ریاضیِ رنگین کمان

مریم شفیعی
مدرس انجمن ریاضی پژوهش سرای دانش آموزی محمدبن زکریای رازی

دکتر زهرا ارزجانی
استادیار دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز

چکیده

در این مقاله، اینکه «چرا رنگین کمان را فقط بین زوایای ۴۰ تا۴۲ درجه در یک قطره کروی آب می‌توان دید»، مورد بررسی قرار گرفته است. وقتی یک شعاع نور خورشید ازهوا وارد قطره آب می‌شود، مقداری از نور روی قطره بازتاب می‌کند، مقداری بعد از ورود به قطره ازپشت آن خارج می‌شود و مقداری از نوردر درون قطره طبق قانون اسنل شکست خورده و از قطره خارج می شود و تشکیل رنگین کمان می دهد.

در تشکیل رنگین کمان دو عامل اصلی، ضریب شکست نور و طول موج نقش مهمی دارند که علت تشکیل رنگ‌های مختلف در رنگین کمان می‌باشد. هر قطره آب می‌تواند یک رنگ از رنگ‌های رنگین کمان را در محدوده دید انسان ایجاد کند. سپس علت کمانی بودن رنگین کمان بیان شده است.

بعد از بررسی و اثبات فرمول‌های ریاضی به این نتیجه می‌رسیم که شدت نور خروجی در تمام زوایا یکسان نیست وبیشتر نور رنگینی که از قطره بیرون می‌رود، با جهت تابش خورشید، زاویه حدود ۴۲ درجه می‌سازد. البته این زاویه، بستگی به رنگ پرتو دارد و بین زاویه۴۰ تا ۴۲ درجه برای رنگ‌های قرمز تا بنفش متفاوت است.

واژه‌های کلیدی: رنگین کمان، ریاضی، قانون اسنل، طول موج، شکست نور.

مقدمه

بی‌تردید یکی از نمایش‌های نور در آسمان، رنگین کمان است که نور خورشید توسط قطرات باران به رنگ‌های خودش منتشر می‌شود و به چشم بیننده می‌رسد.

رنگین‌کمان یکی از زیباترین پدیده‌های جوّی است که می‌توان در روزهای بارانی منتظر آن بود. این پدیده هنگامی روی می‌دهد که پرتوهای سفیدرنگ خورشید در ارتفاع بالا به قطرات کروی شکل باران برخورد می‌کنند و با تجزیه به طیف‌های نور مرئی (همان اتفاقی که در منشور روی می‌دهد) و بازتاب درون قطره، از آن خارج می‌شوند.

البته معروف است که رنگین‌کمان ۷ رنگ دارد، درحالی‌که این، اشتباهی تاریخی است. وقتی آیزاک نیوتن[1] برای نخستین بار، پرتوهای خورشید را از درون منشور عبور داد و طیف تجزیه شده نور را بدست آورد، همین شش رنگ را دید؛ اما از آنجاکه در آن روزگار ۷ عدد مقدسی بود، ترجیح داد رنگ نیلی را بین بنفش و آبی قرار دهد و با هفت رنگ ساختن طیف نور، توجه عمومی بیشتری را متوجه این پدیده سازد! ***(ww.youtube.com)***

رنگین کمان وجود خارجی ندارد؛ یعنی ما نمی‌توانیم رنگین‌کمانی را بگیریم، یا پرده‌ای برای نمایش آن برپا کنیم، یا در محل آن فیلم عکاسی قرار دهیم و اثرش را روی فیلم ثبت کنیم. هر قدر تلاش کنیم به رنگین کمان نزدیک شویم، رنگین کمان نیز به همان اندازه از ما دورتر می‌شود و همیشه در فاصله‌ای ثابت از ما باقی می‌ماند. به همین دلیل است که تاکنون کسی موفق نشده است رنگین‌کمان را به دام بیاندازد.

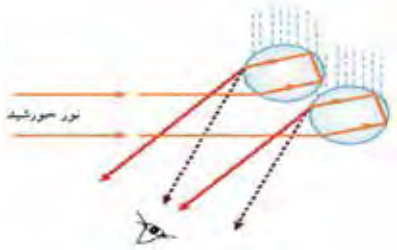
اولین بار رنه دکارت[2] آزمایشی انجام داد که یک کمان بزرگ بسازد او سه اصل را در نظر گرفت:

۱- فقط هنگام تشکیل باران رنگین کمان بوجود نمی‌آید و هر جا که قطرات ریزآب باشد می‌توانیم رنگین کمان تشکیل دهیم .

۲- قطرات بطور تقریبی گرد وکروی هستند.

۳- کوچکتر یا بزرگتر بودن قطره ها تأثیری در ظاهر رنگین کمان ندارد.

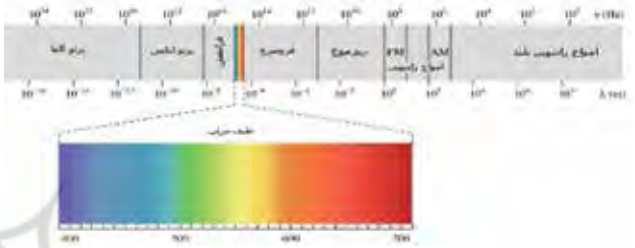
وقتی که نور با قطره کروی آب برخورد می‌کند، مقداری از آن نور بازتاب می‌کند وبقیه آن شکست خورده در طول قطره حرکت می کند تا به سطح خمیده داخلی وآیینه مانند قطره برخورد کند. در هر برخورد با سطح داخلی قطره، مقداری از نور باز می‌تابد و در قطره می‌ماند، و باقیمانده آن خارج می‌شود. بنابراین پرتوهای نور می‌توانند بعد از یک، دو، سه بازتاب داخلی یا بیشتر با شکست دیگری از قطره خارج شوند. با وجود این، نوری که به پشت قطره برخورد می‌کند دستخوش بازتاب کلی نمی‌شود ومقداری از نور از پشت قطره خارج می‌شود. اما نور خروجی از پشت قطره باران رنگین کمان تشکیل نمی‌دهد، زیرا طیف تابشی از پشت قطره مانند رنگین کمان مرئی دارای شرایط تشکیل رنگین کمان نیست واز این رو رنگ‌ها بیشتر از آنکه رنگین کمان تشکیل دهند با هم ترکیب می‌شوند. ***(H. Nussenzveig 1977)***



نگاره ۱- شکل فرضی پرتو نور تابیده شده به قطره

در حقیقت رنگین کمان طیف پیوسته ای از تمامی رنگ‌ها را از بنفش تا قرمز در گستره دید انسان در برمی‌گیرد. رنگ‌های رنگین کمان ناشی از دو واقعیت اساسی است:

اول اینکه پرتو نور خورشید متشکل از دامنه همه رنگ‌های قابل دید در گستره بینایی انسان می باشد. رنگ‌های نور خورشید زمانی که با یکدیگر ترکیب می گردند سفید به نظر می رسند. این خاصیت نور خورشید نخستین بار توسط آیزاک نیوتن در سال ۱۶۶۶ تشریح گردید. طیف مرئی نام بخشی از طیف الکترمغناطیسی است که با چشم انسان قابل رؤیت و تشخیص است. طول موج طیف مرئی بین ۳۸۰ تا ۷۵۰ نانومتر وفرکانس آن‌ها بین ۴۰۰ تا ۷۰۰ تراهرتز[3] است. *(سگل، موکول، ۱۳۷۶)*



نگاره ۲- طول موج مرئی بین ۴۰۰ تا ۷۰۰ ترا هرتز

و نکته دیگر اینکه نور رنگ‌های مختلف زمانی که از یک حائل مانند هوا به محیط دیگری مانند آب یا شیشه عبور می‌کنند، به میزان متفاوتی انتشار می‌یابند.ما رنگین کمان‌های مختلفی داریم شامل:

رنگین کمان دو گانه: که دراثر دو بازتاب و دو شکست در قطره آب ایجاد می‌شود و باعث می‌گردد دو کمان ایجاد شود که کمان اول رنگش عکس کمان بعدی است.

رنگین کمان با کمان‌های اضافه: که وقتی نورها خارج می شوند اگر با هم تداخل داشته باشند بر اساس اینکه تداخل‌ها سازنده یا ویرانگر باشند یک سری کمان‌های اضافه که ممکن است خود رنگ‌های رنگین کمان نباشند بوجود می‌آید.

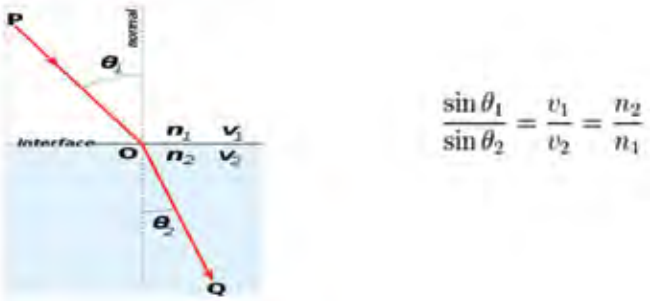
رنگین کمان قمری: که ماه کامل نور کافی برای تشکیل رنگین کمان دارد و رنگین کمان قمری بوجود می آورد ولی چون نور ماه ازخورشید خیلی کمتر است نور رنگین کمان هم کمتر است. (***Jearl Walker, 1980***)

بحث و نتیجه‌گیری

یک رنگین کمان در واقع درمحل مشخصی از آسمان وجود ندارد. محل ظاهرشدنش به محل ناظر وموقعیت خورشید بستگی دارد. تمام قطرات باران نورخورشید را یکسان شکسته وباز می‌تابانند، اما فقط نور از بعضی از قطرات باران به چشم ناظر می‌رسد. ما هنگام بررسی علت رنگین کمان متوجه می شویم که شکست نور در قطره آب مهمترین عامل ایجاد رنگین کمان است. مقدار شکست نور به طور کلی به دو عامل طول موج و محیطی که نور وارد آن می شود بستگی دارد.

هنگامی که نورازمحیطی وارد محیط دیگری می‌شود که نور در آن دارای سرعت متفاوتی باشد، زاویه شعاع نور در خط فاصل این دو محیط تغییر می‌کند وبه اصطلاح می‌شکند. ***(www.tebyan.net شکست نور)***

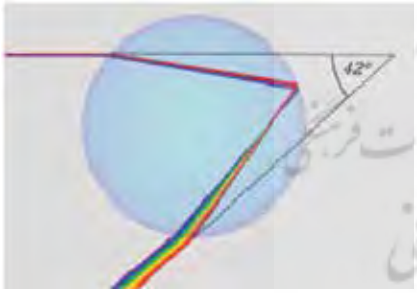
ویلبرورد اسنل[4] در قانون شکست خود محاسبه کرد که نورچگونه زمانی که از یک محیط به محیط دیگری که چگالی متفاوتی دارد، گذرمی کند، خم یا پراکنده می شود. (مانند گذر نور از هوا به محیط آب) در واقع این قانون رابطه میان زاویه نور را قبل از برخورد و پس ازشکست درخط فاصل دومحیط نشان می‌دهد. ***(fa.wikipedia.org قانون_اسنل)***



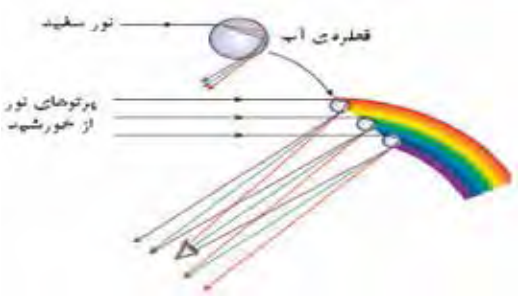
$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

نگاره ۳- قانون شکست اسنل

زمانی که مسیر پرتو نور درون قطره آب را برای نورهای قرمز وبنفش بررسی می کنیم، درمی‌یابیم زاویه انحراف برای این دو رنگ متفاوت است. زیرا نور بنفش که طول موج کوتاهتری دارد با زاویه بزرگتری نسبت به نور قرمز می‌شکند و درهنگام ترک قطره بواسطه بازتاب پرتوهای نورازپشت قطره، نور بنفش نسبت به نور قرمز با زاویه کمتری نسبت به نورسفید تابیده شده اصلی می چرخد وبه چشم ناظر می‌رسد. به همین علت بالای رنگین کمان قرمز وپائین آن بنفش دیده می شود. ***(C. Boyer, 1987)***



نگاره ۴- شکست نور قرمز تا بنفش



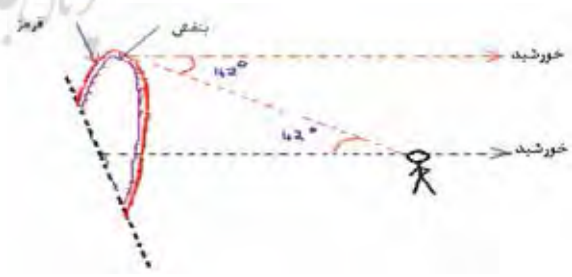
نگاره ۵- نمایش رنگ‌های رنگین کمان توسط قطرات کروی آب

زمانی که رنگین کمان و دسته رنگ‌های آن را مشاهده می‌کنیم به نوری نگاه کرده‌ایم که ازقطرات مختلف آب پراکنده و بازتابیده شده است. هرقطره آب می‌تواند یک رنگ از رنگین کمان را درمحدوده دید ما ایجاد کند، مثلاً اگر نور قرمز خارج شده از یک قطره توسط ناظری مشاهده شود، نور آبی از آن قطره دیده نمی‌شود. بنابراین طبق نگاره ۵ می‌توان گفت ناظر نور قرمز را از قطره بالایی، زرد را از قطره میانی وآبی یا بنفش را از قطره پائینی می‌بیند. به همین دلیل بالای رنگین کمان قرمز و پائین بنفش دیده می‌شود.

(R. A. R. Tricker, 1970&H. Nussenzveig 1977)

با علم به اینکه ضریب شکست نور در آب ۱/۳۳یا۱/۳٤ است، طیف بازتابیده درمحدوده زوایای ٤۰ تا ٤۲ درجه می‌باشد(این مطلب با فرمول‌های ریاضی اثبات می شود). این زاویه به بزرگی و کوچکی قطره آب ربطی ندارد اما خالص بودن رنگ‌های رنگین کمان به اندازه قطرات باران بستگی دارد. قطرات درشت (در حدود قطرهای چند میلیمتری) رنگین کمان‌های روشن با رنگ‌های تفکیک شده و زیبا می دهند. قطرات ریز باران (در حدود قطرهای ۰/۱ میلیمتر) رنگین کمان‌هایی با رنگ‌های درهم پوشانیده شده ایجاد می نماید واغلب نزدیک به رنگ سفید و شفاف دیده می‌شوند. (***Jearl Walker, 1980***)

رنگین کمان‌ها دایره‌های متحدالمرکزی هستند که چون زمین حرکت می‌کند ما نمی‌توانیم کل رنگین کمان را مشاهده کنیم وفقط کمانی از آن را مشاهده می‌نمائیم. هر چه خورشید در پائین‌ترین قسمت افق قرار داشته باشد رنگین کمان ما کامل‌تر می‌شود. برای وقوع این پدیده، خورشید، چشم ناظر و وسط قوس رنگین کمان باید هر سه در یک امتداد مستقیم قرار گرفته باشند. پس اگر خورشید در آسمان خیلی بالا باشد، هرگز چنین خط مستقیمی درست نمی‌شود، به همین علت رنگین کمان را تنها در صبح زود و یا موقع عصرمی توان دید. در این وضعیت نور رنـــگی کـه بـه چشـم ما می رسد، مجموعه نورهای خـارج شـده از تمـام قطراتـی است که خط واصل چشم ما و آنها با راستای نور خورشید، زاویه بین ٤۰ و ٤۲ درجه می سازد. بنابراین برای این که فردی بتواند رنگین‌کمان را ببیند، باید پشت به خورشید و رو به باران بایستد تا پرتوهای تجزیه شده و بازگشتی رنگین‌کمان را مشاهده کند. (***H. Nussenzveig 1977***)



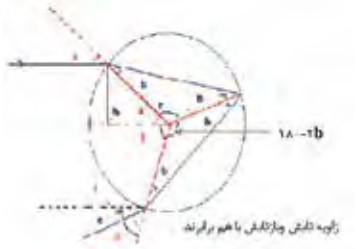
نگاره ۶- حدود زوایا وجهت قرارگرفتن ناظر برای دیدن رنگین کمان

دراین حالت فرد، پرتوهایی درشش رنگ قرمز، نارنجی، زرد، سبز، آبی وبنفش را می‌بیند که با تقارن کروی به چشم او می‌رسند. چشم با امتداد دادن این پرتوها، کمان‌هایی شش رنگ را در آسمان تداعی می‌کند که همان رنگین‌کمان است.

اثبات رنگین کمان از طریق فرمول‌های ریاضی

(www.phys.uwosh.edu)

به منظور محاسبه زاویه رنگین کمان ما فقط نمی‌توانیم از قانون اسنل و شکست استفاده کنیم. بلکه باید از قانون سینوس و هندسه ومشتق نیز استفاده کنیم. دراین قسمت ما فقط محاسبات مربوط به رنگین کمان اصلی را انجام می‌دهیم.در محاسبه زاویه رنگین کمان ما باید بعضی از خطوط اضافی را در دایره فرضی که به عنوان قطره باران است نظیر ارتفاع، شعاع دایره، زاویه تابش، زاویه شکست وزاویه بازتابش داشته باشیم.



نگاره ۷- زوایا و خطوط فرضی در قطره آب

a زاویه برخورد نور

b زاویه شکست نور

r شعاع قطره آب

زاویه بین خط چین وشعاع r که a است

e زاویه دید برای دیدن رنگ‌های رنگین کمان توسط ناظر (هدف، بدست آوردن این زاویه است)

h ارتفاع نقطه‌ای که اشعه نور به قطره برخورد می‌کند.

نکته: بین زاویه تابش ودو شعاع دایره، مثلث متساوی‌الساقین است و زاویه‌های b برابرند. همچنین بعد از برخورد شعاع نور وبرگشت آن دوباره مثلث متساوی‌الساقین داریم که زاویه‌های b با هم برابرند.

مجموع زوایای مرکز دایره ۳٦۰ درجه است. پس داریم:

$$f + a + (180 - 2b) + (180 - 2b) = 360$$

$$f + a + 360 - 4b = 360 \rightarrow f = 4b - a$$

از طرفی داریم:

$$f = e + a \rightarrow e = f - a \rightarrow e = 4b - a - a$$

$$e = 4b - 2a$$

از فرمول بدست آمده نسبت به a مشتق می گیریم ومشتق را مساوی صفر قرار می دهیم:

$$\frac{de}{da} = 4\frac{db}{da} - 2\frac{da}{da} \rightarrow \frac{de}{da} = -2 + 4\frac{db}{da}$$

$$\xrightarrow{\frac{de}{da}=0} -2 + 4\frac{db}{da} = 0 \rightarrow 4\frac{db}{da} = 2 \rightarrow \frac{db}{da} = \frac{1}{2}$$

- قانون شکست اسنل درنقطه a (محل برخورد شعاع نوربه قطره)

$$n_1 \sin a = n_2 \sin b$$

چون محیط اول هواست، ضریب شکست نوردر هوا را یک می‌گیریم.

$n_1 = 1$

$$\sin a = n \sin b$$

ازقانون شکست اسنل نسبت به a مشتق می گیریم:

$$\cos a = n \cos b \frac{db}{da} \xrightarrow{\frac{db}{da}=\frac{1}{2}} \cos a = n \cos b \frac{1}{2} \rightarrow \cos a = \frac{n \cos b}{2}$$

می‌دانیم: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \rightarrow \cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta}$

درفرمول بدست آمده بالا جایگزین می‌کنیم:

$$\sqrt{1 - \sin^2 a} = \frac{n}{2}\sqrt{1 - \sin^2 b}$$

$$1 - \sin^2 a = \frac{n^2}{4}(1 - \sin^2 b) \star$$

- قانون شکست اسنل درنقطه b (محل خروج شعاع نوراز قطره):

$$n_1 \sin b = n_2 \sin a$$

این بارمحیط اول آب ومحیط دوم هواست. پس

$n_2 = 1$

$$n \sin b = \sin a \rightarrow \sin b = \frac{\sin a}{n}$$

ازاین فرمول دو نتیجه می‌گیریم:

– از فرمول Arc می‌گیریم تا درفرمول نهایی جایگزین کنیم:

$$\sin b = \frac{\sin a}{n} \rightarrow b = \text{Arcsin}\frac{\sin a}{n}$$

– طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم وبجای $\sin^2 b$ در فرمولی که با $\star$ نشان داده شده است قرار می‌دهیم:

$$\sin^2 b = \frac{\sin^2 a}{n^2}$$

جایگزین می‌کنیم:

$$1 - \sin^2 a = \frac{n^2}{4}\left(1 - \frac{\sin^2 a}{n^2}\right)$$

$$4 - 4\sin^2 a = n^2 - \sin^2 a$$

$$4 - n^2 = 4\sin^2 a - \sin^2 a$$

$$4 - n^2 = 3\sin^2 a \rightarrow \sin^2 a = \frac{4 - n^2}{3}$$

$$\sin a = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} \rightarrow a = Arc\sin\sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$$

$$e = 4b - 2a \rightarrow e = 4\text{Arcsin}\frac{\sin a}{n} - 2Arcsina$$

اگربجای $\sin a$ مقداربدست آمده را قرار دهیم فرمول نهایی بصورت زیر بدست می آید:

$$e = 4Arcsin\frac{\sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}}{n} - 2Arcsin\sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$$

اگر ضریب شکست نور در آب را ۱/۳۳ بگیریم، خواهیم داشت:

$$e = 4Arcsin\frac{0.8623}{1.33} - 2Arcsin0.8623$$

$$e \approx 42.3^\circ$$

برای نور قرمز

اگر ضریب شکست نور در آب را ۱/۳٤ بگیریم، خواهیم داشت:

$$e = 4Arcsin\frac{0.7348}{1.34} - 2Arcsin0.7348$$

$$e \approx 40.6^\circ$$

برای نور بنفش

به عبارت دیگر از این محاسبات می‌توان به این نتیجه دست یافت، شدت نـورخروجی در تمام زوایا یکسان نیست وبیشتر نور رنگینی کـه از قطره بیرون می‌رود، با جهت تابش خورشید، زاویه حدود ٤۲ درجه می‌سازد. البته ایـن زاویـه، بستگی به رنگ پرتو دارد و بین ٤۰ تا ٤۲ درجه برای رنگ‌های قرمز تا بنفش متفاوت است. بنابراین می‌توان تصور کرد که تنها در زوایای حدود ٤۲ درجه، پرتوهای رنگی به طور مؤثر از قطره خارج می‌شوند.

منابع و مآخذ

– سگل، موکول (۱۳۷٦). **آشنایی با نور و لیزر، ترجمه پریچهر همایون‌روز، تهران، ذکر، کتابهای قاصدک،**

- C. Boyer (1987). The rainbow: from myth to mathematics, Princeton University Press. Atmospheric Sciences, 29, 211.

-Fraser, Alistair B., (1972). "Inhomogenieties in the Color and Intensity of the Rainbow", Journal of

-Greenler, Robert, Rainbows, Halos, and Glories, Cambridge University Press 1980 ISBN 0 521 2305 3 and 38865 1 (pbk)

-H. Nussenzveig (1977).The theory of the rainbow, Scientific American, April.

-Humphreys, W. J(1929). Physics of the Air, McGraw-Hill Book Co.

-Humphreys, W. J.(1923). Weather Proverbs and Paradoxes, Williams and Wilkins Company

-R. A. R. Tricker (1970) Introduction to meteorological optics, American Elsevier.

-fa.wikipedia.org/wiki/

-www.youtube.com

-www.tebyan.net

-www.phys.uwosh.edu/rioux/genphysii/pdf/rainbows.pd

-www.phys.uwosh.edu

-www.konjkav.com

- www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-rainbows

پی‌نوشت

1) **Isaac Newton**
2) **René Descartes**

۳) ترا هرتز برابر $۱۰^{۱۲}$هرتز (هرتز یکای سنجش طول موج در سیستم SI است)

4) **Snell**