارشمیدس: «برای دو مقدار مشخص نا مساوی، اگر از مقدار بزرگتر، به اندازه نیم آن جدا شود، و از باقیمانده، نیمه دیگری جدا شود، و همچنان ادامه یابد، آنچه باقی مانده از آن مقدار کوچکتر اولیه کوچکتر خواهد بود.»<sup>۲۷</sup> (Heath (1897), THE WORKS of ARCHIMEDES, P: xlviii)<sup>۲۸</sup>

این اصل که با عبارات متفاوتی قابل بیان است، به یک هندسه دان اجازه می‌دهد که یک کمیت را تا هر چه قدر که مسئله ایجاب می‌کند، بدون دغدغه درگیری با معضلات بی‌نهایت، کوچک فرض کند. به عبارتی، هر چه قدر که یک کمیت تقسیم شود، ما هنوز یک کمیت کوچک خواهیم داشت. این لم بیان دیگری از پیوستگی کمیت‌هاست. نوعی نهادینه کردن دکتترین پیوسته گرایی در هندسه است. اما نکته ای که مطرح است، تقسیماتی که در دیدگاه ارسطویی، تقسیمات بالقوه ای بودند، و المانی که تعریف و شکل مشخصی نداشت، در چنین صورتبندی، یک المان با شکل مشخص در یک کمیت پیوسته در نظر گرفته می‌شود.<sup>۲۹</sup> تشخیص دادن به یک المان بسیار خرد، به این تقسیم بالقوه، ماهیت بالفعل می‌دهد. همین نکته، برای فخر رازی جذاب و قابل پیگیری بوده است؛ به رسمیت شناختن یک سازه بسیار کوچک بالفعل که خط یا هر کمیت دیگر از آن ساخته شده باشد. لم ارشمیدس، به فخر رازی این امکان را می‌داده که او به شکل تبیین یافته ای به یک جزء خرد بالفعل، یعنی چیزی که به زعم او جوهر فرد است در هندسه دست پیدا کند. او در بحث‌های مستقلى، به اثبات این نکته پرداخته است؛ هر تقسیمی که تعیین پیدا کند، بالفعل است. پس این المان خردی که مشخص و معلوم است، دیگر یک جز بالقوه نیست؛ بلکه بالفعل است،<sup>۳۰</sup> و حال باید اثبات کند که کوچکتر از این المان، ممکن نیست و تقسیمات باید در جایی متوقف شود. برای بررسی بیشتر، دوباره، لم ارشمیدس را به زبان ریاضی نوین می‌نویسیم:



اگر برای دو مقدار معین نابرابر  $A$  و  $B$ ، که  $A$  بزرگتر باشد، کسری از  $A$  برداشته شود،  $(\mathbb{Q}/n)$  دوباره از باقی مانده،  $\mathbb{Q}/n$  دیگری جدا کنیم، و همینطور الی آخر، آنچه باقی می‌ماند،  $\mathbb{Q}/n^i$  از  $B$  کوچکتر، می‌شود. به عبارتی به تابع زیر دست پیدا می‌کنیم.

$$f(x) = \frac{A}{n^i} \quad (\text{رابطه ۴})$$

این همان مسئله ایست که فخر رازی در مطالب العالیة، با اقتباس از ابن هیثم، بر آن متوقف شده بود، قصد داشت استدلال کند اگر این تقسیمات در جایی متوقف نشود، اصل پنجم اقلیدس را نقض خواهیم کرد. استدلالی که با خلط دو مبحث، به نوعی پارادوکسیکال است و عاجز از اثبات مدعای فخر رازی.

با این وجود در این حرکت عقیم فخر رازی، نکته ای از جهت فلسفه ریاضی می‌توان آن را نوعی حرکت به سمت صورت بندی اصل پیوستگی (Low of continuity) دانست، و آن بالفعل دانستن یک المان در روش افنا است؛ مسئله ای که هندسه دانان به آن توجهی به آن نداشتند. آنها از این جهت توجه ای به آن نداشتند، چون مسئله آنها بالقوه یا بالفعل بودن المان نبوده است. چرا که این مسئله بیش از اینکه ریاضی باشد، فیزیکی است. چنانچه این منحنی‌ها نمایانگر تغییرات در طبیعت باشند، و موجودات مجرد صرف نباشند، آنوقت بالفعل بودن آنها معنا پیدا می‌کند. از نظر فخر رازی که از اتم‌گرایی هندسی در تبیین حرکت نیز استفاده کرده است، (رازی، المطالب العالیة، ۱۹۸۷، ج/۶:۲۹-۶:۴۶) بالفعل بودن و واقعی بودن این المان بسیار بااهمیت است.<sup>۳۱</sup>

برای درک بهتر مسئله، یافتن جایگاه استدلال فخر رازی در تاریخ بی‌نهایت کوچک‌ها، باید به اصل پیوستگی پردازیم. اصل پیوستگی که در قرن هفدهم توسط لایبنیتز صورتبندی شد، حاکی از نگرش پیوسته‌گرایی در سراسر طبیعت است. لایبنیتز استدلال می‌کرد که تغییرات در طبیعت به شکل تدریجی صورت می‌گیرد. به عبارتی هر تغییر کلی را می‌توان به تغییرات جزئی تر خرد کرد. این پیوسته‌گرایی یک تفاوت اساسی با پیوسته‌گرایی ارسطویی دارد. از دید ارسطو حرکت غایت‌انگار و یک واحد تجزیه‌ناپذیر است. به عبارتی تقسیماتی که در بازه زمانی که حرکت در آن صورت گرفته فرض می‌شوند، همگی بالقوه اند. در حالیکه حرکت لایبنیتز، حرکت یک واحد نیست، بلکه مجموعه ای از تغییرات جزئی است. به عبارتی اجزایی که در این حرکت پیوسته در نظر گرفته می‌شود بالفعل و موجود هستند. (Jorgensen, 2009)

صورتبندی فلسفی ریاضی، اصل پیوستگی را، پیش از لاینیتز، می توان در آثار نیکولاس کوزایی مشاهده کرد. کوزایی تقسیمات متصور در خط را بی انتها و بالقوه می داند. اما هر جز که در تقسیم در نظر گرفته می شود، یک جز یا یک المان بالفعل است. (Bell, 2006: 55-62)<sup>۳۲</sup> کوزایی نیز مانند فخر رازی برای بالفعل بودن المان به زاویه شاخکی و افناء رجوع کرده است. (Wertz, 2001) ما نمی دانیم که بین کوزایی و فخر رازی واسطه ای یا رابطه ای بوده است یا نه؟<sup>۳۳</sup> این پرسش، سوال باز این مقاله است.<sup>۳۴</sup> به هر جهت، هر چند که این بحث در آن برهه زمانی، به دست فخر رازی به ثمر ننشسته، ولیکن نشاندهنده تسلط و چیره دستی او در مباحث فلسفی ریاضی روزگار خود بوده است، که به لحاظ تاریخی، ارزشمند است.

## ۶. گامی به سوی هندسه ای جدید

استدلالات فخر رازی، پیرامون مسائل هندسی است؛ او به هندسه اقلیدسی انتقاد دارد؛ او سعی داشته که به گونه ای از میان مباحث مربوط هندسه بی نهایت کوچک ها، براهینی موافق اتم گرایی ارائه دهد. چارچوبی که او در تحلیل مباحث هندسی دارد، متفاوت از چارچوب هندسه اقلیدسی است. با این وجود، به زعم اینجانب، نمی توان به سادگی عبارتی که ستیه (۲۰۰۶) برای هندسه فخر رازی به کار برده با عنوان «هندسه نااقلیدسی علم کلام»، عبارت صحیحی دانست. چرا که با تمام تلاش های فخر رازی، او به یک نظام خودسازگار که قادر به حل مسائل هندسی خود باشد، دست نیافته است.<sup>۳۵</sup> یا اینکه ممکن است این شبهه بوجود بیاید که متکلمانی چون فخر رازی، همچون لباچفسکی توانسته اند با تعمیم و بیان شکل کلیتر اصل پنجم، (توازی) یک هندسه خودسازگار بوجود آورند. بنابراین عبارت «هندسه نااقلیدسی فخر رازی»، عبارتی اغراق آمیز یا محل اشکال است که باید درباره آن بیشتر تدقیق شود. آنچه که مورخان، به آن لقب هندسه نااقلیدسی را داده اند، در نظر گرفتن حالات دیگر برای اصل پنجم اقلیدس بوده است. (Coxeter, 1998:2) در مثالهایی که مطرح شد، فخر رازی مسئله ای با اصل پنجم ندارد و حتی سعی هم ننموده که اصل پنجم را زیر سوال ببرد. تنها استدلال کرده که اصل پنجم با بخش پذیری نامتناهی مقادیر و خط تناقض دارد. از این نگاه، او هیچ هندسه نااقلیدسی به معنای متعارف در ذهن ندارد.

اصول اقلیدس با تعاریف شروع می شود. مفهوم نقطه و خط هر دو با استدالات فخر رازی در تناقضند. نقطه در اصول هیچ بعدی ندارد. نهایت خط است. خط نیز نهایت

سطح. (Euclid, 1098, Vol/I: 153-154) نقطه در تبیین رازی نهایت خط نیست (رازی، المطالب العالیة، ۱۹۸۷، ج/ ۶: ۵۴-۵۵)؛ خط نیز نهایت سطح نیست؛ سطح نیز نهایت حجم. نقطه سازنده خط است؛ خط سازنده سطح؛ سطح نیز سازنده حجم. (رازی، المطالب العالیة، ۱۹۸۷، ج/ ۶: ۹) این تبیین آشکارا هر سه اصل موضوع اول اقلیدس را نقض می‌کنند: نه دلیلی وجود دارد که بین دو نقطه خطی باشد؛ نه خط مستقیم راست پیوسته ای وجود دارد؛ نه دایره کاملی وجود دارد. (Euclid, 1098, Vol/I: 154-155) این نظامی که اتم‌گرایی کلام ارائه می‌دهد، اگر هندسه باشد، اقلیدسی نیست. ولی نااقلیدسی هم به مفهوم متعارف تاریخ ریاضیات نیست.

با این وجود می‌توان حرکت او را از با گامی عقبتر و از منظر فلسفه علم ارزیابی کرد. فخر رازی، در برخورد با علم هندسه از تنگنای معرفت شناختی گذر نمی‌کند. او استدلال می‌کند که نمی‌توان در ذهن هر چیزی را نامحدود تقسیم کرد. حتی ذهن هم در تصور بسیار کوچک‌ها محدودیت دارد. با قبول شکاکیتی که علم بشری در این حوزه به آن دچار است، تنها در حد بحث امکان وجود اتم‌ها، به هندسه دخول می‌کند. همین نکته، مصداقی است که او علم هندسه را با تعریف پذیرفته شده کلاسیک ارسطویی مبنی بر علم جواهری که از عالم مادی مجرد شوند را نمی‌پذیرد.<sup>۳۶</sup> او به چیزی مجرد از دنیای مادی و صرفاً ذهنی نمی‌پردازد. اون یک مهندس نیست. تا جایی هندسه را می‌خواهد که پاسخگویی مسائل هستی شناختی اش باشد.

با این وجود، او خط را با یک عبارت جبری معادل می‌کند. خط و اشکال هندسی را با ساختار متفاوت از هندسه متعارف اقلیدسی در نظر می‌گیرد. او نتوانسته است (یا اصلاً نخواست) که یک هندسه نااقلیدسی متعارف را بیرواند، ولیکن قادر بوده است که غیراقلیدسی فکر کند.<sup>۳۷</sup> قادر بوده است چارچوب هندسه اقلیدسی را بشکند و قادر بوده است اینگونه بیان‌دیشد که می‌توان هندسه ای دیگر، بجز هندسه اقلیدسی را در نظر گرفت. این مسئله خود در جایگاه خود، بسیار حائز اهمیت است. این رویکرد فخر رازی، در جریان پیشرفت فلسفی ریاضیات در دنیای اسلام، قابل فهم و توجیه است. چرا که اصولاً اهمیت تاریخ ریاضیات در دوره اسلامی به واسطه همین ساختار شکنی‌های فلسفی در مبانی بنیادی ریاضیات است.<sup>۳۸</sup> بی شک، با ادامه بررسی‌های تاثیراتی که فخر رازی بر نسل‌های بعدی خود داشته، ما قادر خواهیم بود که بهتر فرآیند تغییر نگرش‌ها در مفاهیم را دنبال کرده و به دلایل باور شدن یا عقیم ماندن آنها دست یازیم.

## ۷. نتیجه گیری

در این مقاله، در ابتدا مطرح شد که اتم‌گرایی کلام بر اساس متون فخر رازی، چه دیدگاهی درباره مفاهیم هندسی دارد؛ دیدگاهی که از تشکیل خط از نقاط تقسیم‌ناپذیر دفاع می‌کند. واضح است که این دیدگاه با هندسه کلاسیک اقلیدسی ناسازگار است. فخر رازی در رویارویی با این ناسازگاری‌ها در دو راستا تلاش کرد: ۱- به کنار زدن هندسه به دلایل معرفت‌شناختی، ناسازگاری‌های زیر بنایی با اتم‌گرایی و مسائلی که از نگاه فخر رازی مقدمات سست علم هندسه است؛ ۲- تلاش برای یافتن نقاطی که بتوان از آن به نفع اتم‌گرایی بهره گیرد، در این میان، او به تحلیل برخی مسائل مهم هندسی آن روزگار پرداخته است. پس از اینکه مسائل از متون عربی قدیم به زبان ریاضی جدید بازنویسی شد، در تحلیل رویکرد فخر رازی، به چگونگی استدلال وی در توجیه مسائل دست یافتیم. در نهایت به این گزاره رسیدیم که فخر رازی، علی‌رغم اینکه از پروراندن یک مکتب هندسی مستقل از هندسه کلاسیک اقلیدسی ناتوان بود، توانسته است که در زمان خود، برخلاف چارچوب رایج، غیر اقلیدسی به هندسه بنگرد و امکان بودن هندسه ای در چارچوب متفاوت را در نظر آورد. از این رو، خط مشی وی، حرکتی نبوغ‌آمیز در تاریخ فلسفه ریاضیات است.

## پی‌نوشت‌ها

۱. پیوسته‌گرایی (Continuism) را نباید با اصل پیوستگی (Continuity Principle یا Low of continuity) اشتباه گرفت. اگرچه این اصل در مکتب پیوسته‌گرایی شکل می‌گیرد، اما به لحاظ تاریخی این اصل در قرن هفدهم به شکل صورت‌بندی شده وارد ریاضیات می‌شود و در این برهه تاریخی که مدنظر این مقاله است، ریاضیات به لحاظ فلسفی به این درجه از تکامل و پختگی نرسیده است. (Bell, 2006:86-92)

۲. پیوسته‌گرایی می‌تواند فیزیکی باشد، یعنی اجسام طبیعی را تا بی‌نهایت بتوان تقسیم نمود و در نهایت هر جز هر چند کوچک دارای خصوصیات جسم خواهد بود، یا اینکه ریاضی باشد، یعنی کمیات و موجودات مجرد را بتوان تا بی‌نهایت تقسیم کرد. پیوسته‌گرایی فیزیکی شامل پیوسته‌گرایی ریاضی هم می‌شود، ولیکن برعکس آن برقرار نیست. یعنی می‌توان کمیات مجرد را پیوسته در نظر گرفت، ولیکن اجسام طبیعی را متشکل از تقسیم‌ناپذیرها دانست. (Eftekhari, 2017:61-62)

۳. هندسه دانان بسیاری در اصول موضوعه اقلیدس، بخصوص اصل پنجم بحث کرده اند؛ در مورد اینکه یک اصل موضوعه است یا یک قضیه، ولیکن تعاریف تقریباً بدون مناقشه در قرون وسطی پذیرفته شده است.

۴. در مورد اینکه آیا اتم‌گرایان مسلمان آگاهانه اتم و نقطه را یکی دانستند یا نه، یا اینکه این دو را معادل هم نگرفته باشند، بین مورخین اختلاف نظر هست. در این مقاله که برهه تاریخی مدنظر دوره دوم اتم‌گرایی است، یعنی زمان فخر رازی، به طور قطع نقطه و اتم معادل هم هستند. (Eftekhari, 2017:28-32)

۵. جزء لا یتجزی لفظاً به معنای جزئی است که تجزیه نمی‌شود و معادل کلمه *Atomos* یونانی است به عنوان تجزیه ناپذیر. در متون عربی عبارت *جزء لا یتجزی* به معنای اتم به شکل عمومی به کار رفته است. عبارت دیگری که عمدتاً توسط متکلمان به کار رفته *الجواهر الفرد* است؛ جوهر فرد، به نظریه خاص متکلمان بر می‌گردد که هستی را متشکل از جواهر فرد یا اتم‌ها می‌دانند. اتم‌ها تنها هستی‌مندهای قائم به ذات یا جواهر در هستی هستند.

۶. البته به سادگی قابل مشاهده است که در کتابهایی مانند *المباحث المشرقیة* از موضع مشائیان دفاع کرده و در کتب آخرین خود مانند *المطالب العالیة* از آنها دفاع کرده است. ولیکن حتی در مقام دفاع هم از طرح اشکالات وارد خودداری ننموده و همه ضعف‌ها و کاستی را نیز ذکر کرده است. (افتخاری، ۱۳۸۶: ۷۰-۱۴۰، در این رساله رویکرد فخر رازی در این دو کتاب مقایسه شده‌اند.)

۷. این اشکالی است که فخر رازی در زمانی که اتم‌گرا نبوده بر ضد اتم‌گرایان مطرح می‌کند. (رازی، *المباحث المشرقیة*، ۱۹۹۰ ج ۲/ ۴۱). در کتبی که او در دفاع از اتم‌گرایی نوشته نیز، ذکر کرده است که بهتر است متکلمان بر این برهان تاکید نکنند (رازی، *اثبات*، ۲۰۱۷: ۲۳۶) و (رازی، *المطالب العالیة*، ۱۹۸۷: ج ۶/ ۵۲-۵۳).

۸. هر چند که بعضاً ادعا شود که اتم‌ها بعدی ندارند. این استدلال در اصل متعلق به ارسطو است که شبهه تماس مشهور است. (Aristotle, Physics, 2005:138-139 (Bekker: 231b6))

۱۰. اما اتم‌گراها در این مسئله دچار تشدد و اختلاف بسیار بوده‌اند. از متون اینطور برداشت می‌شود که نظر فخر رازی مبنی بر بعد دار بودن اتم‌ها است. (Eftekhari, 2017: 121)

۱۱. ترجمه شده از متن اصلی:

«واعلم: أن الهندسة من أوله إلى آخره، يبطل القول بالجواهر الفرد. والذي شرحناه في هذا الموضع، هو قليل من كثير. فمن أثبت الجواهر الفرد، وجب عليه الطعن في علوم الهندسة.» (الرازی، *المطالب العالیة*، ۱۹۸۷، ج ۷: ۱۶۶)

۱۲. لازم به ذکر است که فخر رازی در دفاع از اتمگرایی بیشتر بر برهان حرکت تکیه دارد. او با حرکت ارسطویی-ابن سینایی مخالف بوده است و آشکارا از نظریه حرکت اتمگرایی کلام به عنوان نظریه برتر دفاع نموده است. به این برهان عمده ترین دلیل دفاع فخر رازی بر اتمگرایی هندسی است، که پرداختن به آن خارج از موضوع این مقاله است. (Eftekhari, 2017: 72-84)

۱۳. برای اثبات این ادعا، فخر رازی مثالی از چند ضلعی‌ها آورده است. وی تعمیم دادن حکم برای اضلاع با تعداد کم، به تعداد اضلاعی که به سمت بی‌نهایت میل می‌کنند را که نوعی از استقرا است ضعیف می‌داند و همین نکته را ادله ای برای نقصان عقل بشری عنوان می‌کند.

وأما أصحاب علوم المخروطات، فقد تكلفوا طريقة في إثبات المسبوعا المتسوعاً ما البقية في موقف العجز والقصور. فقد ظهر بما ذكرنا: آدالعقول البشرية قاصرة، والأفهام الإنسانية غير وافية بإدراك حقائق الأشياء إلا في القليل القليل من الكثير الكثير في معرفة هذه المحسوسات فما ظنك بالعقل عند طلوع النورالاهيه (وسطوع) الأضواء الصمدية؟ (الرازي، المطالب العالية، ۱۹۸۷: ج ۱/ ۶۶)

۱۴. ترجمه از متن اصلی:

«فقول: الحق، أن جوهر الفرد. لا كرة و لا مضع. لأن هذا أنما يعقل فيما مؤلفان من الجوانب و البعض. والجوهر الفرد أليس كذلك. فلا يمكن وصفه بشيء من هذه الصفات.» (الرازي، ۱۹۸۷: ج ۱/ ۶۶)

۱۵. در کتاب *اثبات*، فخر رازی، این مسائل را ذیل تشنیعات آورده است. به این مفهوم که اگر اتم را نپذیریم مجبوریم، به این نتایج شنیع، (یعنی نقض اصول بدیهی و پذیرفته شده) تن بدیم. (رازی، *اثبات*، ۲۰۱۷: ۲۵۰-۲۵۲)

۱۶. متن اصلی:

إن القول بقبول القسمة إلى غير النهاية، يقتضى وجود مقدارين مختلفين في العظم. ثم إن الزائد يتناقض إلى غير النهاية، والناقض يتزايد إلى غير النهاية. ثم لا يبلغ هذا الناقض مع التزايد أبداً إلى حد ذلك الزائد، مع تناقصه أبداً. ومعلوم أن ذلك بعيد في العقول. (الرازي، المطالب العالية، ۱۹۸۷، ج ۶: ۷۶)

۱۷. این مسئله قابل پیگیری است که از چه از زمانی بحث زاویه بین دایره و خط و تکامل پیدا کرد. آنچه در کتاب اصول اقلیدس موجود است، در بخش تعاریف مقاله سوم، این زاویه تعریف شده است. (Euclid, 1908, Voll/II:1, 8<sup>th</sup> definition) و همچنین مسئله ای فخر رازی عنوان کرده در قضیه شانزدهم (فخر رازی به اشتباه گفته پانزدهم و یا نسخه ای که فخر رازی در دست داشته پانزدهم بوده است). عنوان شده است (اثبات نمی‌شود). به نظر می‌رسد که در قرون وسطی نیز همچنان بحث زاویه شاخکی باز بوده است. (Wertz, 2001) در این مقاله، آنچه مدنظر است، اینکه چه طور در چارچوب استدلالی فخر رازی، این زاویه می‌توانسته غیرصفر باشد و کمترین مقدار زاویه باشد.

۱۸. فخر رازی، در این برهان با استناد به اقلیدس، از زاویه داخلی دایره، یا متمم همان زاویه شاخکی از بزرگترین زاویه ممکن حاده نیز اسم برده و متناظراً این استدلال را نیز برای آن در صورت کوچک شدن این زاویه متمم، تعمیم داده است. ولیکن در بررسی‌های انجام شده، به مستندی که در اقلیدس ذکر شده باشد، برنخوردم، و باید بررسی بیشتری انجام گیرد.

۱۹. اصل برهان:

«إن «أبلونیوس» بین فی کتاب «المخروطات» وجود خطین بتقاربان أبداً و لا يلتقیان و ذلك يدل إلی غیر النهایة، لا یوجب حصول الالتقاء.» (الرازی، المطالب العالیة ۱۹۸۷: ج ۶/ ۷۸)

۲۰. متن اصلی:

إن كل مضلع، فإنه إذا أخرج ضلعه إلی خارج، حدثت زاویة فی الخارج. و كلما كانت الأضلاع أكثر، كانت الزاویة الداخلة أوسع، فصارت الزاویة الحادثة فی الخارج أزيد. ولما كان لا نهایة لمراتب المضلعات، فكذلك لا نهایة لمراتب ذلك القرب. مع أنه يستحيل أن یصل إلیه. إذ لو وصل إلیه، لاتصل أحد الضلعین بالضلع الآخر. علی الإستقامة. وحينئذ یصیر الخط كله مستقیماً، ویصیر المضلع غیر مضلع. (رازی، المطالب العالیة، ۱۹۸۷: ج ۶/ص ۷۸-۷۹).

۲۱. از متن اصلی:

إن علم الهندسة مبنی علی نفی الجوهر الفرد. إذا ثبت هذا، فلنفرض سطحاً مربعاً. بین أحد الضلعین والآخر بعد معین. فإذا نصفنا ذلك السطح، صار هذا الخط الذي أوجب التنصیف، أقرب إلی أحد الطرفين. فإذا نصفنا ذلك النصف، صار هذا الخط الثاني، أقرب. ثم لما كان ذلك السطح یقبل التنصیف إلی غیر النهایة، فحينئذ یكون الخط القاسم، لا یزال یقرب من ذلك الطرف إلی غیر النهایة. و البتة لا یصل إلیه. إذ لو وصل إلیه، لكان احتمال قبول ذلك السطح للقسمة متناهياً. و قد فرضناه غیر متناه. فثبت: وجود خطین يتقاربان أبداً و لا يلتقیان. (الرازی، المطالب العالیة، ۱۹۸۷: ج ۶/ ۷۸)

۲۲. متن اصلی:

إن «أبى علی بن الهیثم» رسالة فی بیان أن كل مقدار یفصل منه جزء من أجزائه، ویفصل من الباقي جزء: نسبة إلی الجزء الأول، مثل نسبة الجزء الأول إلی الكل. ویفعل ذلك دائماً. فإن [جميع] تلك الأجزاء المأخوذة علی تلك النسبة إلی غیر النهایة، إذا جمعت فلیس تبلغ جملتها إلی الجزء، الذي كان أعظم من الجزء الأول: مثاله: إن العشر، و عشر العشر، و عشر عشر العشر. و هكذا إلی أبعد الغایات، أبغ النهایات. فإنه لیس یبلغ مجموعها إلی التسع. وكذلك: التسع، و تسع التسع، إلی أبغ الغایات. لا یبلغ مجموعها إلی الثمن. و هكذا جميع الأجزاء. وأنت تعلم أن قسمة الواحد إلی الكسور، لا یحتمله إلا الواحد المقداری. و الخط القاسم له إلی تلك الأجزاء، لا یزال یقرب من طرفه، مع أنه لا یصل البتة إلیه. (الرازی، المطالب العالیة، ۱۹۸۷: ج ۶/ ۸۲-۸۱)

۲۳. این قضیه بین دو خط راست برقرار است، ولیکن اقلیدس خط راست را تنها فاصله واصل بین دو نقطه معرفی کرده است؛ نه حتی کوتاهترین فاصله. (Euclid, 1908, Vol/I: 153) از این رو، بعدها مورخان و ریاضی دانان درباره مشکل دار بودن تعریف خط راست و مشکل دار بودن اصول موضوعه مرتبط با خط راست در اصول اقلیدس بحث کرده اند. (هیث، ۱۳۸۱: ۲۰۱) و (Coxeter, 1998: 2)

۲۴. در مورد تاثیرات و کارهایی که فخر رازی در رابطه با آثار ابن هیثم داشته، رجوع شود که معصومی (۱۳۹۲). در این مقاله، به طور مفصل به اقتباس هایی که فخر رازی در آثار خود از ابن هیثم داشته، و نیز دخل و تصرفاتی که در آن داشته است پرداخته شده است. از جمله مطالبی که مکمل این بحث است، براهینی است که بر ضد اتمگرایی به کار رفته که در کتاب بی نهایت کوچکها از رشدی راشد نیز بحث شده اند (برهان تقسیم خط) که در این مقاله به آن پرداخته نشده است، در این مقاله هدف بیشتر تلاش هندسی فخر رازی در برهان های اثبات کننده است.

۲۵. در این مقاله، مجالی نبود که بحث و بررسی شود که این انتقاد فخر رازی بر ابن هیثم، دقیقاً به چه چیزی برمی گردد. فخر رازی، یک انتقاد کلی بر هندسه اقلیدسی دارد که بحث عمده اش بر مفهوم دایره استوار است و در یک فصل از *المطالب العالیة (رازی، المطالب العالیة، ۱۹۷۸: ج ۱۳۹/۶-۱۴۶)* و *اثبات (رازی، اثبات، ۲۰۱۷: ۲۷۲-۲۷۳)* به آن پرداخته است که در مقاله به آن اشاره شد. حال اینکه مقصود فخر رازی همین انتقاد است، یا به برهان خاصی اشاره دارد، نیاز به بررسی بیشتر هم در آثار ابن هیثم و هم خود فخر رازی دارد.

۲۶. چارچوب طبقه بندی علمی پسا-ارسطویی عمدتاً معیار ارسطو را در طبقه بندی علم در نظر می گیرد. هندسه بر طبق تعریف ارسطو، علم پرداختن به صورت جوهر است در صورتی که مجرد شوند، اگر این جوهر از آن جهت که متحرکند در نظر گرفته شود (*qua mobile*)، دیگر علم فیزیک است نه هندسه. هندسه یا ریاضیات به مفهوم عام، تهی کردن از جنبه های فیزیکی است. (*abstract away from physical aspects*) (Studemann, 2002)

۲۷. این لم را می توان برای هر نسبتی به کار برد. اینجا یک دوم بوده، به همین شکل یک سوم، یک چهارم الی آخر.. می تواند باشد.

۲۸. ترجمه شده از متن اصلی:

Given two unequal magnitudes, if from the greater [a part] to be subtracted greater than the half, if from the remainder[a part] greater than the half be subtracted, and so on continually, there will be left some magnitude which will be less than the lesser given magnitude. (Heath, THE WORKS of ARCHIMEDES, 1897: P: xlviij)

۲۹. همین امکان، به ریاضی دان اجازه بدست آوردن حد مشخص یک کمیت را می دهد.



۳۰. نحوه تقسیم و متمایز شدن، از نقطه نظر متکلمان و مشائیان متفاوت است. فیلسوفان برای تقسیم شدن سه راه را عنوان کرده اند: ۱- وهم؛ ۲- قطع یا برش؛ ۳- اختلاف اعراض. با همه اختلافات، هم فیلسوفان و متکلمان، در اینکه اختلاف اعراض، تمایز ایجاد می‌کنند، با هم وفاق داشته اند. اختلاف اعراض یعنی اینکه وقتی در یک چیز واحد، اعراضی با ویژگی‌های متفاوت مثل سرما و گرما، یا سپیدی و سیاهی حلول کند، سبب تمایز یا تقسیم در جسم واحد می‌شود؛ حتی اگر آن دو بخش با ویژگی‌های متفاوت به لحاظ فیزیکی از هم جدا نشده باشند (انفصال/النفکاکیه). فخر رازی در فصل ۷، مقاله اول، جلد ششم از *المطالب العالیة مفصل استدلال کرده* است که تقسیم ایجاد شده با اختلاف اعراض، بالفعل است، نه بالقوه. (رازی، *المطالب العالیة*، ۱۹۸۷: ج ۶۱/۶-۶۷) یک المان خط یا سطح یا هر کمیتی، وقتی با یک معادله و مقدار و مختصات معین شده باشد دارای عرض متفاوت با المان همسایه‌اش است، در نتیجه، با ادله فخر رازی یک المان بالفعل است، نه بالقوه. (Eftekhari, 2017:109-111)

۳۱. البته آنچه فخر رازی انجام داده است در زمان اون تنها این استدلال بوده که حرکت مجموعه از تغییرات جزئی است و هنوز بسیار دوره بوده استتایی جایی که یک منحنی، یک حرکت را به لحاظ کمی توصیف کند. اگر چه استدلال او بسیار خامتر است از آنچه بعدها لاینیز و سایر ریاضیدانان فیزیکدان انجام داده اند، اما دغدغه او در مورد بالفعل بودن این تغییرات جزئی، ریشه یکسانی دارد.

۳۲. البته تفاوت‌های اساسی بین تبیین لاینیتز و کوزایی وجود دارد. اما در بحث بالفعل بودن، مشترک هستند. (Bell, 2006: 92)

۳۳. آنچه از متون فخر رازی متاخر بر می‌آید، فخر رازی، بالقوه بودن را چون دیگر متکلمان اشعری رد می‌کند: هر هستمندی یا هست یا نیست. اگر هست، در یک آن به اذن فاعل مختار و مطلق، هست می‌شود و بالفعل است و اگر نیست، دیگر نیست، پس وجود بالقوه معنایی ندارد. نکته قابل تاملی در این بحث نظر اینجانب را جلب نمود؛ توجه و علاقه رازی به نظام استدلالی است که ظاهراً با نظام استدلالی خود فخر رازی ناسازگار است (بنا به تاکید خود فخر رازی). نظامی که بر مبانی پیوسته‌گرایی و تقسیمات بالقوه خط و حرکت استوار است؛ و فخر رازی تلاش کرده که تلفیقی بین این دو تبیین ناسازگار ایجاد نماید. وی در نهایت به دیدگاهی دست می‌یابد که اگر چه به سرانجامی که انتظار دارد نمی‌رسد، ولی می‌توان آن را در تحول پیوسته‌گرایی به بحث گذاشت. به طور قطع با بررسی آراء دیگر فیلسوفان مسلمان متاخر از فخر رازی، به خصوص آندسته از فیلسوفانی که در چارچوب مبانی پیوسته‌گرایی، نظریات خود را پروراندند، شاید بتوان نظریات و تبیین‌های نزدیکتری به کوزایی/لاینیتز یافت.

۳۴. کوزایی می‌خواست به روش افناء مسئله تربیع دایره را حل کند؛ در استدلال کوزایی، موارد بسیاری از استدلال‌ات مشابه فخر رازی را می‌توان یافت چون زاویه شاخکی. به اضافه اینکه

کوزایی هم یک متکلم مسیحی باورمند به اتمگرایی در طبیعت چون فخر رازی بود. اما آیا کوزایی دسترسی به آثار فخر رازی داشته است؟ پاسخ این سوال را باید در میان نسخه‌های ترجمه شده فخر رازی به عبری و لاتین، یا در جای دیگر یافت.

۳۵. عدی ستیه، در مقاله‌اش، چارچوبی که فخر رازی برای بررسی طبیعت داشته است را در نظر می‌گیرد. او اشاره کرده که متکلمان هندسه اقلیدسی را برای محاسباتی چون قبله، می پذیرفتند ولیکن هندسه خود آنها ناقلایدسی بوده است. وی در این مقاله به لحاظ ریاضی به بررسی و توضیح این عبارت پرداخته است، در نتیجه، چندان مشخص نیست که منظور از هندسه ناقلایدسی متکلمان چیست. اگر منظور نگاه متفاوت به هندسه و کارکرد آن است مشکلی نیست. ولی اگر منظور داشتن یک دیسیپلین صورتبندی شده به عنوان علم هندسه که مسائلی را حل کند، قطعاً اغراق گونه است. (Setia, 2006)

۳۶. در پانوش ۲۸ توضیح داده شده است.

۳۷. اینجانب ترجیح می‌دهم که عبارت غیر اقلیدسی را به جای ناقلایدسی بکار ببرم تا از خلط بحث و اشتباه با مفهوم رایج هندسه ناقلایدسی در تاریخ ریاضی بپرهیزم.

۳۸. جدای از کارهای برجسته ای که ریاضی دانان دوره اسلامی، چون خوارزمی، خیام یا ابن هیثم در خود مباحث ریاضیات انجام داده اند، از نظر مورخین تاریخ ریاضیات، اهمیت دوره اسلامی، به واسطه تغییر نگرش فلسفی نسبت به مفاهیم ریاضی است. برای مثال، مسلمانان قادر شدند که اشکال هندسی و روابط حساب را هم ارز کرده و در نتیجه، شاخه‌هایی چون جبر و هندسه تحلیلی در این دوره پایه ریزی شد. (معصومی همدانی، فاطمه سواد، ۱۳۹۳).

## کتاب‌نامه

### منابع اصلی

الرازی، فخرالدین، المطالب العالیة من العلم الإلهی، تصحیح أحمد حجازی السقا، دار الکتب العربی، ۱۹۸۷، بیروت.

الرازی، فخرالدین، إثبات جزء الذی لا یتجزی، تصحیح و ترجمه بنفشه افتخاری، دانشگاه لیون ۳ (رساله دکتری)، ۲۰۱۷، لیون.

الرازی، فخر الدین، المباحث المشرقیة فی العلم الإلهیات والطبیعیات، تصحیح محمد معتصم بالله البغدادی، دارالکتب العربی، ۱۹۹۰، بیروت.

### منابع ثانویه

افتخاری، بنفشه، نظریه جزء لا یتجزی در طبیعیات فخر رازی، رساله کارشناسی ارشد، پژوهشکده تاریخ علم دانشگاه تهران، بهمن ۱۳۸۶.

ناسازگاری پیوسته‌گرایی هندسی و اتم‌گرایی کلام در آرا فخر رازی ۲۷

معصومی همدانی، حسین، سوادى، فاطمه، «جبر و مقابله»، دانشنامه جهان اسلام، جلد نهم، بنیاد دایرة المعارف اسلامى، ۱۳۹۳ تهران.

معصومی همدانی، حسین، «متکلم و ریاضی دان: فخر رازی و آثار ابن هیثم»، تاریخ علم، دوره ۱۱، شماره ۱، بهار و تابستان ۱۳۹۲، ص ۱۳۹-۱۵۷.

معصومی همدانی، حسین، «میان فلسفه و کلام: بحثی در آراء طبیعى فخر رازی»، معارف، دوره اول، فروردین ۱۳۶۵، ص ۲۷۹-۱۹۵.

هیث، سرتامس لیتل، تاریخ ریاضیات یونان، ترجمه احمد آرام، انتشارات علمى فرهنگى، چاپ اول (۱۳۸۱)، تهران.

Aristotle, PHYSICS, Translated by: Waterfield Robin (English), OXFORD University Press, 2005, New York.

Bell, John L., The Continuous and the Infinitesimal in Mathematics and Philosophy, Polimetria, 2006, Milano.

Berryman Sylvia, "Ancient Atomism", Stanford encyclopedia of philosophy, 2011.

<http://plato.stanford.edu/entries/atomism-ancient/>

Coxeter, H.S.M., Non-Euclidean Geometry, Mathematical Association of America, Sixth Edition, 1998, Washington.

Eftekhari, Banafsheh, An Introduction to the Book "Proving Atomism", University of Lyon III (Phd Thesis), 2017, Lyon.

Euclid, Elements, T. L. Heath, Cambridge University Press, 1908, Cambridge.

Heath, T.L., THE WORKS of ARCHIMEDES, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1897, Cambridge.

Jorgensen, Larry M., "The Principle of Continuity and Leibniz's Theory of Consciousness", Journal of the history of philosophy, 47:2 April 2009, 223-248.

Pines, Shlomo, Studies in Islamic Atomism, Translated by Schwarz Michael, The Magness Press, 1997, Jerusalem.

Setia, Adi, "Atomism versus Hylomorphism in the kalam of al-Fakhr al-Din al-Razi: a preliminary survey of the Matalib al-'Aliyyah", Islam & Science, Vol:4, No:2, winter 2006, P:113-140.

Rashed, Marwan, "Natural Philosophy", The Cambridge Companion To Arabic Philosophy, Edited by Peter Adamson, Richard C Taylor, Cambridge University Press, 2005, P:287-307.

Studtmann Paul, "The Body Problem in Aristotle", Apeiron و 35 (3), 2002, P:211-234.

Wertz, Jr, William.F, "Nicolaus of Cusa's On the Quadrature of the Circle", FIDELIO, Vol X, No 2, summer 2001, P:30-41.