

مؤلفه‌های مؤثر در یادگیری دایره‌ی مثلثاتی و روابط بین آن‌ها

دکتر الهه امینی‌فر* مریم مجیدی‌فر** دکتر بهرام صالح صدق‌پور***

دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

چکیده

هدف از پژوهش حاضر، بررسی رابطه‌ی بین فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی و مؤلفه‌های تشکیل دهنده‌ی آن بود. در این راستا، ابتدا آزمونی شامل ۶۷ سؤال مطابق با جدول هدف - محتوای طبقه‌بندی بلوم طرح شد. با استفاده از ضرایب تمیز، دشواری و عدم هماهنگی درونی سؤالات، ۴۱ سؤال نامناسب حذف گردید. آزمون نهایی با ۲۶ سؤال بر روی ۱۴۷ نفر از دانش‌آموزان سال دوم متوسطه ریاضی فیزیک و علوم تجربی مدارس شهر زنجان اجرا، و مقدار آلفای کرونباخ برای هر مؤلفه محاسبه گردید. با استفاده از نتایج به‌دست آمده، مدل تجربی دانش یادگیرنده تدوین گردید. تجزیه و تحلیل روابط بین مؤلفه‌ها با استفاده از روش تحلیل مسیر نشان داد که رابطه‌ی مستقیم معناداری بین دانش زوایای مثلثاتی با فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی وجود دارد. بین فهمیدن زوایای مثلثاتی با فهمیدن تانژانت؛ و فهمیدن زوایای مثلثاتی با فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی نیز رابطه‌ی مستقیم معناداری وجود دارد. همچنین رابطه‌ی مستقیم معناداری بین فهمیدن تانژانت با فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی وجود دارد. نتایج این پژوهش نشان دادند که مؤلفه‌ی دانش زوایای مثلثاتی با واسطه‌گری مؤلفه‌ی فهمیدن زوایای مثلثاتی و مؤلفه‌ی فهمیدن تانژانت باعث افزایش مؤلفه‌ی فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی در یادگیرنده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: یادگیری، زوایای مثلثاتی، تانژانت، دایره‌ی مثلثاتی.

* استادیار گروه آموزش ریاضی (نویسنده مسئول) elahaeminifan@srttu.edu

** دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی

*** استادیار گروه علوم تربیتی

مقدمه

هدف آموزش در عصر جدید، پرورش افرادی است که توانایی تجزیه و تحلیل، ترکیب، ارزشیابی، مهارت‌های حل مسئله، مباحثه، مذاکره و مهارت‌های مدیریتی و فناورانه داشته باشند (سراجی، عطاران و علی‌عسگری، ۱۳۸۷). در دنیای امروز، نقش ریاضی در نظام عالم و تبیین پدیده‌ها بر کسی پوشیده نیست. از این رو، درک مفهومی، همراه با دانش حقایق و مهارت رویه‌ای بخش مهمی از تبحر ریاضی است (شورای ملی معلمان ریاضی، ۲۰۰۰). یادگیری و آموزش ریاضی از مقوله‌های روان‌شناختی است و پیشرفت قابل ملاحظه‌ای در ریاضی به دست نمی‌آید مگر این که روش‌های یادگیری ریاضیات شناخته شود (اسکمپ، ۱۹۷۶). از سوی دیگر، یادگیری زمانی اتفاق خواهد افتاد که یادگیرنده بتواند ارتباط بین مفاهیم هر مبحث را درک کرده و آن‌ها را برای حل مسئله در دنیای واقعی به کار بندد. فهم این که دانش‌آموزان چگونه ریاضی را یاد می‌گیرند، می‌تواند به معلمان ریاضی در انتخاب شیوه‌های تدریس کمک کند. در واقع، این فهم درست و واقع‌گرایانه، معلمان را قادر می‌سازد تا با داشتن تصویری شفاف از چگونگی بروز رفتار ریاضی افراد، تصمیم مناسب علمی در انتخاب عنوان‌های درسی، تقدم و تأخر مطالب و اتخاذ شیوه‌های آموزشی داشته باشند و در رفع موانع یادگیری دانش‌آموزان بکوشند. بنابراین، برای طراحی و تدوین یک برنامه‌ی درسی موفق توجه به فرآیندهای ذهنی و شناختی یادگیرنده بسیار حائز اهمیت است. توجه به اهداف آموزشی و این که یادگیرنده چگونه و با چه نظمی این اهداف را یاد می‌گیرد، به طراحان و برنامه‌نویسان آموزشی کمک می‌کند تا محتوای آموزشی را متناسب با ویژگی‌های درونی یادگیرنده تدوین کنند (علم‌الهدایی، ۱۳۸۱).

بهبود یادگیری و عملکرد ریاضی دانش‌آموزان، از موضوعات اساسی مورد بحث در حوزه‌ی آموزش ریاضی به شمار می‌آید. از این رو، پژوهش‌ها عوامل گوناگونی را برای دستیابی به این هدف بررسی کرده‌اند که از جمله‌ی آنها، دانش مفهومی و دانش رویه‌ای است. در این راستا، آگاهی از پاسخ به سؤالاتی مانند: دانش مفهومی چیست؟ دانش رویه‌ای چیست؟ ضرورت دارد، زیرا که تصمیم درباره‌ی چگونگی تدریس و تدریس چه چیزی، بر مکان مهم انواع دانش ساخته شده و تعامل مناسب بین هر دو استوار است. از نظر اسکمپ (۱۹۷۱)، به نقل از کیت‌انجی و هو،^۳ (۲۰۰۶) دو نوع دانش ریاضیاتی وجود دارد: (۱) دانشی که شخص را برای تشخیص نمادها و رویه‌های مرتبط قادر می‌سازد. (۲)

دانشی که شخص را برای فهماندن مفاهیم ریاضی قادر می‌سازد. از دانش رویه‌ای در حل مسائل ریاضی استفاده می‌شود، و دانش مفهومی، مفاهیم ریاضی و ارتباط آن‌ها با یکدیگر را توصیف می‌کند. هیبرت و ویرنه^۴ (۲۰۰۳) جمع کردن دو کسر با مخرج‌های متفاوت را به عنوان مثالی از دانش رویه‌ای، و ساختن ارتباط میان الگوریتم تفریق اعداد چندرقمی و دانش ارزش مکانی ارقام را به عنوان مثالی از دانش مفهومی برمی‌شمرند. مثال‌های هیبرت و ویرنه نشان می‌دهند وقتی دانش‌آموزان دانش مفهومی مناسبی از مطلب داشته باشند، باید بتوانند انواع مسائل مرتبط با آن را حل کنند. کسانی که درک کافی از مطلب مورد نظر ندارند، برای حل هر نوع مسئله‌ی مرتبط با مطلبی که پیش از این با آن مواجه نشده‌اند، به رویه‌های جدیدی نیاز دارند که معلم به آن‌ها معرفی کند. بنابراین، به نظر می‌رسد دیدگاه و نگرش معلم درباره‌ی مسائل جدید، نقش تعیین‌کننده‌ای در توسعه‌ی دانش رویه‌ای و مفهومی دانش‌آموزان ایفا می‌کند.

مثلثات، یکی از اساسی‌ترین مفاهیم ریاضیات است که در علوم دیگر کاربرد فراوانی داشته و بخش مهمی از ریاضیات دبیرستان است که در آن از حساب و هندسه و در توسعه‌ی توابع مثلثاتی از مفاهیم آنالیز استفاده می‌شود (گیلمن^۵، ۱۹۹۱). به نقل از اُرهان^۶، (۲۰۰۴). با توجه به پژوهش‌های پیشین، مثلثات یکی از درس‌هایی است که تعداد اندکی از دانش‌آموزان به آن علاقه داشته و در آن موفق هستند. به اعتقاد دانش‌آموزان، مثلثات در مقایسه با موضوعات دیگر ریاضیات، بسیار دشوارتر و انتزاعی‌تر است (گور^۷، ۲۰۰۹). از این رو، شناخت فرآیند یادگیری دانش‌آموزان می‌تواند به عنوان ابزاری مفید برای ارزیابی فهم و درک آن‌ها به کار گرفته شود. طراحی مدل روابط علی متناسب با اهداف آموزشی مبحث مورد نظر می‌تواند راهکار مؤثری را در اختیار طراحان برنامه‌ی درسی قرار دهد و بدین ترتیب، موجب بهبود عملکرد و کیفیت یادگیری شود (امینی‌فر، عقیلی و زعیم‌باشی، ۲۰۱۲).

وینر و دریفوس (۱۹۸۹)، به نقل از استکروس^۸، (۲۰۰۷) نقشه مفهومی مفاهیم ریاضی از جمله مفاهیم مثلثاتی را مجموعه‌ای از همه‌ی تصاویر ذهنی می‌داند که در ذهن دانش‌آموز با نام مفهوم، به همه‌ی مشخصات و خواص آن‌ها متصل هستند. تصاویر ذهنی شامل انواع بازنمایی مانند عکس، اشکال، نمودار و نمایش هندسی است. تعریف مفاهیم مثلثاتی، تعریف رسمی ریاضی برای فرمول‌بندی یک مفهوم خاص از قبیل یک رادیان

است. وجود شکاف بین نقشه مفهومی و تعریف مفهوم در ذهن دانش‌آموز، نشان‌دهنده‌ی درک سطحی دانش‌آموز از آن مفهوم است (وینر و دریفوس، ۱۹۸۹، به نقل از استکروس، ۲۰۰۷). توانایی استفاده از بازنمایی‌های مختلف و حرکت از یک بازنمایی به بازنمایی دیگر، دلیل دیگری برای درک مفهومی است؛ به این صورت که دانش‌آموز توانایی به‌کار بردن بازنمایی‌های متفاوت برای حل مسائل و کار با تکالیف مثلثات شامل رادیان، زوایای مرجع و دایره‌ی واحد که نشان‌دهنده‌ی درک آن‌ها است، را داشته باشد. فوکیودا و کاکیهانا^۹ (۲۰۰۴) نشان دادند دانش‌آموزانی که بیش از یک بازنمایی را در حل مسائل به‌کار می‌برند و می‌توانند به راحتی میان بازنمایی‌ها حرکت کنند، سطح بالاتری از درک را نسبت به دانش‌آموزانی که یک بازنمایی را انتخاب، و مورد استفاده قرار می‌دهند، دارند. توانایی دانش‌آموزان برای برقراری اتصالات معنادار بین بازنمایی‌ها از اهمیت یکسانی برخوردار است. برای مثال، دانش‌آموزی ممکن است بتواند از بازنمایی گرافیکی رادیان در اغلب موقعیت‌ها، و بازنمایی جبری در موقعیت‌های دیگر، استفاده کند. در صورتی که دانش‌آموز نتواند تشخیص دهد که چگونه دو بازنمایی، اطلاعات مشابهی در شکل‌های متفاوت نمایش می‌دهد، فاقد سطح بالایی از درک رادیان است. بررسی این که تا چه حد دانش‌آموزان از بازنمایی‌های مفاهیم مثلثاتی رادیان، زوایای مرجع و دایره‌ی واحد، استفاده، و بین آن‌ها اتصال ایجاد می‌کنند، حائز اهمیت است. می‌توان گفت دانش‌آموزانی که قادر به ساخت ادراک این نوع روابط با استفاده از بازنمایی‌های مختلف هستند، درک مفهومی داشته و دانش پیش‌نیاز برای شروع یک مطالعه‌ی معنادار از توابع مثلثاتی را دارا هستند.

بررسی متون آموزش ریاضی و نحوه‌ی تدریس به دانش‌آموزان، نشان می‌دهد که دانش‌آموزان با چالش‌هایی در فهم توابع مثلثاتی مواجه هستند. زمینه‌های آموزشی دانش‌آموزان می‌توانند شکاف‌هایی در درک آن‌ها از توابع مثلثاتی ایجاد کنند. این شکاف‌ها می‌توانند از طریق تعریف کتاب درسی که برای آموزش توابع مثلثاتی مورد استفاده قرار می‌گیرد، و نیز از طریق برنامه‌های نامناسب بکارگیری توابع مثلثاتی برای مثلث و دایره، ایجاد شوند. مطالعات متعدد، شواهد قابل توجهی ارائه کرده است که نشان می‌دهد آموزش مثلثات با مثلث قائم‌الزاویه نسبت به روش دایره‌ی واحد، انتخاب بهتری برای مدارس است (مور و استیسی^{۱۰}، ۱۹۹۶). هم‌چنین، استفاده از این توابع بدون درک کافی از رادیان و دایره‌ی واحد در درک دانش‌آموزان مشکلاتی ایجاد خواهد کرد.

پژوهش حاضر، بر اساس محتوای کتاب ریاضی دوم دبیرستان (ایرانمنش و همکاران، ۱۳۹۰) تنظیم گردیده که به معرفی مثلثات با استفاده از دایره مثلثاتی پرداخته است. در این کتاب، زاویه‌ی مثلثاتی به این صورت تعریف شده است: از دوران یک نیم‌خط حول رأسش یک ناحیه‌ای به وجود می‌آید که به آن زاویه می‌گویند. اندازه‌ی زاویه‌ی مثلثاتی به وسیله‌ی مقدار و جهت دوران یا چرخش از ضلع ابتدایی به ضلع انتهایی مشخص می‌شود. اگر جهت چرخش در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت باشد، اندازه مثبت، و اگر در جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد، اندازه منفی است. سپس به رسم زوایای کوچکتر از 360° در موقعیت استاندارد پرداخته شده است. در ادامه نیز واحدهای اندازه‌گیری زاویه، درجه و رادیان تعریف شده است: یک رادیان اندازه‌ی یک زاویه‌ی مرکزی است که کمانی به طول s ، برابر با شعاع r ، از دایره جدا می‌کند. از فرمول $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ برای تبدیل درجه به رادیان و بالعکس استفاده می‌شود. سؤالات مربوط به این مفاهیم، با عنوان دانش زوایای مثلثاتی نام‌گذاری شده است.

دایره‌ی مثلثاتی، دایره‌ای به شعاع واحد است که مرکز آن مبدأ مختصات است. جهت مثبت دایره‌ی مثلثاتی را خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت در نظر می‌گیرند (فراگزلو، ۱۳۸۰). اگر نقطه‌ای مانند A با مختصات (\sin, \cos) بر روی محیط دایره در نظر گرفته شود، طبق تعاریف سینوس و کسینوس، $\cos = x_A$ و $\sin = y_A$ است. با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی، زوایای هم‌ابتدا و هم‌انتهای^{۱۱} معرفی و همه‌ی زاویه‌هایی که سینوس، کسینوس و تانژانت آن‌ها معلوم است، تعیین شده است. درک زاویه‌ی مرجع، دانش‌آموز را قادر می‌سازد تا توجه خود را روی زوایای ربع اول متمرکز نماید، زیرا همه‌ی زوایای دیگر در اغلب روش‌ها به زاویه‌ای در ربع اول مربوط می‌شود. صرف‌نظر از بزرگی یک زاویه، یک زاویه‌ی متناظر در ربع اول وجود دارد که ویژگی آن مطابق با زاویه‌ی داده شده است (استکروس، ۲۰۰۷). سؤالات مربوط به این مفاهیم با عنوان فهمیدن زوایای مثلثاتی نام‌گذاری شده است. با داشتن \sin و \cos و استفاده از رابطه $\tan = \sin / \cos$ می‌توان \tan را محاسبه نمود. هم‌چنین شیب هر خط که با محور افقی زاویه‌ی حاده می‌سازد، برابر با تانژانت زاویه‌ی بین خط و محور افقی است. اگر معادله‌ی خط به صورت $y = mx + n$ و زاویه‌ی بین خط و قسمت مثبت محور x ها برابر باشد، آن‌گاه $m = \tan$ است، به m ضریب زاویه‌ی خط مذکور نیز می‌گویند. سؤالات مربوط به این

مفاهیم تحت عنوان فهمیدن تانژانت نام‌گذاری شده است. برای فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی، از زوایای مثلثاتی هم ابتدا و هم انتها استفاده نموده و به تعیین مقادیر توابع مثلثاتی زوایایی که کمتر از دوران کامل یا بیشتر از دوران کامل ($2\pi +$, $2\pi -$) هستند، پرداخته شده است. سؤالات مربوط به این مفاهیم، با عنوان فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی نام‌گذاری شده است. نصیری (۱۳۸۹) با استفاده از مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زوایای حاده، مقادیر نسبت‌های مثلثاتی تمام زوایا را مشخص کرده است. برای یادگیری بهتر، این روابط را به حالت‌های زوایای قرینه، زوایای مکمل، زوایایی به تفاضل، زوایای متمم و زاویه‌هایی به تفاضل $\frac{\pi}{2}$ تقسیم نموده است. با استفاده از مقادیر تانژانت زوایای حاده، مقادیر تانژانت تمام زوایا را نیز مشخص کرده است. با توجه به خواص دایره‌ی مثلثاتی و متناوب بودن توابع سینوس و کسینوس، این روابط برقرار است:

$$\begin{array}{ll} \sin(-\alpha) = -\sin \alpha & \cos(-\alpha) = \cos \alpha \\ \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha & \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \\ \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha & \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha \\ \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha & \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha \\ \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha & \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha \\ \sin(-\alpha) = -\sin \alpha & \cos(-\alpha) = \cos \alpha \end{array}$$

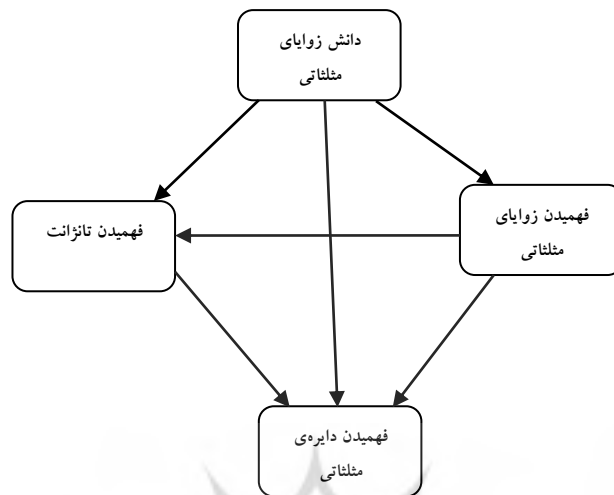
بروسیلوسکی^{۱۲} (۲۰۰۷)، به نقل از احمدلو، (۱۳۸۹) مدل یادگیرنده را نمایش اطلاعات دانشی یادگیرنده می‌داند، که برای تطبیق رفتار سیستم با یادگیری دانش‌آموز ضروری است (از اطلاعات موجود در مدل یادگیرنده، در سیستم‌های آموزش هوشمند^{۱۳}، برای پیش‌بینی رفتار یادگیرنده، و در ادامه، تطبیق خدمات آموزشی با توجه به نیازهای فردی و در نتیجه، پیشرفت فرآیند یادگیری استفاده می‌شود).

برای ارائه‌ی الگوی آموزش، ابتدا باید بر اساس یک مدل ساده شده از ذهن انسان، مدلی را برای آموزش و یادگیری معرفی نمود. مدل آموزش، یک الگو از فرآیند یادگیری یک مفهوم است که با استفاده از مدل یادگیرنده و به منظور تصمیم‌گیری در مورد ابزارها و راهبردهای مورد نیاز برای آموزش آن مفهوم، طراحی می‌شود (اسپوزیتو^{۱۴} و همکاران، ۲۰۰۴، به نقل از عقیلی، ۱۳۸۹). رکو^{۱۵} (۲۰۰۴، به نقل از عقیلی، ۱۳۸۹) الگوها و فرآیندهای ذهنی فرد و راه‌های ادراک و دریافت مفاهیم توسط وی را، از جمله مواردی

می‌داند که تنها با توجه به مدل یادگیرنده، به دست می‌آیند و عدم توجه به آن‌ها باعث می‌شود تا اصول، ضوابط و مدل آموزشی مناسب جهت فراهم ساختن شرایط اجرای برنامه‌ی درسی، طراحی نشود که این امر در نهایت، منجر به عدم اثربخشی محتوای یادگیری می‌گردد.

مدل دانش یادگیرنده، شامل مجموعه‌ای از شبکه‌های بیزین^{۱۶} است که هر کدام به یک هدف آموزشی^{۱۷} مرتبط هستند و برگ‌های شبکه، سؤالات مربوط به آن هدف آموزشی است. زیرهدف‌های هر هدف آموزشی در سطوح بالاتر قرار می‌گیرند. در انتها گره و به عبارتی هدف آموزشی قرار دارد که احتمال یادگیری این هدف را نشان می‌دهد (کاردان و کاردان، ۲۰۰۸). نورانی و همکاران (۱۳۸۸)، به نقل از امینی‌فر، صالح صدق‌پور و صباغزاده فیروزآبادی، (۱۳۹۰) مدل یادگیرنده را به عنوان یکی از مشخصه‌های فردی در هر سیستم آموزشی تطبیق‌پذیر^{۱۸} تلقی می‌کنند. این مدل شامل اطلاعات ضروری یادگیرنده است که در سیستم‌های آموزشی به صورت صریح و یا از طریق آزمون استخراج می‌شود. هم‌چنین این مدل به صورت تلویحی اشاره دارد به اینکه اساس آن بر رفتار یادگیرنده در فرآیند یادگیری و استفاده از ساختاری که بتواند این مدل را حفظ کرده و به درستی به روز نماید، قرار دارد (امینی‌فر و همکاران، ۱۳۹۰).

از آن جا که برای آموزش و یادگیری مثلثات، مدل تجربی مبتنی بر نتایج پژوهش‌های انجام شده، یافت نشد، لذا با توجه به پیشینه‌ی پژوهش و چارچوبی که در کتاب ریاضیات دوم دبیرستان (ایرانمنش و همکاران، ۱۳۹۰) برای آموزش این مبحث در نظر گرفته شده و قبلاً هم توضیح داده شد، مدل نظری دایره مثلثاتی مطابق شکل ۱ طراحی گردید.



شکل ۱: مدل نظری دایره‌ی مثلثاتی

پژوهش حاضر به دنبال طراحی، اجرا و ارزشیابی اهداف آموزشی دایره‌ی مثلثاتی به منظور تولید ساختار دانش یادگیرندگان و مدل آن است. در این راستا فرضیه‌های پژوهش، عبارتند از:

- ۱- بین دانش زوایای مثلثاتی و فهمیدن زوایای مثلثاتی رابطه معنادار وجود دارد.
- ۲- بین دانش زوایای مثلثاتی و فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی رابطه معنادار وجود دارد.
- ۳- بین فهمیدن زوایای مثلثاتی و فهمیدن تانژانت رابطه معنادار وجود دارد.
- ۴- بین فهمیدن زوایای مثلثاتی و فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی رابطه معنادار وجود دارد.
- ۵- بین فهمیدن تانژانت و فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی رابطه معنادار وجود دارد.

روش

پژوهش حاضر بر حسب هدف، از نوع پژوهش‌های کاربردی؛ و بر حسب طرح پژوهش، از نوع طرح‌های همبستگی^{۱۹} است. در این پژوهش، با استفاده از مدل‌یابی روابط علی^{۲۰} به بررسی روابط بین متغیرها پرداخته شده است.

جامعه آماری، نمونه و روش نمونه‌گیری

جامعه‌ی آماری این پژوهش، کلیه‌ی دانش‌آموزان سال دوم دبیرستان شهر زنجان هستند که در رشته‌های ریاضی فیزیک و علوم تجربی در سال تحصیلی ۹۱-۱۳۹۰ مشغول به تحصیل بودند. روش نمونه‌گیری در این پژوهش، نمونه‌گیری در دسترس است که از طریق آن، ۱۴۷ دانش‌آموز به عنوان شرکت‌کنندگان در پژوهش انتخاب شدند. بر اساس نظر دینگ، ولیسر و هارلو (۱۹۹۵)، هنگامی که با تحلیل مسیر سروکار داریم در تعداد زیادی از مطالعات، نمونه ۱۰۰ تا ۱۵۰ واحدی مناسب است (به نقل از شوماخر و لومکس، ترجمه قاسمی، ۱۳۸۸).

ابزار پژوهش

به منظور گردآوری داده‌ها، بر اساس مبانی نظری و پژوهش‌های انجام شده و مطالعه‌ی منابع اسنادی، اهداف آموزشی دایره‌ی مثلثاتی (در مبحث مثلثات) به چهار بخش "زوایا و اندازه‌ی زوایا"، "شناخت دایره‌ی مثلثاتی"، "تعیین مقادیر مثلثاتی برای تمام زوایا" و "رابطه‌ی بین شیب خط و تانژانت" تقسیم، و با توجه به طبقه‌بندی اهداف آموزشی بلوم (سه سطح اول آن شامل دانش، فهمیدن و کار بستن) در قالب جدول هدف - محتوا قرار گرفت. بر اساس این جدول، آزمونی حاوی ۶۷ سؤال چهارگزینه‌ای طراحی شد. سؤالات به سه آزمون همگن الف، ب و ج (که هر آزمون شامل ۱ سؤال از هر هدف بود. برای اهدافی که کمتر از ۳ سؤال داشتند، سؤال مربوطه در بیش از ۱ آزمون تکرار شد)، برای اجرا در یک مطالعه‌ی مقدماتی^{۲۱} آماده گردید.

روش اجرا

آزمون‌های الف، ب و ج بر روی سه گروه ۳۸ نفری از دانش‌آموزان دوم دبیرستان در رشته‌های ریاضی فیزیک و علوم تجربی دبیرستان‌های شهر زنجان، اجرا گردید. در این مرحله ۴۱ سؤال به دلیل عدم هماهنگی درونی با کل سؤالات آزمون و نیز عدم وجود ضریب دشواری و ضریب تمیز مناسب برای آن‌ها از نظر آماری مورد تأیید قرار نگرفته و حذف شدند. در نهایت، یک آزمون با ۲۶ سؤال چهارگزینه‌ای بر روی ۱۴۷ نفر از دانش‌آموزان نمونه‌ی مورد پژوهش اجرا شد. ضریب آلفای کرونباخ^{۲۲} برای هر مؤلفه (دانش زوایای مثلثاتی، $\alpha = 0/67$ ؛ فهمیدن زوایای مثلثاتی، $\alpha = 0/63$ ؛ فهمیدن

تانژانت، $\alpha = 0/58$ ؛ و فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی، $\beta = 0/72$ (محاسبه گردید. سپس داده‌های حاصل جهت تعیین مدل تجربی دانش یادگیرنده در این مبحث مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت و با توجه به سؤالات آزمون اصلی، این مؤلفه‌ها به دست آمد:

مؤلفه ۱) دانش زوایای مثلثاتی: تعریف زاویه‌ی مثلثاتی؛ رسم زوایای حاده در موقعیت استاندارد؛ تعریف رادیان؛ تبدیل درجه به رادیان و بالعکس.

مؤلفه ۲) فهمیدن زوایای مثلثاتی: زوایای مرجع، رسم زوایای بزرگتر از 90° ، 180° ، 270° و 360° در موقعیت استاندارد، با تبدیل به $(90^\circ +)$ ، $(180^\circ +)$ ، $(270^\circ +)$ و $(360^\circ +)$ که در آن $(90^\circ < < 90^\circ)$ است؛ حل معادلات مثلثاتی با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی که در آن \sin و \cos برابر با مقادیر خاص هستند.

مؤلفه ۳) فهمیدن تانژانت: شناخت محور تانژانت در دایره‌ی مثلثاتی؛ رابطه‌ی بین شیب خط و تانژانت زاویه‌ی بین خط و قسمت مثبت محور x ها.

مؤلفه ۴) فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی: تعیین نسبت‌های مثلثاتی زاویه، با معلوم بودن مختصات هر نقطه روی محیط دایره‌ی مثلثاتی؛ تعیین علامت هر یک از نسبت‌های مثلثاتی در هر ناحیه با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی؛ تعیین مقادیر سینوس، کسینوس و تانژانت تمام زوایا با استفاده از زوایای قرینه، مکمل، متمم، زاویه‌هایی با اندازه‌ی به تفاضل و با اندازه‌ی به تفاضل $1/2$.

یافته‌ها

به منظور تدوین و بررسی مدل، محاسبه‌ی ماتریس همبستگی مؤلفه‌های مورد پژوهش ضروری است، که این ماتریس به شرح جدول ۱ محاسبه گردید. مقادیر موجود در این جدول میزان همبستگی بین مؤلفه‌های موجود در مدل را نمایش می‌دهد.

جدول ۱: ماتریس همبستگی عوامل مثلثات

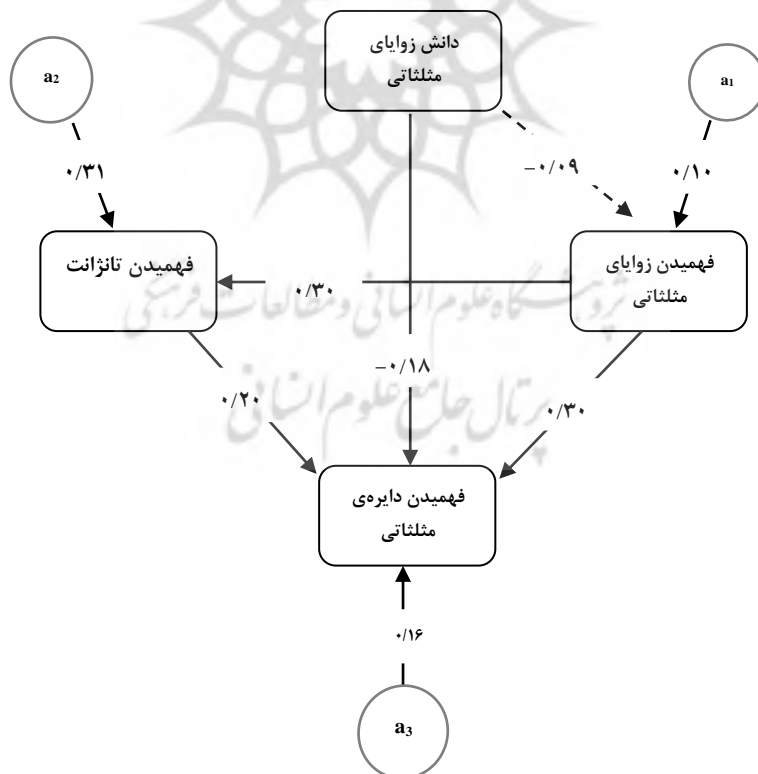
متغیرها	۱	۲	۳	۴
۱- دانش زوایای مثلثاتی	-			
۲- فهمیدن زوایای مثلثاتی	-0/09	-		
۳- فهمیدن تانژانت	-0/03	0/30*	-	
۴- فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی	-0/22*	0/37*	0/29*	-

* $P < 0/01$

با استفاده از روش تحلیل مسیر، ضرائب رگرسیون استاندارد به دست آمد که جدول ۲ بیانگر آن است. در این راستا، شکل ۲ نیز مدل تجربی دایره مثلثاتی را بر اساس مقادیر استاندارد شده نشان می‌دهد.

جدول ۲: ماتریس ضرایب رگرسیون روابط مستقیم بین مؤلفه‌های دایره‌ی مثلثاتی

اثر مستقیم مؤلفه‌ها در مدل	مقدار برآورد	خطای استاندارد	مقدار استاندارد	مقدار t	سطح معناداری
دانش زوایای مثلثاتی با فهمیدن زوایای مثلثاتی	-۰/۱۰	۰/۰۹	-۰/۰۹	۱/۰۸	$p > ۰/۰۵$
دانش زوایای مثلثاتی با فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی	-۰/۳۰	۰/۱۲	-۰/۱۸	۲/۵۱	$p < ۰/۰۵$
فهمیدن زوایای مثلثاتی با فهمیدن تانژانت	۰/۵۷	۰/۱۵	۰/۳۰	۳/۸۰	$p < ۰/۰۱$
فهمیدن زوایای مثلثاتی با فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی	۰/۴۴	۰/۱۱	۰/۳۰	۳/۸۷	$p < ۰/۰۱$
فهمیدن تانژانت با فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی	۰/۱۵	۰/۰۶	۰/۲۰	۲/۵۳	$p < ۰/۰۵$



شکل ۲: مدل تجربی دایره‌ی مثلثاتی بر اساس مقادیر استاندارد شده

براساس اطلاعات مدل تجربی (شکل ۲) و مقادیر استاندارد روابط مستقیم بین متغیرها (جدول ۲) مشاهده می‌شود که رابطه مستقیم بین دانش زوایای مثلثاتی با فهمیدن زوایای مثلثاتی ($t = ۱/۰۸$ و $= -۰/۰۹$) معنادار نیست ($P > ۰/۰۵$). اما رابطه مستقیم بین دانش زوایای مثلثاتی با فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی ($t = ۲/۵۱$ و $= -۰/۱۸$) معنادار است ($P < ۰/۰۵$). هم‌چنین بین فهمیدن زوایای مثلثاتی با فهمیدن تانژانت ($t = ۳/۸۰$ و $= ۰/۳۰$)؛ و فهمیدن زوایای مثلثاتی با فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی ($t = ۳/۸۷$ و $= ۰/۳۰$) رابطه‌ی مستقیمی وجود دارد که در سطح $P < ۰/۰۱$ معنادار است. رابطه‌ی مستقیمی بین فهمیدن تانژانت با فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی ($t = ۲/۵۳$ و $= ۰/۲۰$) وجود دارد که در سطح $P < ۰/۰۵$ معنادار است. در این راستا، در جدول ۳ مقادیر استاندارد روابط غیرمستقیم بین متغیرها نشان داده شده است.

جدول ۳: ماتریس ضرایب رگرسیون روابط غیرمستقیم بین مؤلفه‌های دایره‌ی مثلثاتی

مقدار برآورد	مقدار خطای استاندارد	مقدار مقدار ت	سطح معناداری	اثر غیرمستقیم مؤلفه‌ها در مدل
۰	۰/۰۹	۰	$p > ۰/۰۵$	دانش زوایای مثلثاتی با فهمیدن زوایای مثلثاتی
-۰/۰۵	۰/۱۲	-۰/۰۳	$p > ۰/۰۵$	دانش زوایای مثلثاتی با فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی
۰	۰/۱۵	۰	$p > ۰/۰۵$	فهمیدن زوایای مثلثاتی با فهمیدن تانژانت
۰/۰۹	۰/۱۱	۰/۷۶	$p > ۰/۰۵$	فهمیدن زوایای مثلثاتی با فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی
۰	۰/۰۶	۰	$p > ۰/۰۵$	فهمیدن تانژانت با فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی

با توجه به مقادیر استاندارد اثرکل (مجموع) بین مؤلفه‌ها (جدول ۴)، اثر کل بین دانش زوایای مثلثاتی با فهمیدن زوایای مثلثاتی ($t = ۱/۰۸$ و $= -۰/۰۹$) در سطح $P < ۰/۰۵$ معنادار نیست. اما رابطه بین مؤلفه‌های دانش زوایای مثلثاتی با فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی ($t = ۲/۹۴$ و $= ۰/۳۰$)؛ فهمیدن زوایای مثلثاتی با فهمیدن تانژانت ($t = ۳/۸۰$ و $= ۰/۳۰$)؛ و فهمیدن زوایای مثلثاتی با فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی ($t = ۴/۶۳$ و $= ۰/۳۶$) در سطح $P < ۰/۰۱$ معنادار است. هم‌چنین اثر کل بین فهمیدن تانژانت با فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی ($t = ۲/۵۳$ و $= ۰/۲۰$) در سطح $P < ۰/۰۵$ معنادار است.

جدول ۴: ماتریس ضرایب رگرسیون روابط کلی بین عوامل مثلثات

اثر کل مؤلفه‌ها در مدل	مقدار برآورد	خطای استاندارد	مقدار استاندارد	مقدار t	سطح معناداری
دانش زوایای مثلثاتی با فهمیدن زوایای مثلثاتی	-۰/۱۰	۰/۰۹	-۰/۰۹	۱/۰۸	$p > ۰/۰۵$
دانش زوایای مثلثاتی با فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی	-۰/۳۵	۰/۱۲	-۰/۲۱	۲/۹۴	$p < ۰/۰۱$
فهمیدن زوایای مثلثاتی با فهمیدن تانژانت	۰/۵۷	۰/۱۵	۰/۳۰	۳/۸۰	$p < ۰/۰۱$
فهمیدن زوایای مثلثاتی با فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی	۰/۵۲	۰/۱۱	۰/۳۶	۴/۶۳	$p < ۰/۰۱$
فهمیدن تانژانت با فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی	۰/۱۵	۰/۰۶	۰/۲۰	۲/۵۳	$p < ۰/۰۵$

جدول ۵ شاخص‌های برازش مدل (مطلق، نسبی و تعدیل یافته) را نشان می‌دهد.

اطلاعات این جدول بیانگر این مطلب است که مدل نهایی پژوهش با توجه به نوع داده‌ها در بهترین حالت برازش قرار دارد.

جدول ۵: شاخص‌های برازش مدل نهایی دایره‌ی مثلثاتی

شاخص برازش	مقدار	دامنه مورد قبول	نتیجه
$2/df$	۰/۰۰۱	< ۲	تأیید مدل
RMR	۰/۰۰۱	نزدیکتر به صفر	تأیید مدل
GFI	۱/۰۰۰	$> ۰/۹$	تأیید مدل
AGFI	۱/۰۰۰	$> ۰/۹$	تأیید مدل
TLI	۱/۱۳۸	$> ۰/۹$	تأیید مدل
IFI	۱/۰۲۱	$> ۰/۹$	تأیید مدل
CFI	۱/۰۰۰	$> ۰/۹$	تأیید مدل
RMSEA	۰/۰۰۰	$< ۰/۰۵$	تأیید مدل
PCLOSE	۰/۹۸۱	$> ۰/۰۵$	تأیید مدل
P	۰/۹۷۷	$> ۰/۰۵$	تأیید مدل

بحث و نتیجه‌گیری

نتایج این پژوهش در مورد تأثیر دانش زوایای مثلثاتی بر فهمیدن زوایای مثلثاتی نشان می‌دهد که فرض تحقیق تأیید نشده است. این موضوع نشان می‌دهد که رابطه‌ای بیرون از مدل بین این دو متغیر وجود ندارد، ولی در کل مدل (یعنی در مجموعه‌ای از نقشه) این رابطه وجود دارد. بدین معنی که برای تشکیل رابطه‌ی معنادار بین این دو مؤلفه، از دانش زوایای مثلثاتی به عنوان پیش‌خورد^{۳۳} مربوط به فهمیدن زوایای مثلثاتی و همین‌طور از فهمیدن زوایای مثلثاتی به عنوان بازخورد^{۲۴} مربوط به دانش زوایای مثلثاتی استفاده می‌شود. بنابراین، دانش زوایای مثلثاتی و فهمیدن زوایای مثلثاتی هر کدام دارای دو نقش هستند. یک نقش مربوط به معنای واقعی خودشان، و نقش دوم مربوط به رابطه‌ای که با دیگری دارند. ایرانمنش و همکاران (۱۳۹۰) در کتاب ریاضی دوم دبیرستان در بخش مثلثات، پس از تعریف زاویه به وسیله‌ی مقدار و جهت چرخش، رسم زوایای کوچکتر از ۳۶۰° در موقعیت استاندارد، و تعریف واحد اندازه‌گیری رادیان، به تعریف دایره‌ی مثلثاتی پرداخته‌اند. سپس با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی به معرفی زوایای هم‌ابتدا و هم‌انتهای تعیین‌شده‌ی زاویه‌هایی که سینوس، کسینوس و تانژانت آن‌ها معلوم است، اقدام کرده‌اند. یافته‌های حاصل از مصاحبه با اساتید و دبیران باتجربه در این درس نیز بیانگر این مطلب است که برای تشخیص زوایای هم‌ابتدا و هم‌انتهای تعیین‌شده‌ی زاویه‌هایی که سینوس و کسینوس و تانژانت آن‌ها معلوم است، تنها استفاده از دانش زاویه‌ی مثلثاتی و واحد اندازه‌گیری زاویه کافی نیست.

نتایج در مورد تأثیر فهمیدن زوایای مثلثاتی بر فهمیدن تانژانت نشان می‌دهد که فرض تحقیق، تأیید شده و فهمیدن زوایای مثلثاتی بر فهمیدن تانژانت تأثیر می‌گذارد. این موضوع نشان می‌دهد که برای فهمیدن تانژانت، آشنایی با فهمیدن زوایای مثلثاتی ضروری است. در کتاب ریاضی دوم دبیرستان (ایرانمنش و همکاران، ۱۳۹۰) در بخش مثلثات، برای به دست آوردن رابطه‌ی تانژانت زاویه و شیب خط‌هایی که با محور x همان زاویه‌ی حاده را می‌سازند، از محور تانژانت در دایره‌ی مثلثاتی و مقادیر تانژانت زوایای حاده، و هم‌چنین برای تعیین شیب خط‌هایی که با جهت مثبت محور x زاویه‌ی منفرجه می‌سازند، از زوایای مثلثاتی هم‌ابتدا و هم‌انتهای استفاده شده است. سپس برای تعیین زاویه‌هایی که

خطوط با جهت مثبت محور X می‌سازند از تعیین همه‌ی زاویه‌هایی که تانژانت آن‌ها معلوم است، استفاده شده است.

نتایج در مورد تأثیر فهمیدن زوایای مثلثاتی بر فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی نشان داد که فرض تحقیق تأیید شده است. بنابراین، یادگیری فهمیدن زوایای مثلثاتی موجب افزایش مؤلفه‌ی فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی در یادگیرنده می‌شود. در کتاب ریاضیات دوم دبیرستان (ایرانمنش و همکاران، ۱۳۹۰) در بخش مثلثات، برای فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی، با استفاده از زوایای مثلثاتی هم ابتدا و هم انتها به تعیین مقادیر توابع مثلثاتی زوایایی که کمتر از دوران کامل یا بیشتر از دوران کامل $- 2$ ، 2 هستند، پرداخته شده است. همچنین نصیری (۱۳۸۹) با استفاده از مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زوایای حاده، مقادیر نسبت‌های مثلثاتی تمام زوایا را نیز مشخص کرده است. او برای یادگیری بهتر، این روابط را به حالت‌های زوایای قرینه، زوایای مکمل، زوایای به تفاضل π ، زوایای متمم و زاویه‌هایی به تفاضل $\frac{\pi}{2}$ تقسیم نموده است. از طرفی نتایج حاصل از مصاحبه با اساتید و دبیران مجرب در این درس بیانگر این مطلب است که برای فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی، باید از مقادیر توابع مثلثاتی زوایای حاده و زوایای هم‌ابتدا و هم‌انتهای و تعیین همه‌ی زاویه‌هایی که سینوس، کسینوس و تانژانت آن‌ها معلوم است، استفاده نمود.

نتایج در مورد تأثیر فهمیدن تانژانت بر فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی نشان داد که فرض تحقیق تأیید شده است. بنابراین، یادگیری فهمیدن تانژانت موجب افزایش مؤلفه‌ی فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی در یادگیرنده می‌شود. این موضوع نشان می‌دهد که برای فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی، آشنایی با فهمیدن تانژانت ضروری است. نصیری (۱۳۸۹) با استفاده از مقادیر تانژانت زوایای حاده، مقادیر تانژانت تمام زوایا را مشخص کرده و برای یادگیری بهتر، این روابط را به حالت‌های زوایای قرینه، زوایای مکمل، زوایای به تفاضل $\frac{\pi}{2}$ ، زوایای متمم و زاویه‌هایی به تفاضل $\frac{\pi}{2}$ تقسیم نموده است.

با توجه به نتایج پژوهش حاضر و با استفاده از مدل تجربی به‌دست آمده، می‌توان

گفت برای آموزش دایره‌ی مثلثاتی به این صورت عمل می‌شود:

ابتدا به معرفی دانش زوایای مثلثاتی (تعریف زاویه‌ی مثلثاتی، رسم زاویه در موقعیت استاندارد و واحد اندازه‌گیری زاویه) پرداخته می‌شود. سپس فهمیدن زوایای مثلثاتی (زوایای هم‌ابتدا و هم‌انتهای) معرفی می‌گردد و رابطه‌ی بین دانش زوایای مثلثاتی و فهمیدن زوایای

مثلثاتی توسط آموزش تشکیل می‌گردد. به محض این که این رابطه تشکیل شد، فهمیدن زوایای مثلثاتی دو معنایی می‌شوند. یک معنا مربوط به خودش و معنای دوم مربوط به بازخورد دانش زوایای مثلثاتی است. به‌طور همزمان، دانش زوایای مثلثاتی هم دو معنایی می‌شوند. معنای دوم آن مربوط به پیش‌خورد فهمیدن زوایای مثلثاتی است. پس از آموزش مؤلفه‌ی فهمیدن تانژانت (رابطه‌ی بین شیب خط و تانژانت زاویه‌ی بین خط و قسمت مثبت محور Xها)، رابطه‌ی بین فهمیدن زوایای مثلثاتی و فهمیدن تانژانت خودبخود تشکیل می‌گردد. به محض آن که این رابطه تشکیل شد، انتظار می‌رود که بقیه‌ی روابط تشکیل شوند. یعنی فهمیدن تانژانت دو معنا پیدا می‌کند، یک معنا مربوط به معنای خودش و معنای دیگر مربوط به بازخورد فهمیدن زوایای مثلثاتی است. هم‌زمان مفهوم فهمیدن زوایای مثلثاتی معنای سوم خود را به عنوان پیش‌خورد فهمیدن تانژانت پیدا می‌کند. در ادامه به معرفی فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی پرداخته می‌شود. به محض معرفی فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی، رابطه‌ی بین فهمیدن تانژانت و فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی و هم‌چنین رابطه‌ی بین فهمیدن زوایای مثلثاتی و فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی، و نیز بقیه‌ی روابط به‌طور خودکار تشکیل می‌شوند. یعنی فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی چهار معنا پیدا می‌کند، یک معنا مربوط به معنای خودش و سه معنای دیگر مربوط به بازخورد دانش زوایای مثلثاتی، فهمیدن زوایای مثلثاتی، و فهمیدن تانژانت هستند. هم‌زمان سه مفهوم دیگر، یعنی دانش زوایای مثلثاتی و فهمیدن تانژانت، معنای سوم؛ و فهمیدن زوایای مثلثاتی هم معنای چهارم خود را به عنوان پیش‌خورد فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی پیدا می‌کنند. به این ترتیب همه‌ی مفاهیم و روابط ذره ذره تشکیل شده و در نتیجه کل مدل تشکیل می‌شود.

در فهمیدن زوایای مثلثاتی، دانش‌آموزان به سطح فهمیدن (ترجمه) می‌رسند. در این مرحله، مهارت‌های مقدماتی برای ترجمه را به دست می‌آورند، یعنی دانش‌آموزان می‌توانند مطالب گفته شده در کتاب را به زبان خود خلاصه کنند. در فهمیدن تانژانت، یک مرحله بالاتر می‌روند، و در سطح فهمیدن (برون‌یابی) قرار دارند. مفاهیم آموخته‌شده را باید بتوانند در حل مسائلی که نیاز به تشخیص ندارند، به کار برند. این در واقع نوعی دانش رویه‌ای است و می‌توانند با موفقیت یک رویه‌ی مشخص را دنبال کنند. در فهمیدن دایره‌ی مثلثاتی به سطح کاربرستن از سطوح شناختی بلوم می‌رسند، و باید تشخیص دهند که از کدام رویه در

مؤلفه‌های مؤثر در یادگیری دایره‌ی مثلثاتی و روابط بین آن‌ها ۱۷

حل مسائل استفاده کنند. به عبارت دیگر، تشخیص رویه مناسب در حل مسئله مورد توجه این بخش از مدل است.

با توجه به پژوهش انجام گرفته، پژوهش در زمینه‌های بررسی مدل تجربی روابط بین این مدل با مدل‌های بخش‌های دیگر مبحث مثلثات؛ و استفاده از این مدل برای تولید محتوای الکترونیکی این بخش از درس مثلثات و ارزشیابی آن پیشنهاد می‌گردد.

یادداشت‌ها

- | | |
|--|----------------------------------|
| 1. National Council of Teachers of Mathematics | 2. Skemp |
| 3. Kiat Ng & Hu | 4. Hiebert & Wearne |
| 5. Gillman | 6. Orhun |
| 7. Gur | 8. Steckroth |
| 9. Fukuda & Kakihana | 10. Moore & Stacey |
| 11. Coterminal | 12. Brusilovsky |
| 13. Intelligent Tutoring Systems (ITS) | 14. Esposito |
| 15. Rokou | 16. Bayesian Networks |
| 17. Learning object | 18. Adaptive Educational System |
| 19. Correlation | 20. Model of Causal Relations |
| 21. Pilot Study | 22. Cronbach's Coefficient Alpha |
| 23. Feedforward | 24. Feedback |

منابع

الف. فارسی

احمدلو، لیلا (۱۳۸۹). طراحی سلسله مراتبی قطعات آموزشی برای محیط یادگیری الکترونیکی بر اساس مدل ساختاری دانش یادگیرنده. پایان‌نامه منتشر نشده کارشناسی ارشد. دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی.

امینی فر، الهه؛ صالح‌صدق‌پور، بهرام و صباغ‌زاده فیروزآبادی، زهرا (۱۳۹۰). مدل ساختاری دانش یادگیرنده بر اساس طراحی اهداف آموزشی. مجله‌ی مدل‌سازی پیشرفته ریاضی،

۱(۱)، ۷۹-۹۶.

ایرانمنش، علی؛ جمالی، محسن؛ ربیعی، حمیدرضا؛ ریحانی، ابراهیم؛ شاهورانی، احمد؛ و عالمیان، وحید (۱۳۹۰). ریاضیات دوم دبیرستان. چاپ سوم. تهران: نشر کتاب‌های درسی ایران.

سراجی، فرهاد؛ عطاران، محمد؛ و علی‌عسگری، مجید (۱۳۸۷). ویژگی‌های طرح برنامه‌ی درسی دانشگاه‌های مجازی ایران و مقایسه آن با الگوی راهنمای طراحی برنامه‌ی درسی دانشگاه مجازی. فصلنامه پژوهش و برنامه‌ریزی در آموزش عالی، ۵۰، ۹۷-۱۱۸.

شوماخر، ای. و لومکس، جی. (۱۳۸۸). مقدمه‌ای بر مدل‌سازی معادلات ساختاری (با کاربرد برنامه‌های AMOS LISREL و EQS). ترجمه‌ی وحید قاسمی، تهران: جامعه‌شناسان. (تاریخ انتشار به زبان اصلی: ۲۰۰۴).

عقیلی، نرگس (۱۳۸۹). مدل‌یابی شبکه دانش یادگیرنده در بحث معادلات دیفرانسیل همگن مرتبه دوم. پایان‌نامه منتشر نشده کارشناسی ارشد، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی.

علم‌الهدایی، سیدحسین (۱۳۸۱). رویکردهای نوین در آموزش ریاضی. چاپ اول. تهران: شیوه.

قراگزلو، جلیل‌اله (۱۳۸۰). مثلثات پایه. تهران: موسسه فرهنگی فاطمی.

نصیری، محمود (۱۳۸۹). آموزش مفهومی ریاضیات ۲ سال دوم. چاپ اول. تهران: پیشروان.

ب. انگلیسی

Aminifar, E., Aqili, N., & Zaeembashi, A. (2012). The structural relationships between conceptual and procedural knowledge in differential equations. *Quarterly Journal of Research on Issues of Education*, 28, 5-24.

Byrne, B. M. (2001). *Structural equation modeling with Amos: Basic concepts, applications, and programming*. Mahwah, New Jersey: Erlbaum.

Fukuda, C., & Kakihana, K. (2004). An integrated learning environment for developing function sense: From velocity to first steps in calculus using spreadsheets. *Proceedings of the 37th Conference of Japan Society of Mathematics Education*, 517-522.

- Gur, H. (2009). Trigonometry learning. *New horizons in Education*, 57(1), 67-90.
- Hiebert, J., & Wearne, D. (2003). Developing understanding through problem solving. In H. L. Schoen (Ed.), *Teaching Mathematics through Problem Solving: Grades 6-12*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Kardan, A., & Kardan, S. (2008). Learning object tendency: a new concept for adaptive learning improvement, Proceeding of International Conference on Virtual Learning, Bucurest, Romania. In R. Dienstbier (Ed.), *Nebraska Symposium on Motivation*, 38, 237-246.
- Kiat Ng, B., & Hu, C. (2006). *Use web-based simulation to learn trigonometric curves*. Faculty of Education and Social Work, Education Building, A35, University of Sydney, NSW 2006, Australia.
- Moore, K., & Stacey, K. (1996) Trigonometry: Comparing ratio and unit circle methods, In P. Clarkson (Ed.) *Technology in mathematics education: Proceedings of the Nineteenth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, Melbourne: Mathematics Education Research Group of Australasia, 322-329
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.
- Orhun, N. (2004). Students mistakes and misconceptions on teaching of trigonometry. *International Conference on New Ideas in Mathematics Education*, Palm Cove: Australia.
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, 77, 20-26.
- Steckroth, J. J. (2007). *Technology-enhanced mathematics instruction: Effects of visualization on student understanding of trigonometry*. Ph.D. Thesis, University of Virginia.