

## ارائه مدل ریاضی برای زمانبندی پروژه با محدودیت منابع در حالت چند مد و با در نظر گرفتن جریان‌های نقدی تنزیل یافته

امین کرامتی،\* مجید اسماعیلیان،\*\* مسعود ربیعه\*\*\*

تاریخ دریافت (۹۳/۱۰/۲۱) تاریخ پذیرش (۹۴/۲/۱۴)

### چکیده

در این پژوهش مدل ریاضی جهت زمانبندی پروژه‌هایی با محدودیت منابع در حالت چند مد و با هدف بیشینه سازی NPV ارائه شده است. مدل ارائه شده برگرفته از مسئله MRCPSP- GPR می‌باشد. در این پژوهش ابتدا یک مدل ریاضی که قادر به ارائه جواب دقیق باشد جهت حل نمودن مسائل MRCPSP- GPR ارائه خواهد شد، سپس مدل برای محاسبه هزینه اضافه کاری، در نظر گرفتن جریمه دیرکرد، پاداش زودکرد و تاثیر آن بر روی NPV پروژه تعمیم می‌یابد. در نظر گرفتن هزینه‌های اضافه کاری و پاداش و جریمه زمان تحویل به طور همزمان در تصمیم‌گیری، زمانبندی و مقدار واقعی NPV پروژه تاثیر بسیاری خواهد داشت. برای نزدیکتر شدن نتیجه مدل به شرایط واقعی، دو سیاست پرداخت کلاسیک در قالب تابع هدف مدل ارائه شده است. جهت اثبات عملکرد مدل یک مسئله استاندارد با دو سیاست پرداخت مدل‌سازی و حل شده است. در نهایت، ۳۶ نمونه پروژه‌ی استاندارد با سائزها و پارامترهای مختلف توسط مدل زمانبندی شده و نتایج آن مورد تحلیل قرار گرفت.

**کلمات کلیدی:** جایابی جعبه، مد چند گانه، سیاست پرداخت، هزینه اضافه کاری، ارزش فعلی خالص

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی  
پرتال جامع علوم انسانی

\* کارشناسی ارشد مدیریت صنعتی دانشگاه اصفهان

\*\* استادیار گروه مدیریت دانشگاه اصفهان (نویسنده مسئول) M.Esmaelian@ase.ui.ac.ir

\*\*\* استادیار گروه مدیریت صنعتی دانشگاه شهید بهشتی

## مقدمه

اجرای به موقع فعالیت‌های یک پروژه، نیازمند برنامه‌ریزی و مدیریت موثر و یکپارچه در تنظیم دقیق زمان انجام فعالیت‌های پروژه می‌باشد. اگرچه کارهای بسیاری بر روی مساله زمانبندی پروژه با محدودیت منابع (RCPSP) با هدف کمینه کردن مدت زمان پروژه انجام گرفته است، اما مساله RCPSP با هدف بیشینه سازی ارزش خالص فعلی نیز از جمله مسائل با اهمیت مدیریت پروژه می‌باشد. هنگامی که جریان‌های نقدی مشخصی در طول پروژه و به صورت هزینه برای انجام فعالیت‌ها پرداخت می‌شوند و پرداخت‌های در جریان نیز برای تکمیل اجزاء پروژه صورت پذیرد، معیار ارزش خالص فعلی (NPV) معیاری بسیار مهم و کاربردی در زمانبندی پروژه می‌باشد (اولسوی، ۲۰۰۰). بر اساس این معیار زمانبندی پروژه بر مبنای مسیر بحرانی هزینه صورت می‌پذیرد. راسل اولین بار جریان نقدی را در مسائل زمانبندی وارد نمود. او یک مسئله بیشینه‌سازی NPV بدون در نظر گرفتن محدودیت منابع را در نظر گرفت و به منظور حل آن یک روش برنامه‌ریزی غیر خطی ارائه نمود (راسل، ۱۹۷۰). درش و پاترسون یک روش برنامه‌ریزی عدد صحیح صفر و یک برای حل مسائل زمانبندی پروژه با محدودیت سرمایه ارائه دادند که پروژه‌های ۱۵ تا ۲۵ فعالیت را به طور بهینه حل می‌کرد (درش، ۱۹۷۷). ایسملی و ایرنگاک (۱۹۹۶) روش شاخه و کران را برای حل RCPSP ارائه دادند. وانهوک و همکاران یک الگوریتم شاخه و کران first depth برای حل مسائل با داشتن محدودیت منابع تجدید شدنی به منظور بیشینه سازی NPV پروژه ارائه کرده اند (وانهوک، ۲۰۰۱). اولسوی و سیبلی یک الگوریتم ژنتیک دو حلقه‌ای ارائه کردند که حلقه بیرونی نشاندهنده کارفرما و حلقه داخلی نشاندهنده پیمانکار می‌باشد. در حلقه بیرونی کارفرما بر اساس منافع خود یک نحوه پرداخت بر روی رویدادها ارائه می‌کند با این نحوه پرداخت پیمانکار طوری فعالیت‌ها را زمانبندی می‌کند که NPV اش بیشینه گردد. این دو حلقه به صورت مذاکره جواب‌های خود را رد و بدل می‌کنند تا سرانجام به یک جواب منصفانه که هر دو به یک میزان از جواب ایده‌آل خود راضی شوند دست یابند. جواب ایده‌آل کارفرما از

پرداخت مبلغ کل قرار داد در پایان پروژه و جواب ایده آل پیمانکار از دریافت مبلغ کل قرار داد در ابتدای پروژه، بدست می آید (اولسوی، ۲۰۰۰). میکا و همکاران با استفاده از شبیه سازی تبرید و جست و جوی ممنوع و در نظر گرفتن چهار نوع پرداختی از طرف کارفرما به پیمانکار که عبارتند از پرداخت مبلغ کل قرارداد در انتهای پروژه، پرداخت در تاریخ اتمام فعالیتها، پرداخت در بازه های زمانی یکسان و پرداخت به ازای پیشرفت پروژه سعی نموده اند که NPV پیمانکار را بیشینه نمایند (میکا، ۲۰۰۵).

مد اجرایی به معنای روش های مختلف انجام فعالیت است، به عنوان مثال یک فعالیت می تواند در ۲ روز توسط ۳ کارگر انجام شود یا ۶ کارگر استفاده کرد و یک روزه کار را به اتمام رساند. هدف در مسائل زمانبندی پروژه با محدودیت منابع در حالت چند مد، تخصیص منابع و یا مجموعه ای از منابع با ظرفیت محدود به یکی از مدهای اجرایی فعالیتها با رعایت روابط پیشینازی و برای رسیدن به هدف یا اهداف از پیش تعیین شده می باشد. کولهو مدلی ارائه داد برای حل مسئله MRCPS که در آن منابع از هر دو نوع تجدیدپذیر و ناپذیر بودند. او تابع هدف خود را مینیمم کردن زمان اتمام پروژه در نظر گرفت و برای تعیین بهترین مد از حل کننده SAT استفاده نمود (کولهو، ۲۰۱۱). چن مدل MRCPS را تحت شرایط احتمالی بررسی نمود. در مدل ارائه شده، هزینه ها و مدت زمان انجام هر فعالیت، متغیرهای تصادفی در نظر گرفته شده است. هدف در این مدل ماکزیمم نمودن NPV پروژه است و برای حل مدل خود از کلونی مورچگان مونت کارلو استفاده نمود. در نهایت مدل برای چندین مثال تست و تحلیل گردید (چن، ۲۰۱۲). (بیسکیسی و همکاران ۲۰۱۵)، مدلی برای حل مسائل زمانبندی در حالت چند مد ارائه نمودند که محدودیت بودجه را نیز در نظر گرفته بودند؛ جهت حل مدل از دو الگوریتم دو فازی ژنتیک و الگوریتم ژنتیک یک پارچه استفاده نمودند و در نهایت جواب های این دو الگوریتم را مقایسه کردند. (چنگ و همکاران، ۲۰۱۵)، مدلی ریاضی برای زمانبندی مسائل چند مد ارائه نمودند که هر دو منابع تجدیدپذیر و ناپذیر را شامل می شود و هدف مدل مینیمم نمودن زمان اتمام پروژه است. همچنین (افشار، ۲۰۱۴)، مدلی ارائه

نمود که هدف آن نیز مینیمم سازی زمان اجرای پروژه است و برای حل مدل از روش شبیه-سازی تبرییدی استفاده نموده است و مسائل نمونه‌ای را مورد محاسبه قرار داد. در مدل‌هایی که تاکنون ارائه شده مدل مبتنی بر وجود یک زمانبندی اولیه برای فعالیت‌ها است و مدل تنها بهترین مد اجرایی فعالیت‌ها را بدست می‌آورد، در صورتی که در مدلی که ارائه خواهد شد علاوه بر تعیین مناسب‌ترین مد هر فعالیت، زمانبندی فعالیت‌ها نیز با در نظر گرفتن ماکزیمم NPV توسط همین مدل بدست خواهد آمد. علاوه بر آن جهت گسترش مدل و نزدیک شدن به شرایط واقعی، عوامل تنبیه به ازای دیر کرد، تشویق پیمانکار در صورت اتمام پروژه زودتر از افق برنامه ریزی و همچنین امکان زمانبندی با در نظر گرفتن اضافه کاری منابع تجدیدپذیر در مدل در نظر گرفته شده است.

مدلی که ارائه خواهد شد برگرفته شده از مسئله جایدهی جعبه‌ها می‌باشد. جایدهی جعبه‌ها یکی از مسائل بنیادی در بهینه سازی ترکیبی است. این مسئله از جمله مسائل NP-hard است که شامل مسئله کوله پشتی هم می‌شود (سبزه پرور، ۲۰۰۸).

هدف مسئله جایدهی جعبه‌ها جایدهی  $n$  مستطیل در ابعاد مختلف در یک مستطیل بزرگتر است به صورتی که کمترین فضای ممکن را اشغال کنند (هوانگ، ۲۰۰۷). منابعی که در مسئله در نظر گرفته شده همه از نوع تجدیدپذیر هستند. ابتدا برای نمایش مسئله به صورت سه بعدی تعداد منابع تجدید پذیر را دو ( $k=2$ ) در نظر می‌گیریم و بعد از تشریح می‌توان مسئله را به بیش از دو منبع تجدیدپذیر هم بسط داد. سپس چگونگی محاسبه فرمول تابع هدف مدل جهت بدست آوردن حداکثر NPV را شرح خواهیم داد که از جنبه‌های جدید مدل می‌باشد، چرا که تابع هدف و محدودیت‌ها قادر به محاسبه جواب دقیق خواهند بود. همچنین در ادامه چگونگی محاسبه پاداش و تنبیه پیمانکار را در ازای تحویل یا عدم تحویل به موقع پروژه را به علاوه محاسبات مربوط به هزینه و زمانبندی اضافه کاری منابع را شرح خواهیم داد. در نظر گرفتن عوامل پاداش و تنبیه نسبت به اتمام پروژه و اعمال اضافه کاری منابع و هر چهار

نوع رابطه پیشینازی (GPR) با هدف پیشینه سازی ارزش خالص فعلی پروژه توسط مدلی که قادر به ارائه جواب دقیق باشد، از جمله جنبه‌های نوآورانه مدل می‌باشد.

### مقایسه مدل ارائه شده با مدل‌های پیشین

دیریک و هرلوتن، بر اساس مطالعات قبلی تالبوت مدلی صفر و یک ارائه کردند. از آن جهت که برای حل مدل تالبوت و دیریک ابتدا احتیاج به تولید زمانبندی می‌باشد، با استفاده از الگوریتم فلویید وارشال زودترین و دیرترین تاریخ‌های شروع محاسبه می‌شود. سپس با استفاده از مقادیر ES و LS محاسبه شده مدل ریاضی حل می‌شود. اگر زمانبندی تولید شده مناسب بود بدین معنی که هم کوتاه‌ترین زمان اتمام پروژه بدست آمده باشد و هم محدودیت‌های منابع ارضاء شوند فرایند حل به اتمام رسیده است، در غیر این صورت فرایند حل از تولید زمانبندی تا بدست آوردن زمانبندی بهینه مجدداً انجام خواهد شد. در مدل ارائه شده احتیاجی به زمانبندی ابتدایی نیست و مدل همزمان تولید زمانبندی و انتخاب بهترین مدل را انجام می‌دهد (دیریک و هرلوتن، ۱۹۹۹). در زمانبندی پروژه چهار نوع شیوه کلاسیک پرداخت وجود دارد که عبارتند از، پرداخت به شیوه قیمت مجموع، پرداخت در زمان وقوع رویدادها، پرداخت در فواصل زمانی مساوی و پرداخت مستمر (میکا، ۲۰۰۵) (اولسوی، ۲۰۰۱). (سیفی، ۲۰۰۸) مدلی برگرفته از مدل دیریک، هرلوتن و تالبوت ارائه نمود که از جمله تفاوت‌های آن با مدل دیریک و تالبوت تابع هدف این مدل می‌باشد که جهت پیشینه سازی ارزش خالص فعلی پروژه ارائه شده است. جهت حل مدل صفر و یک ارائه شده توسط (سیفی، ۲۰۰۸) همانند مدل دیریک احتیاج به ایجاد برنامه زمانبندی است و سپس مدل با استفاده از یکی از روش‌های متاهیورستیک همچون الگوریتم ژنتیک، (شادرخ، ۲۰۰۷)، الگوریتم مورچگان، (چن، ۲۰۱۲)، و غیره محاسبه خواهد شد. از جمله روش‌های تولید زمانبندی جهت حل مسائل MRCPSDF توسط مدل‌های صفر و یک عبارتند از روش تولید زمانبندی سری (SS) و تولید زمانبندی موازی (PSS) (کلاسن، ۲۰۰۰) (کولیش، ۱۹۹۶). سیفی مدل (MRCPSDF) ذکر شده را با در نظر گرفتن هزینه نگهداری، پس از تولید زمانبندی

با استفاده از روش زمانبندی دوسویه سری، از طریق یک الگوریتم فرا ابتکاری شبیه‌سازی تبرید محاسبه نمود (سیفی، ۲۰۰۸). شادرخ و کیانفر یک مدل صفرو یک (RCPSP) را توسط الگوریتم ژنتیک محاسبه نمودند. همچنین از روش تولید زمانبندی سری (SSS) برای تولید کروموزم‌های الگوریتم استفاده نمودند، سپس بر اساس زمانبندی‌های تولید شده مدل ریاضی را محاسبه نمودند. واضح است که هسته اصلی محاسبه مدل‌های صفرو یک پیشین، تولید زمانبندی اولیه است و مدل خود به صورت یکپارچه قادر به زمانبندی و پیشینه‌سازی ارزش خالص فعلی پروژه نمی‌باشد. مدل ارائه شده علاوه بر عدم نیاز به تولید زمانبندی ابتدایی، می‌تواند زمانبندی را با هدف ماکزیم‌سازی ارزش خالص فعلی تولید کند که نشان‌دهنده دارا بودن توانایی محاسباتی کلیه مدل‌های پیشین است. همچنین توانایی محاسبه هزینه‌های مختلف مانند هزینه‌های اضافه کاری و جریمه تأخیر، مدل را از سایر مدل‌های پیشین متمایز می‌کند (شادرخ، ۲۰۰۷).

### ارائه مدل هندسی

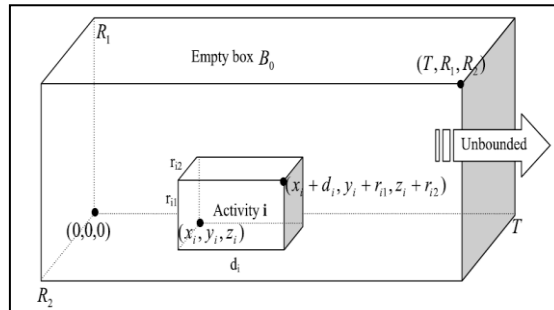
همانطور که قبلاً گفته شد، مدلی که ارائه خواهد شد برگرفته از تئوری جایدهی جعبه-ها (RPP) است. ابتدا تفاوت‌ها و شباهت‌های بین مسئله RPP و RCPSP به صورت خلاصه توضیح داده می‌شود، پس از آن چگونگی تشکیل یک مدل هندسی برای مسئله MRCPSG-GPR تشریح خواهد شد. نهایتاً مدل هندسی را جهت محاسبه NPV، ارزش فعلی پاداش و جریمه پیمانکار و هزینه ناشی از اضافه کاری بسط خواهیم داد.

### مدل هندسی و مسئله RCPSP

برای بیان مسئله در سه بعد ابتدا فرض بر این است که منابع تجدیدپذیر دو نوع هستند ( $k=2$ )، سپس می‌توان به تعداد بیشتری هم تعمیم داده شوند و هر عدد صحیحی را به عنوان تعداد منابع تجدیدپذیر در نظر گرفت ( $k=1,2,3,4$ ). باید به این نکته توجه کرد که مدل هندسی در

شرایطی مناسب است که توزیع منابع در طول انجام فعالیت به طور یکنواخت تعریف شده باشد. به عنوان مثال چنانچه تعداد منابع تجدیدپذیر یک فعالیت که به مدت دوروز به طول می انجامد سه عدد باشد، بدین مفهوم است که در هر کدام از این دو روز به مقدار سه عدد منبع در اختیار فعالیت است. با توجه به شکل ۱ هر کدام از مستطیل هایی (جعبه های کوچک) که باید مستقر شوند متناظر با فعالیت های پروژه هستند. همانطور که در شکل ۱ مشخص است مدت زمان انجام هر فعالیت برابر است با طول جعبه متناظر با آن فعالیت ( $length\ l_i=d_i$ ) و همچنین مقدار مصرف آن فعالیت از هر یک از منابع ۱ و ۲ ( $k=1,2$ ) به ترتیب برابر است با ارتفاع ( $height\ h_i=r_{i1}$ ) و عرض جعبه ( $wide\ w_i=r_{i2}$ ) متناظر با آن. البته باید در نظر داشت که در اینجا اندیس  $m_i$  به علت در نظر گرفتن یک حالت (مد) از مستطیل یا فعالیت از  $d_{imik}$  و  $r_{imik}$  حذف شده است. طول جعبه خالی بزرگتر نشان دهنده افق برنامه ریزی است که باید تعیین شود ( $T$ ) و عرض جعبه نشان دهنده مقدار ظرفیت منبع نوع دوم است ( $R_2$ ) و ارتفاع آن نشانگر مقدار ظرفیت منبع نوع اول است ( $R_1$ ) (سبزه پرور، ۲۰۰۸).

در شکل ۱ واضح است گوشه پایین، سمت چپ و مقرر در ضلع پشتی مستطیل  $B_0$  بیانگر نقطه صفر با مختصات  $(0,0,0)$  است و گوشه بالا، سمت راست و مقرر در ضلع جلویی دارای مختصات  $(T, R_1, R_2)$ . مختصات دو گوشه مستطیل کوچک هم به همین صورت تعریف می شوند که به ترتیب عبارتند از  $(x_i, y_i, z_i)$  و  $(x_i + d_i, y_i + r_{i1}, z_i + r_{i2})$ . در مسئله جایدهی جعبه ها با توجه به تعریف محدودیت هایی بر روی مختصات جعبه های، هدف انتخاب بهترین چیدمان جعبه ها در مستطیل بزرگتر است تا کمترین فضای ممکن اشغال شود (هوانگ، ۲۰۰۷).



شکل ۱: نمایش هندسی فعالیت در حالت تک مد و دو منبع (سبزه پرور، ۲۰۰۸)

### تعریف محدودیت‌های پیشنهادی عمومی (GPR)

چنانچه متغیر  $x_i$  را زمان شروع فعالیت  $i$  در نظر بگیریم در این صورت به سادگی می‌توان روابط پیشنهادی چهار گانه را بدون در نظر گرفتن مدهای فعالیت به صورت زیر نمایش داد (دیریک، ۱۹۹۹) (سبزه پرور، ۲۰۰۸).

$$x_i + SS \leq x_j \quad (i, j) \in ESS \quad (۱)$$

$$x_i + SF \leq x_j + d_j \quad (i, j) \in ESF \quad (۲)$$

$$x_i + d_i + FS \leq x_j \quad (i, j) \in EFS \quad (۳)$$

$$x_i + d_i + FS \leq x_j \quad (i, j) \in EFS \quad (۴)$$

واضح است زمان پایان فعالیت  $i$  ام به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$FT_i = x_i + d_i \quad (۵)$$

### تابع هدف

هدف مدل ریاضی ارائه شده توسط سبزه پرور کمیته‌سازی زمان اجرای پروژه می‌باشد (سبزه پرور، ۲۰۰۸)، در صورتی که در این پژوهش هدف مدل پیشنهادی کمیته‌سازی ارزش خالص فعلی پروژه است. در ارائه مدل فرض بر این است که مسئله از منظر پیمانکار دیده شود و همچنین هزینه‌های اجرای هر فعالیت در زمان تکمیل فعالیت پرداخت گردد. در مدل ارائه شده در این پژوهش با در نظر گرفتن رابطه (۵)، تابع هدف مدل برای پرداخت در زمان وقوع رویدادها و



با یک مد اجرایی به صورت رابطه (۶) قابل ارائه است. مشخص است که متغیر تصمیم در مدل جدید به جای  $X_{imt}$  در مدل‌های پیشین که متغیری باینری است، متغیر عدد صحیح  $X_i$  (زمان شروع فعالیت  $i$  ام) خواهد بود. مشهود است که در قسمت اول تابع هدف ارزش فعلی جریان‌های نقدی مثبت هر فعالیت با استفاده از فرمول نرخ تنزیل  $(1+\alpha)^{-(x_i+d_i)}$  در زمان پایان آن  $(x_i+d_i)$  محاسبه خواهد شد؛ در قسمت دوم تابع هدف هم به همین صورت ارزش فعلی جریان‌های نقدی منفی محاسبه می‌شود.

$$\sum_{i=1}^n CF_i^+ (1+\alpha)^{-(x_i+d_i)} - \sum_{i=1}^n \frac{CF_i^-}{(1+\alpha)^{(x_i+d_i)}} \quad (6)$$

همچنین تابع هدف مدل در حالت پرداخت قیمت مجموع با در نظر گرفتن یک مد برای اجرای هر فعالیت به صورت رابطه (۷) خواهد بود.

$$CF_{LSP} (1+\alpha)^{-FT_n} - \sum_{i=1}^n \frac{CF_i^-}{(1+\alpha)^{(x_i+d_i)}} \quad (7)$$

#### محدودیت‌های عدم همپوشانی

این محدودیت‌ها در مسئله جایدهی جعبه‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود (هوانگ، ۲۰۰۷):

۱. به دلیل جلوگیری از چرخش جعبه‌ها هر گوشه از آن‌ها باید موازی گوشه‌های متناظر با جعبه اصلی  $B_0$  باشد.

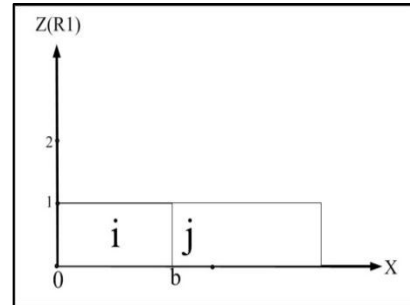
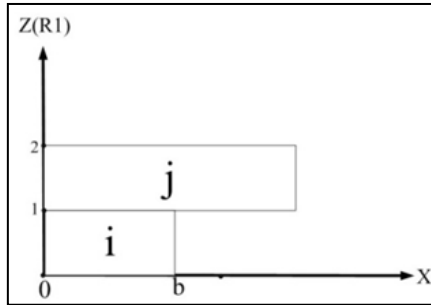
۲. بین هیچ دو جعبه‌ای همپوشانی وجود نداشته باشد.

#### تفاوت بین محدودیت‌های زمانبندی پروژه و مسئله جایدهی جعبه‌ها

زمانی که تنها یک منبع تجدید پذیر داشته باشیم ( $K=1$ ) مسئله می‌تواند همانند جایدهی جعبه‌ها فرموله شود (سبزه پروز، ۲۰۰۸). پیچیدگی مدل زمانی بیشتر می‌شود که تعداد منابع تجدیدپذیر دو یا بیشتر باشند. همانطور که ذکر شد در مسئله جایدهی جعبه‌ها، آن‌ها باید به گونه‌ای جایدهی شوند که بین هیچ دو جعبه‌ای همپوشانی به وجود نیاید بدین معنی که در

جعبه بزرگ، جعبه‌های کوچک می‌توانند از سمت هر چهار ضلع (اگر سه بعدی بررسی شود و جوه موازی با صفحات  $XY$ ,  $XZ$ ,  $YZ$  متعلق به هر جعبه) کنار یکدیگر قرار بگیرند بدون اینکه باعث همپوشانی یکدیگر شوند یا به عبارت دیگر به طور ناقص یا کامل جعبه‌ها داخل یکدیگر قرار گیرند. اما در مسئله زمانبندی، از سمت و جوه موازی با صفحه  $XY$  متعلق به هیچ دو جعبه‌ای (فعالیتی) نه باید همپوشانی وجود داشته باشد و نه آن‌ها در کنار یکدیگر قرار گیرند. این مطلب در رابطه با جوه موازی با صفحه  $XZ$  مربوط به هر دو جعبه هم صادق است، ولی هیچ مانعی برای قرار گیری جعبه‌ها (فعالیت‌ها) از طرف و جوه موازی با محور  $YZ$  مربوط به آن‌ها وجود ندارد (سبزه پرور، ۲۰۰۸). علت آن است، هنگامی که دو فعالیت از منابع مشترک استفاده می‌کنند اگر در یک بازه زمانی مشترک انجام شوند، چنانچه از جهت و جوه موازی با صفحه  $XY$  یا  $XZ$  یکدیگر را پوشش دهند (در کنار یکدیگر قرار گیرند) منطق مربوط به مصرف منابع تجدیدپذیر مشترکشان را نقض می‌کنند.

اگر زاویه دید از طرف محور  $Y$  به فعالیت‌ها فرض شود (شکل ۲) می‌توان دید که در بازه زمانی 0 تا  $b$  هر دو فعالیت از منبع تجدیدپذیر  $R1$  به میزان یک واحد مصرف کرده‌اند و کل منبع تجدید پذیر مصرفی همان یک واحد است که این منطقی نیست. برای خروج از این حالت چهار حالت برای قرار گرفتن این دو فعالیت نسبت به یکدیگر وجود دارد. یکی از حالات قرار گرفتن فعالیت  $J$  در بالای فعالیت  $I$  است که در این صورت در کل دو واحد منبع تجدید پذیر  $R1$  مصرف خواهد شد (شکل ۳). حالت دوم و سوم قرار گرفتن فعالیت  $i$  در سمت چپ یا راست  $J$  است و حالت چهارم قرار گرفتن فعالیت  $I$  روی فعالیت  $J$  می‌باشد. انتخاب هر کدام از این حالات وابسته است به مجموعه محدودیت‌ها و بهتر شدن تابع هدف. لازم به ذکر است که همین توضیحات راجب به پوشش یکدیگر فعالیت‌ها از طرف و جوه موازی با صفحه  $XY$  نیز صدق می‌کند، کافی است دو فعالیت که یکدیگر را پوشانده‌اند را از زاویه محور  $Z$  نگاه کرد و موقعیتشان را تجزیه و تحلیل نمود.



شکل ۲: نمای دو بعدی همپوشانی فعالیت‌های  $i$  و  $j$ . شکل ۳: اعمال محدودیت‌های عدم همپوشانی.

انتخاب یکی از چهار حالت ذکر شده را با در نظر داشتن یک مد اجرایی می‌توان با استفاده از محدودیت‌های (۸) تا (۱۲) ارائه کرد (سبزه پرور، ۲۰۰۸):

$$x_j \circ x_i \circ d_i + M * tx_{ij} \geq 0 \quad i < j, i=1, \dots, n-1, j=2, \dots, n \quad (۸)$$

$$x_i \circ x_j \circ d_j + M * tx_{ji} \geq 0 \quad i < j, i=1, \dots, n-1, j=2, \dots, n \quad (۹)$$

$$y_j \circ y_i \circ r_{i2} + M * ty_{ij} \geq 0 \quad i < j, i=1, \dots, n-1, j=2, \dots, n \quad (۱۰)$$

$$y_i \circ y_j \circ r_{j2} + M * ty_{ji} \geq 0 \quad i < j, i=1, \dots, n-1, j=2, \dots, n \quad (۱۱)$$

$$tx_{ij} + tx_{ji} + ty_{ij} + ty_{ji} = 3 \quad i < j, i=1, \dots, n-1, j=2, \dots, n \quad (۱۲)$$

در روابط بالا  $M$  نشان‌دهنده عدد بزرگ است. روابط بالا اجازه همپوشانی و قرار گرفتن فعالیت‌ها (جعبه‌ها) در کنار یکدیگر از طرف وجوه موازی صفحه  $XY$  را نمی‌دهد، همچنین جهت عدم همپوشانی و قرارگیری آن‌ها از سمت وجوه موازی با صفحه  $XZ$  در صورتی که دو منبع تجدیدپذیر وجود داشته باشد از روابط (۱۳)، (۱۴) و (۱۵) استفاده می‌شود (سبزه پرور، ۲۰۰۸).

$$z_j \circ z_i \circ r_{i2} + M * tz_{ij} \geq 0 \quad i < j, i=1, \dots, n-1, j=2, \dots, n \quad (۱۳)$$

$$z_i \circ z_j \circ r_{j2} + M * tz_{ji} \geq 0 \quad i < j, i=1, \dots, n-1, j=2, \dots, n \quad (۱۴)$$

$$tx_{ij} + tx_{ji} + tz_{ij} + tz_{ji} = 3 \quad i < j, i=1, \dots, n-1, j=2, \dots, n \quad (۱۵)$$

جهت اعمال محدودیت‌های عدم همپوشانی در شرایطی که بیشتر از دو منبع وجود داشت همانند بالا اقدام می‌کنیم.  $tx_{ij}$  متغیر باینری است که اگر 0 باشد فعالیت  $i$  در سمت چپ فعالیت  $j$  قرار می‌گیرد (فعالیت  $i$  پیشیاز  $j$  می‌شود)، بدون اینکه همپوشانی بین آن‌ها ایجاد گردد و اگر 1 شود عکس آن اعمال می‌شود.  $tx_{ji}$  هم متغیر باینری است که چنانچه برابر با 0 شود فعالیت  $j$  در سمت چپ فعالیت  $i$  قرار می‌گیرد بدون اینکه همپوشانی بین آن‌ها ایجاد شود و اگر  $tx_{ji}$  برابر 1 شود عکس مطلب جانمایی قبل صورت می‌پذیرد. چنانچه بین فعالیت‌ها رابطه پیشیازی FS وجود داشته باشد احتیاجی به نوشتن محدودیت‌های همپوشانی آن‌ها نیست چرا که قطعاً  $tx_{ij}$  برابر یک خواهد شد.

### تعمیم مسئله RCPSP به MRCPSP-GPR

هنگامی که در مسئله RCPSP چندین روش اجرایی برای انجام فعالیت‌های پروژه وجود داشته باشد با مسائل از نوع MRCPSP مواجه خواهیم بود. بنابراین هنگامی که فعالیت  $i$  ( $i=1, \dots, n$ ) قابل اجرا در مد  $m_i$  باشد، دارای مدت زمان اجرای  $d_{im_i}$  بوده و به مقدار  $r_{ifm_i}$  از منبع  $f$  نیاز دارد. با توجه به توضیحات فوق، برای تعمیم مسئله روابط زیر ارائه می‌شوند (سبزه پرور، ۲۰۰۸).

$$d_i = \sum_{m_i=1}^{M_i} d_{im_i} L_{im_i}, \quad i=1, \dots, n, \quad (16)$$

$$r_{ik} = \sum_{m_i=1}^{M_i} r_{ifm_i} L_{im_i}, \quad i=1, \dots, n, f=1, \dots, k \quad (17)$$

$$\sum_{m_i=1}^{M_i} L_{im_i} = 1, \quad i=1, \dots, n \quad (18)$$

متغیر باینری  $L_{im_i}$  برابر یک است اگر فعالیت  $i$  در مد  $m_i$  انجام شود، در غیر این صورت برابر صفر خواهد بود. با جایگذاری روابط (۱۶) و (۱۷) در مجموعه روابط (۱) تا (۱۵) مدل به صورت MRCPSP تعریف می‌شود. برای تعمیم مدل به حالتی که مسئله دارای بیش از دو

منبع ( $K > 2$ ) تجدیدپذیر باشد، کافی است متغیر  $x_i$  را با  $x_i^1$ ،  $x_i^2$  را با  $x_i^1$  و  $y_i$  را با  $x_i^2$  جایگزین کنیم و به همین ترتیب تا متغیر  $x_i^k$  را می‌توان به مدل اضافه کرد.

### فرمول هندسی هزینه تحویل دیرتر و پاداش تحویل زودتر

برای پروژه یک تاریخ ضرب العجل ( $DL_1$ ) در نظر گرفته شده است. به این مفهوم که به ازای گذشت هر واحد زمان از تاریخ تعیین شده، یک جریمه دیرکرد و همچنین به ازاء هر واحد زمان که پروژه زودتر از تاریخ ضرب العجل تکمیل گردد پاداش زودکرد به پیمانکار تعلق می‌گیرد. یک تاریخ دیگر هم به عنوان تاریخ نهایی تکمیل پروژه ( $DL_2$ ) در نظر گرفته شده که طبیعتاً از ضرب العجل بزرگتر است و محدودیت زمانی نهایی برای پروژه است و تخطی از آن اجرای پروژه را به طور کل غیر اقتصادی خواهد کرد. برای تضمین عدم تجاوز زمان پایان پروژه از تاریخ تکمیل نهایی، کافی است زمان تکمیل آخرین فعالیت پروژه یعنی  $x_n - \sum_{m_i=1}^{M_i} d_{nm_i} L_{nm_i}$  یا  $FT_n$  از تاریخ نهایی پروژه ( $DL_2$ ) تجاوز نکند، بنابراین محدودیتی در قالب رابطه (۱۹) ارائه می‌شود.

$$DL_2 - x_n - \sum_{m_i=1}^{M_i} d_{nm_i} L_{nm_i} \geq 0 \quad (19)$$

چنانچه پروژه زودتر از ضرب العجل تحویل داده شود بدین معنی است که  $FT_n - DL_1 \leq 0$  و اگر پروژه دچار تأخیر شود عکس آن صادق است، بنابراین برای انجام محاسبات در صورت وقوع یکی از این دو حالت روابط (۲۰) و (۲۱) را تعریف می‌کنیم.

$$FT_n - DL_1 \leq M \cdot g \quad (20)$$

$$DL_1 - FT_n \leq M (1 - g) \quad (21)$$

چنانچه متغیر باینری  $g$  برابر صفر شود، بر اساس روابط (۲۰) و (۲۱) پروژه زودتر از تاریخ ضرب العجل پایان یافته است. بنابراین محاسبات پاداش طبق قسمت اول رابطه (۲۲) باید انجام

گیرد. چنانچه  $g$  برابر یک شود پروژه دچار تأخیر می شود و هزینه تأخیر بر اساس قسمت دوم رابطه (۳۸) قابل محاسبه خواهد بود.

$$Rew.(DL_1 - FT_n).(1 - g) + Pen.(DL_1 - FT_n).g \quad (22)$$

$Pen$  و  $Rew$  به ترتیب برابر است با مقدار پاداش تحویل زودتر و هزینه دیرکرد به ازای هر واحد از زمان. هزینه و یا پاداش تحویل پروژه پس از پایان پروژه پرداخت می شود بنابراین جهت محاسبه ارزش فعلی (۲۲) رابطه (۲۳) ارائه می شود.

$$\frac{Rew.(DL_1 - FT_n).(1 - g) + Pen.(DL_1 - FT_n).g}{(1 + \alpha)^{FT_n}} \quad (23)$$

نهایتاً (۲۳) به توابع هدف اضافه می شود و چنانچه پروژه تأخیر داشته باشد مقدار آن منفی خواهد شد نتیجتاً از ارزش خالص فعلی کاسته می شود و در صورت اتمام پروژه در زمان زودتر از ضرب العجل، رابطه بالا دارای مقدار منفی شده و به سود پروژه می افزاید.

### محاسبه هزینه اضافه کاری

اساساً در مدل های RCPS و MRCPSP محدودیت های منابع تجدیدپذیر به گونه ای تعریف می شوند که تحت هیچ شرایطی منابع مرتبط با هر فعالیتی از ظرفیت معمول آنها تجاوز نکند، ولی در واقع هنگام اجرای پروژه ها، مدیران و پیمانکاران اجرایی در بسیاری از شرایط از تکنیک های اضافه کاری و تعیین شیفت های مختلف کاری استفاده می کنند. واضح است تصمیم گیری در مورد تعیین مقدار اضافه کاری یا شیفت کاری و همچنین عدم تعیین آن وابسته به عواملی همچون هزینه هایی که پروژه در صورت قرار دادن اضافه کاری متحمل می شود و تعهد به تحویل به موقع پروژه می باشد. مدیران در زمان بندی پروژه با این مسئله روبرو خواهند بود که آیا می بایست برای تحویل به موقع پروژه و عدم پرداخت جریمه تأخیر، متحمل هزینه های اضافه کاری شوند و یا جهت دریافت پاداش تحویل زودتر، متحمل این هزینه ها شوند. از طرفی ممکن است هزینه های ناشی از اضافه کاری به اندازه ای باشد که مدیر ترجیح دهد هزینه دیرکرد پروژه را تقبل کند. مدل ارائه شده ابتدا مقدار منبع تجدید پذیر

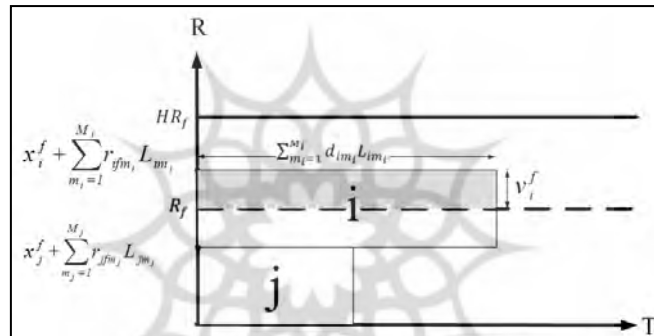
که شامل اضافه کاری می شود را با رابطه (۲۴) تعیین می کند ( $v_i^f$ )، با استفاده از رابطه (۲۵) هزینه کل اضافه کاری فعالیت محاسبه می شود (شکل ۴).

$$(x_i^f + \sum_{m_i=1}^{M_i} r_{ifm_i} L_{im_i}) - v_i^f + n_i^f = R_f \quad (24)$$

$$CO_{if} = v_i^f \cdot (\sum_{m_i=1}^{M_i} d_{im_i} L_{im_i}) \cdot C \quad (25)$$

$$v_i^f \geq 0, CO_{if} \geq 0 \quad (26)$$

$$i=1, \dots, n \quad f=1, \dots, k \quad (27)$$



شکل ۴: نحوه محاسبه هزینه اضافه کاری

متغیر تصمیم  $v_{if}$ ، برابر با مقدار منبع تجدیدپذیر از نوع  $R_f$  است که توسط فعالیت  $i$ ام استفاده می شود و از ظرفیت معمول منبع  $f$ ام تجاوز نموده است. همچنین متغیر تصمیم  $n_i^f$  هنگامی مقدار می گیرد که مقدار منبع مصرفی توسط فعالیت  $i$  از ظرفیت اولیه منبع تجاوز نکند. کل هزینه اضافه کاری منبع  $f$ ام که توسط فعالیت  $i$ ام مصرف می شود ( $CO_{if}$ ) برابر است با حاصل ضرب  $v_i^f$  و مدت زمان انجام فعالیت در هزینه اضافه کاری هر واحد منبع  $f$ ام در واحد زمان ( $C_f$ ). با توجه به (شکل ۴) کاملاً واضح است که مقدار عددی  $CO_{if}$  برابر است با حاصل ضرب  $C_f$  در مساحت قسمتی از فعالیت ( $i$ ام) که از ظرفیت منبع  $f$ ام تجاوز کرده است. به سادگی می توان ارزش فعلی مجموع هزینه های اضافه کاری پروژه را با رابطه (۲۸) نشان داد.

$$\sum_{i=1}^n \frac{\sum_{f=1}^k C_{of}}{(1+\alpha)^{x_i + \sum_{m_i=1}^{M_i} d_{im_i} L_{im_i}}} \quad (28)$$

رابطه (۲۸) به قسمت دوم تابع هدف (جریان‌های نقدی منفی) اضافه می‌شود.

### محدودیت‌های حداکثر منابع در دسترس

با توجه به (شکل ۶) مقدار  $R_f$  بیانگر مقدار ظرفیت اولیه منبع تجدیدپذیر از نوع  $f$  می‌باشد که مصرف تا این مقدار شامل هزینه اضافه کاری نمی‌شود، اما چنانچه مصرف فعالیت‌ها از این حد فراتر رود مقداری از منبع که از این حد تجاوز نموده است هزینه‌های اضافه کاری را در بر خواهد داشت. باید در نظر داشت که هر منبعی حداکثر مقدار در دسترس  $(HR_f)$  دارد و استفاده از منبع فراتر از آن با وجود مقدار اضافه کاری که شامل آن می‌شود منطقی نیست. به عنوان مثال اگر یک کارگر در روز منبع مربوط به یک فعالیت باشد و حداکثر مقدار ساعات کار عادی به ازای هر نفر در روز ۸ ساعت باشد و با احتساب ساعات مجاز اضافه کاری ۱۰ ساعت، بدین معنی است که استفاده بیشتر از ۱۰ ساعت از این منبع عملی نیست (به عنوان مثال به علت سنگینی کار، نیرو کارامدی بیشتر ندارد و یا ماشین آسیب می‌بیند). جهت رعایت این منطبق از رابطه (۲۹) استفاده می‌کنیم.

$$HR_f - x_i^f - \sum_{m_i=1}^{M_i} r_{ijm_i} L_{im_i} \geq 0 \quad i=1, \dots, n \quad f=1, \dots, k \quad (29)$$

همانطور که در (شکل ۴) مشهود است حداکثر منبع در دسترس  $(HR_f)$  همیشه از ظرفیت عادی منبع  $(R_f)$  بیشتر بوده و محدودیت‌های (۲۹) تضمین می‌کند که مجموع ارتفاع جعبه‌ها از  $HR_f$  تجاوز نکند.

### ارائه مدل نهایی

در این قسمت به جمع‌بندی مدل ریاضی شامل تعریف فرضیات مدل، پارامترها و متغیرهای آن پرداخته شده است.



## فرضیات مدل

همانطور که پیش از این هم اشاره شد، یکی از فرضیات مدل بر این اساس است که پرداخت هزینه‌های هر فعالیت توسط پیمانکار در پایان انجام آن فعالیت انجام شود، به همین دلیل است که در قسمت محاسبه ارزش فعلی جریان‌های نقدی در هر دو تابع هدف مجموع هزینه‌ها تقسیم بر عبارت  $(1+\alpha)^{x_i + \sum_{m_i=f}^{M_i} L_{im_i}}$  شده است. فرض دیگر این است که مسئله از دید پیمانکار مدل سازی شده است، بدین معنی که توابع هدف در جهت ماکزیمم سازی سود پیمانکار پروژه طراحی شده است. همچنین کلیه منابع از نوع تجدیدپذیر در نظر گرفته شده‌اند.

## تعریف اندیس‌ها

اندیس‌های مدل ارائه شده به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$f = 1, 2, \dots, k$ : نشان‌دهنده اندیس نوع منبع است.

$i = 1, 2, \dots, n$ : نشان‌دهنده اندیس فعالیت می‌باشد.

## تعریف متغیرهای مدل

متغیرهای مدل به صورت زیر تعریف می‌شوند

$CO_{if}$ : هزینه اضافه کاری فعالیت  $i$  از منبع نوع  $f$  است.

$g$ : چنانچه متغیر باینری  $g$  برابر صفر شود، پروژه زودتر از تاریخ ضرب‌العجل پایان یافته

است. بنابراین محاسبات مربوط به پاداش باید انجام گیرد. چنانچه  $g$  برابر یک شود

پروژه دچار تأخیر می‌شود و هزینه تأخیر قابل محاسبه خواهد بود.

$L_{im_i}$ : متغیری باینری بوده و اگر فعالیت  $i$  در مد  $m_i$  انجام شود، ۱، در غیر این صورت،

۰، خواهد بود.

$tx_{ij}$ : متغیری باینری بوده و اگر 0 باشد، فعالیت  $i$  در سمت چپ فعالیت  $j$  قرار می‌گیرد (فعالیت  $i$  پیشیناز  $j$  می‌شود)، بدون اینکه همپوشانی بین آن‌ها ایجاد گردد و اگر 1 شود عکس آن اعمال می‌شود.

$tx_{ji}$ : متغیری است باینری که چنانچه برابر با 0 شود، فعالیت  $j$  در سمت چپ فعالیت  $i$  قرار می‌گیرد بدون اینکه همپوشانی بین آن‌ها ایجاد شود و اگر برابر 1 شود عکس مطلب جانمایی قبل صورت می‌پذیرد.

$tx_{ij}^f$ : متغیری باینری است و هنگامی که برابر 0 شود، فعالیت  $i$  ام که مصرف کننده منبع  $(p)$  ام است، در پایین یا پشت فعالیت  $j$  ام قرار می‌گیرد و اگر برابر 1 شود عکس آن اتفاق می‌افتد.

$tx_{ji}^f$ : متغیری باینری است و هنگامی که برابر 0 شود، فعالیت  $i$  ام که مصرف کننده منبع  $(p)$  ام است، در بالا یا جلوی فعالیت  $j$  ام قرار می‌گیرد و اگر برابر 1 شود عکس آن اتفاق می‌افتد.

$v_{if}$ : متغیر عدد صحیح بوده و برابر است با مقدار منبع تجدیدپذیر که توسط فعالیت  $i$  ام استفاده شده و از ظرفیت معمول منبع  $f$  ام تجاوز نموده است.

$n_{if}$ : متغیر عدد صحیح است. هنگامی مقدار می‌گیرد که مقدار منبع مصرفی توسط فعالیت  $i$  ام از ظرفیت اولیه منبع  $f$  ام تجاوز نکند.

$x_i$ : متغیری عدد صحیح است. بیانگر زمان شروع فعالیت  $i$  ام است.

$x_i^f$ : متغیری عدد صحیح است. بیانگر مختصات قرارگیری گوشه پایینی و در سمت چپ جعبه (فعالیت)  $i$  ام نسبت به محور مصرف از منبع  $(f)$  ام در نمودار گانت است.

### تعریف پارامترهای مدل

پارامترهای مورد استفاده در مدل به صورت زیر تعریف می‌شوند

$R_f$ ظرفیت اولیه منبع تجدیدپذیر نوع $f$ ام $HR_f$ حداکثر ظرفیت منبع تجدیدپذیر نوع $f$ ام $r_{ifm_i}$ تعداد واحدهای مورد نیاز از منبع $k$ ام برای انجام فعالیت $i$ ام در حالت $m$ ام  نرخ تنزیل  $DL_1$ ضرب‌العجل  $DL_2$ زمان نهایی جهت پایان پروژه $FT_n$ زمان تکمیل فعالیت $i$ ام	تعداد فعالیت‌ها: $n$ تعداد مدهای اجرایی انجام فعالیت $i$ ام: $M_i$ مدت زمان انجام فعالیت $i$ ام در مد $m$ ام: $d_{im_i}$ جریان نقدی منفی متناظر با تکمیل فعالیت $i$ ام در مد $m$ ام: $CF_{im_i}^-$ جریان نقدی مثبت متناظر با تکمیل فعالیت $i$ ام در مد $m$ ام: $CF_{im_i}^+$ نرخ هزینه اضافه کاری منبع نوع $f$ ام: $C_f$ هزینه اضافه کاری فعالیت $i$ ام از منبع نوع $f$ : $Co_{if}$
---	---

با توجه به روابط شرح داده شده، تابع هدف مدل در صورتی که پرداخت در موقعیت رویدادها انجام شود به صورت رابطه (۳۰) و اگر به صورت مجموع باشد رابطه (۴۷) می‌باشد.

$$Max \quad Z = \sum_{i=1}^n CF_i^+ (1+\alpha)^{-(x_i + \sum_{m_i=1}^{M_i} d_{im_i} L_{im_i})} - \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{m_i=1}^{M_i} CF_{im_i}^- L_{im_i} + \sum_{f=1}^k Co_{if}}{(1+\alpha)^{x_i + \sum_{m_i=1}^{M_i} d_{im_i} L_{im_i}}} + \frac{Rew.(DL_1 - FT_n).(1-g) + Pen.(DL_1 - FT_n).g}{(1+\alpha)^{FT_n}} \quad (30)$$

$$Max \quad Z = CF_{LSP} (1+\alpha)^{-(x_i + \sum_{m_n=1}^{M_n} d_{im_n} L_{im_n})} - \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{m_i=1}^{M_i} CF_{im_i}^- L_{im_i} + \sum_{f=1}^k Co_{if}}{(1+\alpha)^{x_i + \sum_{m_i=1}^{M_i} d_{im_i} L_{im_i}}} + \frac{Rew.DL_1 - FT_n.(1-g) + Pen.DL_1 - FT_n.g}{(1+\alpha)^{FT_n}} \quad (31)$$

$$x_i \leq x_j \quad (i, j) \in ESS \quad (32)$$

$$x_i \leq x_j + \sum_{m_j=1}^{M_j} d_{jm_j} L_{jm_j} \quad (i, j) \in ESF \quad (37)$$

$$x_i + \sum_{m_i=1}^{M_i} d_{im_i} L_{im_i} \leq x_j \quad (i, j) \in EFS \quad (34)$$

$$x_i + \sum_{m_i=1}^{M_i} d_{im_i} L_{im_i} \leq x_j + \sum_{m_j=1}^{M_j} d_{jm_j} L_{jm_j} \quad (i, j) \in EFF \quad (35)$$

$$x_j \circ x_i - \sum_{m_i=1}^{M_i} d_{im_i} L_{im_i} + M tx_{ij} \geq 0 \quad (36)$$

$$x_i \circ x_j - \sum_{m_j=1}^{M_j} d_{jm_j} L_{jm_j} + M tx_{ji} \geq 0 \quad (37)$$

$$x_j^f \circ x_i^f - \sum_{m_i=1}^{M_i} r_{ifm_i} L_{im_i} + M tx_{ij}^f \geq 0 \quad (38)$$

$$x_i^f \circ x_j^f - \sum_{m_j=1}^{M_j} r_{jfm_j} L_{jm_j} + M tx_{ji}^f \geq 0 \quad (39)$$

$$\sum_{m_i=1}^{M_i} L_{im_i} = 1 \quad (40)$$

$$tx_{ij} + tx_{ji} + tx_{ij}^f + tx_{ji}^f = 3 \quad (41)$$

$$DL_2 \circ x_n - \sum_{m_i=1}^{M_i} d_{nm_i} L_{nm_i} \geq 0 \quad (42)$$

$$FT_n - DL_1 \leq M(g) \quad (43)$$

$$DL_1 - FT_n \leq M(1-g) \quad (44)$$

$$(x_i^f + \sum_{m_i=1}^{M_i} r_{ifm_i} L_{im_i}) - v_i^f + n_i^f = R_f \quad (45)$$

$$Co_{if} = v_i^f * \left( \sum_{m_i=1}^{M_i} d_{im_i} L_{im_i} \right) \cdot C_f \quad (46)$$

$$HR_f - x_i^f - \sum_{m_i=1}^{M_i} r_{ifm_i} L_{im_i} \geq 0 \quad (47)$$

$$i=1, \dots, n \quad f=1, \dots, k \quad (59)$$

$$i < j, \quad i = 1, \dots, n - 1, \quad j = 2, \dots, n \quad (48)$$

$$tx_{ij}, tx_{ji}, tx_{ij}^f, tx_{ji}^f, L_{im_i}, L_{jm_j}, g = 0, 1 \quad (49)$$

$$v_i^f, CO_{ij}, x_i, x_i^f, n_i^f \geq 0 \quad (50)$$

### مثال عددی

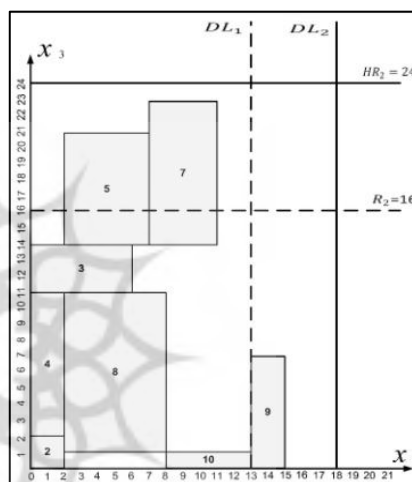
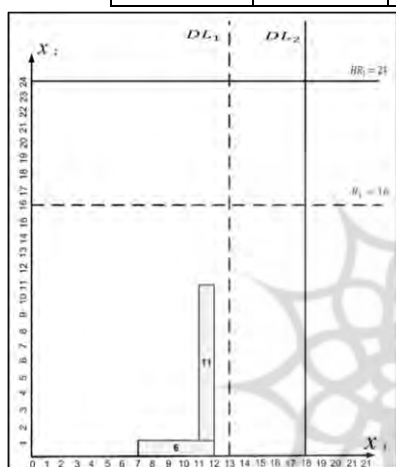
در ادامه یک مسئله نمونه از کتابخانه مسائل زمانبندی پروژه (PSLIB) انتخاب شده است. نمونه، مسئله n02-1 از مجموعه n0 از این کتابخانه است. تعداد فعالیتها برابر است با ۱۰ فعالیت غیرمجازی و دارای دو منبع است که  $R_1 = 16, R_2 = 16, HR_1 = 24, HR_2 = 16$ ، همچنین  $DL_1 = 13, DL_2 = 18, C = 5, 0.01 =$  جریانهای نقدی مثبت و منفی هم طبق جدول شماره (۱) می باشد. مسئله توسط نرم افزار GAMS حل شده است. نتایج و نمودار گانت روش های مختلف پرداخت را می توان در جدول شماره (۲) و شکل های (۵) تا (۸) مشاهده نمود. همانگونه که از جدول (۲) مشهود است بیشترین ارزش فعلی خالص از روش PEI بدست آمده است.

جدول (۱): جریانهای نقدی مثبت و منفی فعالیتها در مدهای مختلف

Activity	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$CF_{im_i}^+$	862	1074	1090	1139	1237	1245	1292	1351	1369	1480
$CF_{im_1}^-$	231	237	459	489	489	679	796	886	914	988
$CF_{im_2}^-$	37	98	262	367	395	521	547	731	801	964
$CF_{im_3}^-$	29	85	262	296	319	424	508	579	624	929

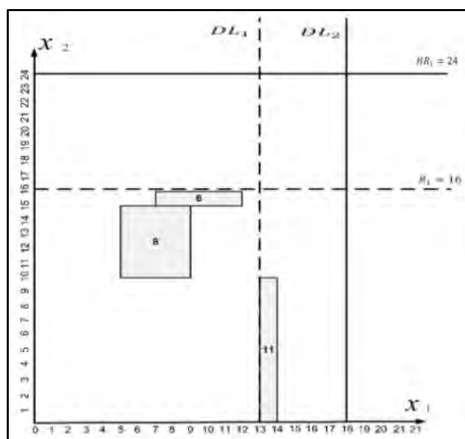
جدول (۲): نتایج مسئله نمونه با استفاده از Lingo

Problem Size	LSP		PEO	
	Z	CPU Time(S)	Z	CPU Time(S)
$n = 10$	4148.22	5	3038.104	4

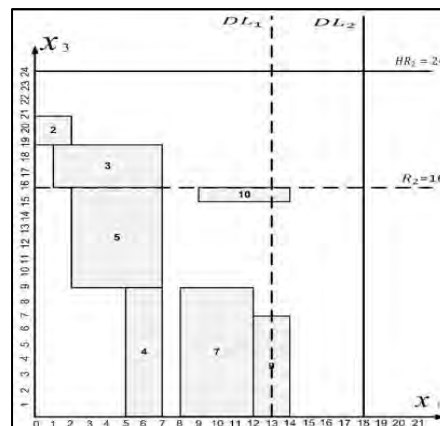


شکل (۶): نمودار گانت مسئله نمونه از روش PEO و شکل (۵): نمودار گانت مسئله نمونه از روش PEO و تخصیص منبع نوع دوم و تخصیص منبع نوع اول

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی  
پرتال جامع علوم انسانی



شکل (۷): نمودار گانت مسئله نمونه از روش LSP و تخصیص منبع نوع دوم



شکل (۸): نمودار گانت مسئله نمونه از روش LSP و تخصیص منبع نوع دوم

### نتایج محاسبات

در این قسمت سعی شده است شده است مثال‌هایی از کتاب‌خانه‌ی مسائل زمانبندی پروژه (PSPLIB) انتخاب، و توسط مدل زمانبندی شوند. سه گروه مسئله از سری مثال‌های "J" با نام‌های J10، J20 و J30 با تعداد فعالیت‌های به ترتیب ۱۰، ۲۰ و ۳۰ برای زمانبندی انتخاب شده است. تعداد ۱۲ مسئله مختلف از هر سایز (۱۰، ۲۰، ۳۰) مورد بررسی و زمانبندی قرار گرفته است. جریان‌های نقدی مثبت به طور تصادفی از بازه‌ی [۰، ۱۰۰۰] و جریان‌های نقدی به همان صورت از بازه‌ی [۷۵۰، ۱۵۰۰] استخراج شده‌اند. مدل ارزش خالص فعلی را برای دو شیوه‌ی پرداخت محاسبه می‌کند که عبارتند از پرداخت در زمان وقوع رویدادها (PEO) و پرداخت قیمت مجموع (LSP) که در این محاسبات نرخ تنزیل برابر با  $\alpha = 0.01$  در نظر گرفته شده است. مسائل با تعداد مدهای مختلف ( $m = \{2, 3\}$ ) و تعداد منابع تجدیدپذیر مختلف ( $R = \{2, 3, 4\}$ ) محاسبه شده‌اند. باید در نظر گرفته شود که در مثال‌های محاسبه

شده میزان هزینه‌ی اضافه‌کاری همه‌ی منابع یکسان در نظر گرفته شده است. تمام ۳۶ مسئله با استفاده از نرم‌افزار GAMS 24.1.1 محاسبه شده‌اند و حداکثر مدت زمان محاسبه توسط نرم-افزار ۱۰۰۰ ثانیه در نظر گرفته شده است. جدول شماره‌ی ۳ نشان‌دهنده‌ی نتایج محاسباتی مسائل نمونه است.

جدول (۳): نتایج مسائل نمونه با استفاده از روش‌های PEO و LSP

Problem Size	R	m	PEO		LSP	
			Best objective	CPU (s.)	Best objective	CPU (s.)
J10	2	2	4714.065	0.94	4050.664	1.214
	3	2	4181.956	1.41	3451.742	1.258
	4	2	674.115	7.825	-136.497	7.744
	2	3	4714.065	1.076	4050.664	1.121
	3	3	4306.37	2.808	3594.964	2.806
	4	3	2627.81	8.454	1741.116	15.514
J20	2	2	12526.248	11.329	10897.66	7.27
	3	2	12526.248	35.272	10887.8	32.557
	4	2	12474.718	144.568	10857.68	118
	2	3	13067.672	12.433	11481.88	12.638
	3	3	13033.428	53.425	11457.34	99.702
	4	3	12564.792	>1000	11110.17	332.43
J30	2	2	18971.727	>1000	15622.24	>1000
	3	2	18971.727	>1000	15622.24	>1000
	4	2	18971.727	>1000	15622.24	>1000
	2	3	19451.916	>1000	16186.81	>1000
	3	3	19451.916	>1000	16186.81	>1000
	4	3	19451.916	>1000	16186.81	>1000



از اطلاعات ذکر شده در جداول (۳) می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش تعداد فعالیت‌ها سرعت حل کاهش می‌یابد اما با توجه به اینکه مدل ارائه شده مدلی ریاضی است و از روش‌های فرا ابتکاری استفاده نشده است، زمان حل مدل زمانی منطقی بوده به خصوص در مسائل با سایزهای ۱۰ و ۲۰ فعالیت که حدود ۶۶ درصد از مسائل محاسبه شده را تشکیل می‌دهند. افزایش تعداد مدها تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر سرعت حل نداشته اما با زیادتر شدن تعداد منابع سرعت محاسبه کاهش می‌یابد. از دیگر نتایج قابل ملاحظه‌ی جدول (۳) می‌توان اشاره کرد به اینکه نتایج تابع هدف حاصل از روش پرداخت در زمان وقوع رویدادها به مراتب بهتر از روش پرداخت مجموع می‌باشد که به دلیل دریافت کارمزد پیمانکار در پایان پروژه می‌توان این نتیجه را منطقی دانست.

### نتیجه‌گیری

در این تحقیق مدلی جهت زمانبندی پروژه‌هایی با محدودیت منابع در حالت چند مد و با هدف بیشینه سازی NPV ارائه شده است. مدل ارائه شده برگرفته شده از مسئله جایدهی جعبه‌ها، مسائل معمول MMRCPSP و MRCPSP-GPR می‌باشد. از جمله مزیت‌های این مدل نسبت به مدل‌های معمول MRCPSP (متاهیورستیک)، عدم احتیاج به زمانبندی اولیه برای شروع محاسبات توسط مدل هست، چرا که بر خلاف مدل‌های متاهیورستیک که پس از زمانبندی با روش‌های مختلف مانند SSS، PSS و Floyd ° Warshal تنها قادر به تعیین مد مناسب هستند، مدل ارائه شده در این تحقیق قادر به زمانبندی پروژه توسط محدودیت‌های طراحی شده است. اگر مدل ارائه شده، جهت زمانبندی مسائل با واحد زمانی کوچکتر از روز (ساعت، دقیقه) استفاده شود تأثیری بر زمان حل نخواهد داشت، در صورتی که در مدل‌های متاهیورستیک در شرایط یکسان به دلیل ازدیاد متغیرهای تصمیم زمان حل افزایش خواهد یافت. در این مقاله ابتدا یک مدل ریاضی که قادر به ارائه جواب دقیق باشد جهت حل نمودن مسائل MRCPSP-GPR ارائه شد. سپس مدل برای محاسبه هزینه اضافه کاری، در نظر گرفتن جریمه و پاداش دیرکرد و زودکرد و تأثیر آن بر روی NPV تعمیم یافت. از مزیت‌های مدل

نسبت به مدل‌های معمول MRCPS، در نظر گرفتن هزینه‌های اضافه کاری و پاداش و جریمه زمان تحویل به طور همزمان است که بر زمانبندی و مقدار واقعی NPV پروژه تاثیر دارد. برای نزدیکتر شدن نتیجه مدل به شرایط واقعی، دو سیاست پرداخت کلاسیک در قالب تابع هدف مدل ارائه شد و نتایج حاصل از هر یک از آنها با استفاده از یک مسئله استاندارد ارائه گردید. نتایج حاصل از حل مسائل نمونه نشان می‌دهد که مدل در محاسبه تابع هدف، هزینه‌های مختلف و انجام زمانبندی بر اساس روابط پیش‌نیازی، مناسب عمل کرده و از سرعت حل بالایی برخوردار می‌باشد. همچنین مدل قادر است در سایزهای بالا در زمانی معقول جواب فیزیبل ارائه دهد که می‌تواند جایگزین مناسبی برای مدل‌های متاهیورستیکی باشد که وابسته به زمانبندی اولیه و روش‌های تصادفی برای حل هستند.



## منابع

- Afshar, A. (2014). *A solution procedure for preemptive multi-mode project scheduling problem with mode changeability to resumption*. Applied Computing and Informatic, 15(3), 25-35.
- Bey, R. B., Doersch, R. H., & Patterson, J. H. (1981). *The net present value criterion: its impact on project scheduling*. Project Management Quarterly, 12(2), 35-45.
- Besikci, U., Bilge, U., & Ulusoy, G. (2015). *Multi-mode resource constrained multi-project scheduling and resource portfolio problem*. European Journal Of Operation Research, 240(1), 22-31.
- Chen, W. N., & Zhang, J. (2012). *Scheduling Multi-Mode Projects under Uncertainty to Optimize Cash Flows: A Monte Carlo Ant Colony System Approach*. Journal of Computer Science and Technology, 27(5), 950-965.
- Cheng, Z., Fowler, J., Kempf, K., Mason, S. (2015) *multi-mode resource-constrained project scheduling problems with non-preemptive activity splitting*. Computer & Operation Research Journal, 53(1), 275-287.
- Coelho, J., & Vanhoucke, M. (2011). *Multi-mode resource-constrained project scheduling using RCPSP and SAT solvers*. European Journal of Operational Research, 213(1), 73-82.
- Huang, W., Chen, D., & Xu, R. (2007). *A new heuristic algorithm for rectangle packing*. Computers & Operations Research, 34(11), 3270-3280.
- Icmeli, O., & Erenguc, S. S. (1996). *A branch and bound procedure for the resource constrained project scheduling problem with discounted cash flows*. Management Science, 42(10), 1395-1408.
- Klein, R. (2000). *Bidirectional planning: improving priority rule-based heuristics for scheduling resource-constrained projects*. European Journal of Operational Research, 127(3), 619-638.

Kolisch, R. (1996). *Serial and parallel resource-constrained project scheduling methods revisited: Theory and computation*. European Journal of Operational Research, 90(2), 320-333.

Mika, M., Waligłan, G., & W glarz, J. (2005). *Simulated annealing and tabu search for multi-mode resource-constrained project scheduling with positive discounted cash flows and different payment models*. European Journal of Operational Research, 164(3), 639-668.

Russell, A. H. (1970). *Cash flows in networks*. Management Science, 16(5), 357-373.

Sabzehparvar, M., & Seyed-Hosseini, S. M. (2008). *A mathematical model for the multi-mode resource-constrained project scheduling problem with mode dependent time lags*. The Journal of Supercomputing, 44(3), 257-273.

Seifi, M., & Tavakkoli-Moghaddam, R. (2008). A new bi-objective model for a multi-mode resource-constrained project scheduling problem with discounted cash flows and four payment models. *Int. J. of Engineering, Transaction A: Basic*, 21(4), 347-360.

Shadrokh, S., & Kianfar, F. (2007). A genetic algorithm for resource investment project scheduling problem, tardiness permitted with penalty. *European Journal of Operational Research*, 181(1), 86-101.

Ulusoy, G., & Cebelli, S. (2000). An equitable approach to the payment scheduling problem in project management. *European Journal of Operational Research*, 127(2), 262-278.

Ulusoy, G., Sivrikaya-erifolu, F., & ahin, . (2001). Four payment models for the multi-mode resource constrained project scheduling problem with discounted cash flows. *Annals of Operations Research*, 102(1-4), 237-261.

Vanhoucke, M., Demeulemeester, E., & Herroelen, W. (2001). On maximizing the net present value of a project under renewable resource constraints. *Management Science*, 47(8), 1113-1121.