

## اثر ریسک‌گریزی فرد در انتخاب پویای سبد مالی بهینه

سید بابک ابراهیمی

دانشجوی دکتری مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران\*

مسعود باباخانی

استادیار گروه مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج\*\*

سمیرا متقی دستنایی

دانشجوی دکترای اقتصاد سلامت، دانشگاه تربیت مدرس\*\*\*

آرمین جبارزاده

دانشجوی دکتری مهندسی صنایع، دانشگاه علم و صنعت ایران\*\*\*\*

صفحات:

تاریخ پذیرش: ۸۸/۱۲/۴

تاریخ دریافت: ۸۸/۲۹/۲

آحاد جامعه اقتصادی در زندگی روزمره در حال تصمیم‌گیری برای افزایش مطلوبیت انتظاری خود در سطح معینی از ریسک هستند. به عنوان بخشی از فرآیندهای تصمیم‌گیری، فرد تصمیم‌گیرنده مایل است تا ثروت خود را به گونه‌ای تخصیص دهد که حداکثر بازگشت انتظاری به سبد دارایی‌های او تعلق بگیرد. لذا این سوال همواره مطرح بوده است که سبد بهینه دارایی‌های یک فرد چگونه شکل می‌گیرد تا مطلوبیت انتظاری وی در سطح ریسک موردنظر در بالاترین مقدار ممکن قرار گیرد. پاسخ به این سوال برای تحلیل‌گران مالی از جنبه سرمایه‌گذاری و حضور در بازارهای مالی و برای اقتصاددانان از جنبه تحلیل بازار دارایی‌ها و بررسی اثرات آن بر اقتصاد مورد توجه بوده است. اقتصاددانان و ریاضیدانان مالی برای مدل‌سازی تصمیم‌گیری در مورد انتخاب سبد بهینه، از یک سو متغیرهای موثر در فرآیند تصمیم‌گیری افراد و از سوی دیگر، چگونگی وارد کردن عدم قطعیت موجود در دنیای واقعی را مورد توجه قرار داده‌اند. در مدل معرفی‌شده در این مقاله، فرد تصمیم‌گیرنده با دو دارایی ریسکی و بدون ریسک مواجه است، به طوری که بازده این دو دارایی متفاوت بوده و تابع مطلوبیت انتظاری فرد متغیری از ثروت (شامل ثروت اولیه و بازده سبد دارایی) می‌باشد. تطبیق نتایجی که از مدل‌سازی مالی به دست می‌آید با تئوری‌های تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان موجود در ادبیات اقتصاد خرد نشان‌دهنده تأثیر سه عامل ضریب ریسک-گریزی، بازدهی نسبی دارایی‌ها و نوسان قیمت دارایی ریسکی در انتخاب سبد مالی بهینه توسط فرد می‌باشد.

طبقه‌بندی JEL : D81, D23, P14

کلید واژه‌ها:

ریسک‌گریزی، بازده، ریسک، مطلوبیت انتظاری

\*. Email: B\_ebrahimi@iust.ac.ir

\*\* E. mail: M.babakhani@iust.ac.ir

\*\*\*. E. mail: S\_motaghi@tu.ac.ir

\*\*\*\*. E. mail: Arminj@iust.ac.ir

## مقدمه

سرمایه‌گذاران در انتخاب سبد مالی خود با یک سوال کلیدی روبرو هستند؛ چگونه یک سرمایه‌گذار، سرمایه خود را به اجزای مختلف سبد مالی تخصیص می‌دهد به‌گونه‌ای که ثروت خود را به حد مطلوب در سطح ریسک مورد نظر برساند؟ پاسخ به این سوال ما را به پرسش دوم رهنمون می‌سازد که استراتژی بهینه<sup>۱</sup> برای این مسئله چگونه است؟

برای تعریف این استراتژی بهینه می‌بایست یکی از مسایل کلاسیک ریاضیات مالی را با نام بهینه‌سازی سبد مالی<sup>۲</sup> را مدل‌سازی و حل نمود، اولین پاسخ ریاضی که در حل این مسئله ارائه گردید، نخستین بار در سال ۱۹۵۲ توسط مارکوویتز<sup>۳</sup> بود<sup>۴</sup>.

پیش از مقاله مارکوویتز، تصمیم‌گیری در مورد اوراق بهادار کاملاً مستقل صورت می‌گرفت و اصولاً رابطه بین این اوراق در نظر نبود. حال، اگر حداکثرسازی ثروت (افزایش بازده مورد انتظار) مدنظر می‌بود، این تصمیم (استراتژی) منجر به سرمایه‌گذاری تمام سرمایه اولیه در سهامی می‌گردند که حداکثر بازده انتظاری را دارد و در صورتی که این سهام با ریسک بالایی مواجه بود، سرمایه‌گذار خودش را در برابر میزان ریسک بالایی قرار می‌داد.

<sup>1</sup>. Optimal Strategy

<sup>2</sup>. Portfolio Optimization

<sup>3</sup>. Markowitz

<sup>4</sup>. Markowitz HM, "Portfolio selection", Journal of Finance, No 7, (1952), pp.77-91.

° مقاله مارکوویتز در اصل پایان‌نامه او بود که در دپارتمان اقتصاد دانشگاه شیکاگو ارائه شد. مارکوویتز یادآور می‌شود که فریدمن، علیه پایان‌نامه او رای داد. فریدمن دلیل آورد که این پایان‌نامه اصلاً به حوزه اقتصاد مربوط نمی‌شود. چراکه مدل میانگین - واریانس که مارکوویتز ارائه داده بود، واقعاً به حوزه اقتصاد تعلق نداشت. مارکوویتز می‌دید که سرمایه‌گذاران از این مدل جهت تشکیل پرتفولیوی خود استفاده می‌کنند. در واقع، آنان با استفاده از ترکیبی از داده‌های گذشته و قضاوت شخصی به گزینش میانگین‌ها، واریانس‌ها و کوواریانس‌های مورد نیاز دست می‌زنند. (بخشی از مقاله تاریخ مدیریت مالی؛ گزارش یک شاهد عینی، نوشته مرتون اچ. میلر که در اجلاس پنجمین سالگرد تاسیس انجمن مدیریت مالی آلمان در هامبورگ ارائه شده است.)

مارکوویتز با استفاده از مفهوم همبستگی ثابت کرد که با تغییر میزان دارایی‌های موجود در سبد مالی و هم‌چنین، با در نظر گرفتن ضریب همبستگی بین بازده آنها می‌توان ریسک را کاهش داد. فرض مارکوویتز این بود که با دارایی‌هایی که دارای همبستگی کاملاً منفی هستند، ریسک کل را می‌توان به صفر رساند<sup>۱</sup>. ولی واقعیت این است که با متنوع‌سازی سبد مالی، ریسک سیستماتیک را نمی‌توان کاهش داد. زیرا براساس تعریف ریسک سیستماتیک، کل بازار دارای حرکت‌هایی است که بازده کل دارایی‌های موجود در بازار را تحت تأثیر قرار می‌دهد و موجب نوسانات کل دارایی‌های موجود در بازار می‌شود و لذا نمی‌توان آن را کاهش داد. بنابراین، ریسک کل را نمی‌توان به صفر رساند<sup>۲</sup>. با این همه، مارکوویتز با استفاده از نسبت‌های متفاوتی از دارایی‌هایی که دارای همبستگی متفاوتی هستند، توانست مجموعه فرصت بازار را محاسبه کند و براساس این مجموعه فرصت، مرز کارای سرمایه‌گذاری<sup>۳</sup> را به دست آورد.

در دهه ۱۹۶۰، سه محقق به نام‌های ویلیام شارپ، جک‌ترینور و مایکل جنسن به طور جداگانه و بر مبنای مفهوم بازار سرمایه، مدل CAPM و مفاهیم ریسک و بازده، معیارهایی را برای ارزیابی عملکرد سبد مالی مطرح نمودند. این معیارها، اغلب معیارهای ترکیبی عملکرد سبد مالی نامیده می‌شود و امروزه، به‌طور گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرد.

ویلیام شارپ<sup>۴</sup>، معیارهای نرخ بازده موردانتظار و تغییرپذیری بازده را برای ارزیابی عملکرد سبد مالی مطرح نمود. او در تحقیق خود عملکرد ۳۴ شرکت سرمایه‌گذاری را طی سال‌های ۱۹۶۳-۱۹۵۴ مورد بررسی قرار داد. شارپ در هر دوره مورد بررسی، شرکت‌ها را براساس معیارهای فوق رتبه‌بندی کرد. نتایج نشان

<sup>۱</sup>. Markowitz HM, "Portfolio selection: Efficient Diversification of investment", New York, John Wiley and Sons, (1959).

<sup>۲</sup>. Hull, J, A. White. "The pricing of options on assets with stochastic volatilities". J. Finance NO 42, (1987), pp.281-300.

<sup>۳</sup>. مرز کارای سرمایه‌گذاری، مکان هندسی ترکیب دارایی‌هایی است که برای یک درجه ریسک معین بالاترین بازده را دارند.

<sup>۴</sup>. Sharp

داد شرکت‌هایی که در دوره اول رتبه پایینی داشتند، در دوره‌های بعد نیز رتبه پایین کسب کردند. بر عکس، شرکت‌هایی که در دوره اول رتبه بالا داشتند، در دوره‌های بعد هم رتبه بالا به دست آوردند. به‌طور خلاصه، نتایج نشان داد که تفاوت در عملکرد را می‌توان پیش‌بینی کرد، هر چند که نمی‌توان آن را مبنای مناسبی برای برآورد عملکرد آینده دانست.<sup>۱</sup>

جک‌ترینور<sup>۲</sup>، معیار مشابهی را با نام نسبت پاداش به نوسان‌پذیری بازده<sup>۳</sup> ارایه کرد. او نیز مانند شارپ درصد ایجاد ارتباط بین ریسک سبد مالی با بازده آن بود. ترینور با این فرض که سبدهای مالی به اندازه کافی متنوع هستند، میان بازده کل و ریسک سیستماتیک تفاوت قایل شد. وی در اندازه‌گیری عملکرد سبد مالی مفهوم خط شاخص را معرفی کرد و از آن برای نشان‌دادن رابطه میان بازده سبد مالی و بازده بازار استفاده کرد.<sup>۴</sup>

نتایج تحقیقات شارپ و ترینور نشان داد که اگر سبدهای مالی به اندازه کافی از تنوع برخوردار باشند، رتبه‌بندی براساس معیارهای دو محقق یکسان خواهد بود و هرچه از میزان تنوع سبدهای مالی کاسته شود، احتمال اختلاف میان رتبه‌بندی براساس دو معیار زیاد خواهد شد.

جنسن<sup>۵</sup> با استفاده از نظریه قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای که قبلاً توسط شارپ و ترینور عنوان شده بود، مدلی جدید برای ارزیابی عملکرد شرکت‌های سرمایه‌گذاری طراحی کرد. او در این مدل توجه خود را فقط به ارزیابی قدرت پیش‌بینی مدیر سبد مالی؛ یعنی توانایی کسب بازده با پیش‌بینی صحیح قیمت‌های اوراق بهادار که از بازده موردانتظار در سطح معینی از ریسک بالاتر است، معطوف کرد.

<sup>1</sup>. Sharp, W., "Mutual fund performance", Journal of Business, No 39(1), (1964), pp.119-138.

<sup>2</sup>. Treynor

<sup>3</sup>. Reward to Volatility Ratio

<sup>4</sup>. Treynor, J., "How to Rate Management of investment funds", Harvard Business Review, NO 44, (1965), pp.63-75

<sup>5</sup>. Jensen

نمونه مورد بررسی جنسن شامل ۱۱۵ شرکت سرمایه‌گذاری بود که بازده سبد مالی آنها با استفاده از اطلاعات خالص دارایی‌ها و سود تقسیمی آنها برای یک دوره ۱۰ ساله ۶۴-۱۹۵۵ محاسبه شد. در نهایت، عملکرد شرکت‌های سرمایه‌گذاری در این تحقیق نشان داد که این شرکت‌ها قادر به پیش‌بینی قیمت‌های اوراق بهادار حتی به اندازه رویه خرید و نگهداری اوراق بهادار مانند بازار نیستند.<sup>۱</sup>

تقریباً تا دهه هفتاد در حوزه مالی، مطالعه‌ای مربوط به شناسایی فرآیند تصمیم‌گیری سرمایه‌گذاران و طراحی و تبیین الگوی تصمیم‌گیری آنان در بازار سرمایه در شرایط عدم اطمینان صورت نگرفته بود. اولین مطالعات در این زمینه مقاله کون<sup>۲</sup> و همکارانش بود که شواهدی تجربی از کاهش ریسک‌گریزی اشخاص در هنگام افزایش ثروت آنها را در بورس‌های معتبر جهان ارائه کردند.<sup>۳</sup> همچنین، رایلی و چو<sup>۴</sup> دریافتند که بین ریسک‌گریزی افراد و سن، درآمد، ثروت و تحصیلات افراد رابطه معنی‌داری وجود دارد. با افزایش درآمد، ثروت و تحصیلات افراد، درجه ریسک‌پذیری آنها نیز افزایش خواهد یافت. ولی بین سن افراد و ریسک‌پذیری رابطه عکس وجود دارد.<sup>۵</sup> مطالعات لیرون، فارلی و گلا<sup>۶</sup> ثابت کرد که درجه ریسک‌گریزی افراد تابعی از عوامل درونی شخص است و به ملاحظات بیرونی بازار ارتباطی ندارد.<sup>۷</sup> یافته‌های مطالعات لولین<sup>۸</sup> نشان می‌دهد که بین ترجیحات سرمایه-

1. Jensen, M, "The Performance of Mutual fund in the period 1945-1964", Journal of finance, Vol 23, No 2, (1968), pp. 389-416

2. Chon

3. Cohn, R.A. and Lewellen, W. G. "Individual Investor Risk Aversion and Investment Portfolio Composition", Journal of Finance, Vol 30, No 49, (1975), pp 605 -620.

4. Riley&chow

5. Riley, W. B. and Chow, K. V. "Asset Allocation and Individual Risk Aversion", Financial Analysts Journal, No 25, (1992), pp 234- 260.

6. Lebaron&farrelly&gula

7. LeBaron, D. and Farrelly, G. and Gula, S. "Facilitating a Dialogue on Risk: A Questionnaire Approach", Financial Analysts Journal. Vol 45, No 3, (1989), pp19-24.

8. Lewellen

سرمایه‌گذاری افراد و سن، جنسیت و تحصیلات افراد رابطه معنی‌داری وجود دارد.<sup>۱</sup> اپستاین<sup>۲</sup> تاثیر اطلاعات اجتماعی بر رفتار سرمایه‌گذار حقیقی را مورد بررسی قرار داد. یافته‌های تحقیق او بیان‌گر این است که گزارشات مالی سالانه شرکت‌ها تاثیر چندانی بر تصمیمات سرمایه‌گذاران نداشته و بی‌ارزش هستند.<sup>۳</sup> کوتاری و وارنر<sup>۴</sup>، با استفاده از معیار جنسن و با شبیه‌سازی شرکت‌هایی که ویژگی و خصوصیات شرکت‌های واقعی را داشتند، معیار استاندارد را با استفاده از داده‌های سری زمانی بازده‌های سهام شرکت‌های سرمایه‌گذاری برای ارزیابی عملکرد آنها طراحی کردند. آنها دریافتند که می‌توان بازدهی اضافی حدود ۳ درصد در سال که در تحقیقات و مطالعات گذشته ابراز می‌شد را به میزان با اهمیتی با تجزیه و تحلیل معاملات سهام یک شرکت رشد و ارتقاء بخشید.<sup>۵</sup>

سایمون<sup>۶</sup> در مقاله خود مفهوم انسان اقتصادی را زیر سوال برد. همچنین، وی بیان نمود که تصمیم‌گیری افراد بر اساس یک سری محدودیت‌هایی صورت می‌گیرد که ممکن است مفهوم انتخاب عقلانی را زیر سوال ببرد و این انتخاب بر اساس منحنی مطلوبیت صورت نگیرد. این محدودیت‌ها ممکن است بیرونی باشد یا از تورش‌های درون سرمایه‌گذار نشأت بگیرد. این تورش‌ها هم برگرفته از نقطه مرجع تصمیم‌گیری سرمایه‌گذار یا دانش او است.<sup>۷</sup>

<sup>1</sup>. Lewellen, W. G. and Lease, R. C. and Schlarbaum, G. C. "Patterns of Investment Strategy and Behavior among Individual Investors", Journal of Business, No 50, (1977), pp.265-269.

<sup>2</sup>. Epstein

<sup>3</sup>. Epstein, M.J, "Social disclosure and the individual investor", Accounting, Auditing & Accountability Journal, No 4, (1994), pp.94-109.

<sup>4</sup>. Kothary & Warner

<sup>5</sup>. Kothary, S. Warner, J, "Evaluating mutual fund performance", Journal of finance, Vol 56, 56, (2002), pp.1985-2010.

<sup>6</sup>. Simon

<sup>7</sup>. Simon, H.A., "A Behavioral Model of Rational Choice", Cowles Foundation Paper 98, The Quarterly Journal of Economics, Vol LXIX, (1995), pp. 99-118.

تیورسکی<sup>۱</sup> و کانمن<sup>۲</sup> طی سلسله مقالاتی به توسعه کاربردهای دانش روانشناسی در علوم مالی و اقتصاد پرداختند که تلاش‌های آن‌ها به دریافت جایزه نوبل اقتصاد توسط کانمن در سال ۲۰۰۲ منتهی شد. آن‌ها در مقاله سال ۱۹۷۴، سه عامل شهودی را ذکر کردند که در شرایط عدم اطمینان بر تصمیم‌گیری افراد تاثیر می‌گذارد. این سه عامل معرف‌بودن<sup>۳</sup>، در دسترس‌بودن<sup>۴</sup> و کندواکنشی<sup>۵</sup> هستند. این سه هستند. این دو در سال ۱۹۸۱، انتقاداتی بر تئوری مطلوبیت انتظاری وارد کردند و مدل جایگزینی را توسعه دادند که آن را Prospect Theory نام نهادند. تئوری مطلوبیت انتظاری توانایی توضیح رفتارهایی همچون سرمایه‌گذاری همزمان در قمار و بیمه را نداشت. در حالی که قمار سرمایه‌گذاران با مقدار انتظاری منفی برای کسب سود زیاد و بیمه سرمایه‌گذاری با مقدار انتظاری منفی برای جلوگیری از زیان بود (اولی در انتهای طیف ریسک‌پذیری و دیگری در انتهای طیف ریسک‌گریزی). در Prospect Theory بر خلاف تئوری مطلوبیت انتظاری که مجموعه دارایی را مدنظر قرار می‌داد، ارزش‌ها به سودها و زیان‌ها داده می‌شود.<sup>۷</sup>

مریکاس<sup>۸</sup> و پراساد از طریق مطالعه پیمایشی سعی کردند که عوامل تاثیرگذار بر رفتار سرمایه‌گذاران حقیقی را در بازار سرمایه یونان شناسایی کنند. نتایج تحقیق آن‌ها نشان می‌دهد که معیار تصمیم‌گیری افراد در خرید یک سهم، ترکیبی از معیارهای اقتصادی و معیارهای روان‌شناختی هستند. آن‌ها دریافتند که

1. Tversky

2. Kahneman

3. Representativeness

4. Availability

5. Anchoring

6. Tversky, A. Kahneman, D. "Judgment Under Uncertainty: Heuristics and Biases" Science, New Series, Vol. 185, No. 4157. (Sep. 27, 1974), pp. 1124-1131.

7. Tversky, A. Kahneman, D. "The Framing of Decisions and the Psychology of Choice" Science, New Series, Vol. 211, No. 4481. (Jan. 30, 1981), pp. 453-458.

8. Merikas

تصمیم‌گیری سرمایه‌گذاران همواره یک رویکرد منسجم و عقلایی نخواهد بود.<sup>۱</sup> التمیمی<sup>۲</sup> به شناسایی عوامل تاثیرگذار بر رفتار سرمایه‌گذاران در بازار سرمایه امارات امارات پرداخت. وی متغیرهای تاثیرگذار بر رفتار سرمایه‌گذاران را در پنج گروه از عوامل طبقه‌بندی کرد. این عوامل عبارتند از اطلاعات مالی و حسابداری، اطلاعات خنثی، توصیه‌های جانبدارانه، انطباق تصویر خود شرکت و نیازهای شخصی سرمایه‌گذار. یافته‌های این تحقیق حاکی از این است که متغیرهای مرتبط با نظریه حداکثر کردن مطلوبیت انتظاری از قبیل؛ رشد سودآوری، سود نقدی پرداخت شده به سهام‌داران و سود پیش‌بینی شده هر سهم از مهم‌ترین متغیرهای تاثیرگذار در قصد خرید یک سهم در بازار خواهد بود.<sup>۳</sup>

در یک بررسی اجمالی، شواهد تجربی به دست آمده از مطالعات صورت‌گرفته در بازارهای سرمایه گویای این واقعیت است که فرآیند تصمیم‌گیری سرمایه‌گذاران و رفتار آن‌ها بسیار پیچیده می‌باشد و امکان ارایه یک الگوی واحد برای پیش‌بینی رفتار آن‌ها در بازار و شناسایی دقیق محرک‌های رفتاری وجود ندارد.

### روش‌شناسی تحقیق

پژوهش حاضر کاربردی و با تکیه بر مفاهیم پایه‌ای می‌باشد که شیوه انجام آن بر مدلسازی ریاضی استوار است. در این تحقیق از مفاهیمی استفاده شده است که می‌بایست پیش از ارایه مدل آن‌ها را به اختصار تعریف نمود.

<sup>1</sup>. Merilkas,A .and Prasad,d. “factors influencing Greek investor behavior on the Athens stock exchange, paper presented at the annual meeting of academy of financial service”, Colorado, October2003-9-8 ..

<sup>2</sup>. Al tamimi

<sup>3</sup>. Hasan Al tamimi, “Investors perceptions of earning quality, auditor independence”, Accounting Horizons, NO17, (2006), PP.37-48.



### تعریف (۱): ریسک‌گریزی

یک تصمیم‌گیرنده، ریسک‌گریز است، اگر برای هر موقعیت بخت-آزمایی  $F(0)$ ، شرط‌بندی تباهیده‌ای که مقدار  $\int x dF(x)$  را با اطمینان نتیجه می‌دهد، حداقل به خوبی خود  $F(0)$  باشد. همچنین، اگر تصمیم‌گیرنده همیشه (برای هر  $F(0)$ ) نسبت به این دو شرط‌بندی بی‌تفاوت باشد، می‌گوییم که وی ریسک‌خنثی است. اگر الگوی ترجیحات یک بازنمایی مطلوبیت انتظاری با تابع مطلوبیت برنولی  $u(0)$  را نتیجه بدهد، بطور مستقیم از تعریف ریسک‌گریزی نتیجه می‌شود که تصمیم‌گیرنده، ریسک‌گریز است، اگر و فقط اگر برای هر  $F(0)$  داشته باشیم؛  $\int u(x) dF(x) \leq u[\int x dF(x)]$ . نامساوی فوق به نامساوی ینسن معروف است و بازتعریفی از یک تابع مقعر است. از این‌رو، در چارچوب نظریه مطلوبیت انتظاری، ریسک‌گریزی هم‌ارز با تقعر تابع  $u(0)$  است و ریسک‌گریزی اکید هم‌ارز با تقعر اکید  $u(0)$  است و این به خوبی مفهوم ریسک‌گریزی را بیان می‌کند. تقعر اکید به این معنی است که تابع مطلوبیت پول کاهشی است و از این‌رو، در سطحی از ثروت  $x$ ، مطلوبیت حاصل از واحدهای اضافی واحد پول کوچکتر از (قدرمطلق) کاهش مطلوبیت ناشی از دست‌دادن یک واحد پول است.<sup>۱</sup>

### تعریف (۲): فرآیند مارکوف<sup>۲</sup>

نوع خاصی از فرآیند تصادفی است که فقط از ارزش حال<sup>۳</sup> متغیر موردنظر در پیش‌بینی استفاده می‌کند و گذشته متغیر و مسیری که طی آن شکل گرفته است، نادیده گرفته می‌شود. قیمت سهام از فرآیند مارکوف پیروی می‌کند و پیش‌بینی برای آینده آن از عدم اطمینان برخوردار است و باید در غالب توزیع‌های

<sup>۱</sup>. Mas-Colell, Andreu; Whinston, Michael D.; and Jerry R. Green, Microeconomic Theory. Oxford University Press, US, (1995), p.194.

<sup>۲</sup>. Markov Process

<sup>۳</sup>. Present Value

احتمال بیان شود. فرآیند مارکوف بیان می‌دارد که توزیع احتمال قیمت در هر زمانی در آینده مستقل از روند حرکت قیمت در گذشته می‌باشد (هال، ۲۰۰۶).  
 با توجه به ویژگی‌های فرآیند مارکوف، اگر متغیری که ارزش کنونی آن  $a$  است، از فرآیند تصادفی مارکوف پیروی کند و تغییر آن طی یک سال دارای توزیع نرمال  $N(0,1)$  باشد، توزیع احتمال تغییر در ارزش متغیر طی مدت  $T$  سال با توجه به مستقل بودن توزیع احتمال به صورت  $N(0, \sqrt{T})$  خواهد بود و به طور خاص در یک دوره زمانی کوتاه به طول  $\Delta t$  توزیعی به صورت  $N(0, \sqrt{\Delta t})$  خواهد داشت.<sup>۱</sup>

تعریف (۳): فرآیند وینر<sup>۲</sup>

نوع خاصی از فرآیند تصادفی مارکوف با میانگین صفر و واریانس ۱ می‌باشد. متغیر  $Z$  دارای فرآیند وینر می‌باشد، اگر دارای دو ویژگی زیر باشد؛  
 (۱) توزیع  $\Delta Z$  طی دوره زمانی  $\Delta t$  به صورت  $N(0, \sqrt{\Delta t})$  می‌باشد.  
 (۲) ارزش  $\Delta Z$  برای دو دوره زمانی  $\Delta t$  مستقل می‌باشد.<sup>۳</sup>  
 فرآیند وینر  $\Delta Z$  دارای Drift rate برابر با صفر و واریانس ۱ می‌باشد. Drift rate صفر بدین معنا است که ارزش انتظاری  $Z$  در هر زمانی در آینده برابر با ارزش کنونی آن است و نرخ واریانس ۱ به معنی این است که واریانس تغییر در  $Z$  در دوره

<sup>۱</sup>. Hull, John, "Fundamentals of futures and options markets", Prentice Hall, Version 6, (2006), pp.102-168.

<sup>۲</sup>. Wiener Process

<sup>۳</sup>. یکی از مفیدترین فرآیندهای تصادفی در احتمال کاربردی، فرآیند وینر است. فرآیند وینر به صورت توصیفی از حرکت براونی در فیزیک سرچشمه گرفته است. این پدیده که به نام گیاه‌شناس انگلیسی روبرت براون که آن را کشف کرده، ثبت شده است، عبارت است از حرکت ذرات کوچکی که در مایع یا گاز غوطه‌ور است. از آن تاریخ به بعد، فرآیند وینر بطور سودمندی در زمینه‌های آمار آماری نکویی برازش، تحلیل سطوح قیمت بازار سهام و مکانیک کوانتومی به کار برده شده است. اولین تعبیر حرکت براونی را انیشتین در ۱۹۰۵ ارائه کرد. او نشان داد که حرکت براونی را می‌توان با این فرض که ذره غوطه‌ور دایما در معرض بمباران از طرف ملکول‌های پیرامونی خود قرار دارد، توصیف کرد. ولی اولین تعریف موجز این فرآیند تصادفی که حرکت براونی را در بر می‌گیرد، توسط وینر در مقالاتی که از سال ۱۹۱۸ شروع شد، بیان شده است.

<sup>۴</sup>. جان هال، پیشین، ص ۳۹۰.

زمانی به طول  $T$  برابر با  $T$  می‌باشد. حالت کلی فرآیند وینر (فرآیند وینر تعمیم یافته) برای متغیر  $X$  می‌تواند به صورت زیر تعریف شود؛

$$\Delta x = a\Delta t + b\Delta z \sim dx = adt + bdz \quad (1)$$

اگر رابطه (1) را به دو بخش  $adt$  و  $bdz$  تقسیم کنیم، قسمت  $adt$  بیان می‌کند که  $X$  دارای یک Drift rate انتظاری  $a$  به ازای زمان می‌باشد.

$$dx = adt \Rightarrow \frac{dx}{dt} = a \Rightarrow \int \frac{dx}{dt} = at + x_0 \Rightarrow x = at + x_0 \quad (2)$$

$X$  مقدار متغیر  $X$  در زمان صفر می‌باشد و در طول زمان به مدت  $T$  مقدار  $X$  به اندازه  $aT$  افزایش می‌یابد. جمله  $bdz$  می‌تواند به عنوان جمله اخلاص مدنظر قرار گیرد. مقدار این جمله اخلاص برابر با  $b$  تا فرآیند وینر می‌باشد. بنابراین، می‌توانیم برای یک دوره زمانی کوچک مثل  $\Delta t$ ، مقدار  $\Delta x$  را به صورت رابطه زیر بیان کنیم؛

$$\Delta x = a\Delta t + b\varphi\sqrt{\Delta t} \quad (3)$$

که  $\varphi$  دارای توزیع نرمال استاندارد می‌باشد. بنابراین  $\Delta x$  نیز دارای توزیع نرمال استاندارد با ویژگی‌های زیر می‌باشد؛

$$\text{Mean} \Delta x = a\Delta t \quad (4)$$

$$\text{Variance} \Delta x = b^2 \Delta t \quad (5)$$

از این رو، فرآیند وینر تعمیم یافته دارای Drift rate برابر با  $a$  و نرخ واریانس  $b^2$  می باشد.

تعریف (۴): فرآیند ایتو<sup>۱</sup>

نوع دیگری از فرآیند تصادفی، فرآیند ایتو می باشد که مانند فرآیند وینر تعمیم یافته است با این تفاوت که  $a$  و  $b$  تابعی از  $(X, t)$  می باشند.

(۶)

$$\Delta x = a(x, t) \cdot \Delta t + b(x, t) \cdot \Delta z \sim dx = a(x, t) \cdot dt + b(x, t) \cdot dz$$

در این فرآیند Drift rate و نرخ واریانس در طول زمان تغییر می کنند. در یک بازه زمانی کوچک بین  $t$  و  $t + \Delta t$  متغیر از  $X$  به  $X + \Delta X$  تغییر می کند.

$$\Delta x = a(x, t) \cdot \Delta t + b(x, t) \cdot \varphi \sqrt{\Delta t} \quad (7)$$

Drift rate و نرخ واریانس  $X$  ثابت می ماند و برابر با  $a(x, t)$  و  $b^2(x, t)$  می باشد.

فرآیند قیمت یک دارایی ریسکی (سهام)

در صورتی که فرض شود قیمت دارایی ریسکی از فرآیند وینر تعمیم یافته پیروی می کند، در این حالت دارای Drift rate و نرخ واریانس انتظاری ثابتی می باشد. ولی این مدل از به دست آوردن جنبه های کلیدی قیمت دارایی ریسکی ناتوان است. چراکه درصد بازده انتظاری مورد نیاز سرمایه گذاران از دارایی ریسکی مستقل از

<sup>1</sup>. Ito Process

قیمت دارایی ریسکی می‌باشد. بنابراین، فرض Drift rate انتظاری ثابت نامناسب است و باید با این فرض جایگزین شود که بازده انتظاری یعنی Drift انتظاری تقسیم بر قیمت دارایی ریسکی باید ثابت باشد.

اگر قیمت دارایی ریسکی در زمان  $t$ ،  $S$  باشد، آنگاه Drift rate انتظاری در  $S$  برابر با  $\mu S$  می‌باشد که  $\mu$  یک پارامتر ثابت است. این بدین معناست که در یک بازه زمانی کوتاه،  $\Delta t$ ، افزایش انتظاری در  $S$  برابر با  $\mu S \Delta t$  می‌باشد. یک فرض معقول برای مدل‌سازی بازدهی دارایی ریسکی این است که نوسانات درصد بازده در یک بازه زمانی کوچک مثل  $\Delta t$  جدا از قیمت دارایی ریسکی می‌باشد. بنابراین می‌توان به شکل زیر بیان نمود؛

$$\begin{cases} ds = \mu s dt + \sigma s dz & (8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{ds}{s} = \mu dt + \sigma dz & (9) \end{cases}$$

$\mu$ : نرخ بازده انتظاری دارایی ریسکی

$\sigma$ : نوسان قیمت دارایی ریسکی

$\mu$ : نرخ بازده انتظاری است که سرمایه‌گذار در هر سال به دست می‌آورد. بیشتر سرمایه‌گذاران طالب نرخ بازده انتظاری بالاتری هستند تا آن‌ها را ترغیب کند که ریسک بیشتری را بپذیرند. این بدین معناست که  $\mu$  باید به ریسک بازدهی دارایی ریسکی و همچنین، نرخ بهره اقتصاد بستگی داشته باشد. در نرخ‌های بهره بالاتر در هر سطحی از ریسک، نرخ بازده بالاتری را می‌طلبید. در واقع، در تحلیل مالی نیاز نیست که به تمام جزئیات  $\mu$  بپردازیم، چراکه ارزش مشتقات وابسته به دارایی ریسکی (سهام) و مستقل از  $\mu$  می‌باشد. در مقابل،  $\sigma$ ؛ یعنی نوسانات قیمت دارایی ریسکی (سهام) در تعیین ارزش مشتقات مالی نقش تعیین‌کننده‌ای دارد.

در نظر می‌گیریم که قیمت مشتقه مالی تابعی از قیمت دارایی ریسکی و زمان است. فرض می‌کنیم متغیر  $X$  دارای فرآیند وینر می‌باشد.

$$dx = a(x, t).dt + b(x, t).dz \quad (10)$$

$dz$  دارای فرآیند وینر می‌باشد،  $a$  و  $b$  تابعی از  $(x, t)$  هستند. متغیر  $x$  دارای Drift rate،  $a$  و نرخ واریانس  $b^2$  می‌باشد. لم ایتو<sup>۱</sup> برای تابع  $G(x, t)$  به صورت زیر می‌باشد.<sup>۲</sup>

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} d(x) + \frac{\partial G}{\partial t} d(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} [d(x)]^2 \quad (11)$$

با جایگزینی رابطه (۱۰) در لم ایتو (۱۱) خواهیم داشت؛

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} [ax, t, dt + bx, t, dz] + \frac{\partial G}{\partial t} d(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} \underbrace{[ax, t, dt + bx, t, dz]^2}_{\Omega} \quad (12)$$

که  $\Omega$  را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود؛

$$\Omega = a^2(x, t) [dt]^2 + b^2(x, t) [dz]^2 + 2ab dt \cdot dz \Rightarrow b^2(x, t) dt$$

$$\begin{cases} dt \cdot dt = 0 \\ dt \cdot dz = dt \cdot \sqrt{dt} = 0 \\ [dz]^2 = dt \end{cases} \quad (13)$$

صورت ساده شده  $dG$  به شکل زیر به دست می‌آید؛

<sup>۱</sup>. Ito Lemma

<sup>۲</sup>. جان هال، پیشین، ص. ۴۲۵.

$$dG = \left[ \frac{\partial G}{\partial x} a(x,t) + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2(x,t) \right] dt + \frac{\partial G}{\partial x} b(x,t) dz \quad (14)$$

بنابراین تابع  $G(x,t)$  از فرآیند وینر با مشخصات زیر پیروی می‌کند؛

$$\text{DriftRate} \left[ \frac{\partial G}{\partial x} a(x,t) + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2(x,t) \right] \quad (15)$$

$$\text{VarianceRate} : \left[ \frac{\partial G}{\partial x} b(x,t) \right]^2 \quad (16)$$

در واقع، لم ایتو می‌گوید که اگر  $x$  دارای فرآیند ایتو باشد و  $G(x,t)$  تابعی از مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم پیوسته باشند، آنگاه  $G(x,t)$  نیز یک فرآیند ایتو خواهد بود.

در اینجا دیدیم که اگر قیمت دارایی ریسکی در زمان  $t$ ،  $s$  باشد، آنگاه،  $ds = \mu s dt + \sigma s dz$  یک مدل معقول برای نوسانات قیمت دارایی ریسکی می‌باشد، حال اگر فرض کنیم که تابع  $G(x,t)$ ، قیمت یک اختیار خرید یا سایر مشتقات مالی است، بنابراین می‌بایست تابعی از  $s$  و  $t$  باشد و با توجه به لم ایتو داریم؛

$$dG = \left[ \frac{\partial G}{\partial s} \mu s + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial s^2} \sigma^2 s^2 \right] dt + \frac{\partial G}{\partial s} \sigma s dz \quad (17)$$

می‌بینیم که هر دوی  $S$  و  $G$  تحت تاثیر جزء تصادفی  $dz$  می‌باشند (فرآیند وینر  $S$  و  $G$  یکسان است).

این بدین معناست که با انتخاب یک سبدمالی از دارایی ریسکی (سهام) و دارایی غیرریسکی (مشتقات مالی) می‌توانیم، جزء تصادفی  $dz$  فرآیند وینر را حذف کنیم. با نوشتن حالت گسسته معادلات فوق داریم؛

$$\begin{cases} S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta Z & (18) \\ \Delta G = \left[ \frac{\partial G}{\partial S} \mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right] \Delta t + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S \Delta Z & (19) \end{cases}$$

سپس، سبدمالی مناسب را به صورت زیر تعریف می‌کنیم؛

$$\pi = \frac{\partial G}{\partial S} \quad (\text{فروش یک مشتق مالی} + \text{خرید } \pi \text{ سهم})$$

$$\pi = -G + \frac{\partial G}{\partial S} S \quad \Delta \pi = -\Delta G + \frac{\partial G}{\partial S} \Delta S \quad (20)$$

با جایگزینی معادلات (۱۸) و (۱۹) در معادله (۲۰) به رابطه (۲۱)

می‌رسیم؛

$$\begin{aligned} \Delta \pi &= \left[ -\frac{\partial G}{\partial S} \mu S - \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right] \Delta t - \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S \Delta Z + \frac{\partial G}{\partial S} \mu S \Delta t + \frac{\partial G}{\partial S} \sigma S \Delta Z \\ \Delta \pi &= \left( -\frac{\partial G}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t \end{aligned} \quad (21)$$

از آنجایی که  $\Delta Z$  در معادله (۲۱) حذف شده است، بنابراین سبدمالی تشکیل داده شده، بدون ریسک می‌باشد و می‌بایست بازدهی‌اش برابر با نرخ بهره بدون ریسک باشد. چراکه اگر بازدهی‌اش بیشتر از  $r$  باشد، آربیتراژگر می‌تواند پول قرض کند و سبدمالی را بخرد و اگر کمتر از  $r$  باشد، بازدهی کسب کند، آربیتراژگر سبدمالی را می‌فروشد و اوراق قرضه بدون ریسک خریداری می‌کند.



$$\Delta \pi = r \cdot \pi \cdot \Delta t \quad (22)$$

با جایگذاری رابطه (۲۰) و (۲۱) در رابطه (۲۲) داریم؛

$$\left( \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial s^2} \sigma^2 s^2 \right) \Delta t = r \left( G - \frac{\partial G}{\partial s} \cdot s \right) \Delta t \quad (23)$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} + r s \frac{\partial G}{\partial s} + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 G}{\partial s^2} = r \cdot G \quad (24)$$

معادله بالا شکل دیفرانسیلی معادله (B.S.M) می‌باشد. در معادله فوق، سبد مالی فقط در یک بازه زمانی کوتاه بدون ریسک می‌باشد و با تغییر  $s$  و  $t$  و  $\partial s$ ، تغییر می‌نماید. برای این که سبد مالی را بدون ریسک نگهداریم، باید به طور مداوم نسبت قیمت مشتق مالی به دارایی ریسکی (سهام) را تغییر دهیم. هر تابع  $G(s, t)$  که یک راه‌حل برای معادله دیفرانسیلی (B.S.M) باشد، به طور تئوریک می‌تواند قیمت یک مشتق مالی قابل معامله باشد. اگر یک مشتق مالی با این قیمت وجود داشته باشد، هیچ فرصت آربیتراژی ایجاد نخواهد کرد و اگر  $G(s, t)$  در معادله دیفرانسیلی (B.S.M) صدق نکند، نمی‌تواند قیمت یک مشتق مالی باشد که فرصت آربیتراژی ایجاد نکند. بنابراین، سرمایه‌گذار می‌بایست به انتخابی بهینه بین دارایی بدون ریسک و دارایی ریسک در سبد مالی خود دست بزند.

<sup>۱</sup> در اوایل دهه ۱۹۷۰، آقایان فیشر بلک، مرن شولز و رابرت مerton گام بزرگی در قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله برداشتند. نتیجه کار آنها ارایه مدلی بود که تحت عنوان مدل بلک، شولز، مerton یا B.S.M معروف گشت. این مدل تأثیر زیادی در نحوه قیمت‌گذاری و پوشش خطر اختیار معامله داشته است. همچنین، این مدل نقش اساسی و محوری در موفقیت مهندسی مالی در دهه‌های ۱۹۸۰ و ۱۹۹۰ داشت. مرن شولز و رابرت مerton در سال ۱۹۹۷ به دلیل اهمیت مدل فوق، موفق به دریافت جایزه نوبل اقتصاد شدند.

### انتخاب سبدمالی بهینه

برای این که انتخاب سبدمالی بهینه را مدل کنیم، می‌بایست فرضی را در نظر بگیریم، که بعضی از این فرض برای سادگی حل در نظر گرفته شده‌اند. بازه زمانی را ثابت و به صورت  $[t, T]$  در نظر می‌گیریم و همچنین فرض می‌کنیم سبدمالی شامل اوراق قرضه بدون ریسک و یک سهم دارای ریسک می‌باشد که به صورت روابط (۲۵) و (۲۶) مدل می‌شوند؛

$$B(s) = B(t)e^{r(s-t)} \quad s \in [t, T] \quad (25)$$

$$s \in [t, T] \quad \text{و} \quad \mu > r \quad \text{و} \quad \sigma > 0 \quad (26)$$

$$dS(s) = \mu S(s)ds + \sigma S(s)dz$$

سرمایه‌گذار در زمان  $t$  با ثروت  $X(t) = x > 0$  شروع به سرمایه‌گذاری می‌کند. تمرکز سرمایه‌گذار بر تخصیص وزن مناسب بین این دو دارایی در سبدمالی است. فرآیند  $H_1(s)$  در سبدمالی، بخشی از ثروت است که در دارایی همراه با ریسک در زمان  $s$  سرمایه‌گذاری شده است و باقیمانده، ثروت فرد سرمایه‌گذار یعنی  $H_2(s) = 1 - H_1(s)$ ، در اوراق قرضه سرمایه‌گذاری می‌شود. همچنین، هزینه‌های مبادله در نظر گرفته نمی‌شوند.

فرض می‌شود که تمام ثروت در ابتدای دوره سرمایه‌گذاری می‌شود، بنابراین تغییرات در ارزش دارایی‌های موجود در سبدمالی به ندرت موجب تغییرات در حین فرآیند سبدمالی می‌شود و تنها در طول دوره عمر آن پوشش ریسک ممکن می‌باشد، ولی این امکان وجود ندارد که چیزی به سبدمالی اضافه و یا از آن کم شود.

$$s \in [t, T]$$

$$X(s) = x + \int_t^s H_i(\tau) X(\tau) r d\tau + \int_t^s \frac{H_i(\tau) X(\tau)}{S(\tau)} dS(\tau) \quad (27)$$

فرض شده است  $H_i (i = 0, 1)$  برای انتگرال‌گیری به اندازه کافی خوش‌تعریف می‌باشد<sup>۱</sup>. همچنین، به منظور اندازه‌گیری رضایت سرمایه‌گذار از ثروت  $X > 0$ ، یک تابع مطلوبیت انتظاری به صورت رابطه (۲۸) معرفی می‌شود؛

$$\left\{ \begin{array}{l} U'(\infty) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} U'(\xi) = +\infty \\ U'(0) = \lim_{\xi \rightarrow 0} U'(\xi) = +0 \end{array} \right. \quad (28)$$

بطوری که:

$$U : (0, \infty) \rightarrow R$$

تابع مطلوبیت انتظاری تعریف شده کاملاً مقعر بوده و به صورت پیوسته مشتق‌پذیر است. همچنین،  $U$  کاملاً یکنوا می‌باشد، که بیانگر این مطلب است که ثروت بیشتر از ثروت کمتر مطلوب‌تر می‌باشد. حد صفر می‌تواند بدین صورت تعبیر شود که مقدار بسیار کم ثروت بسیار مطلوب‌تر از ثروت صفر است. علاوه بر این، از آنجا که  $U'$  بصورت یکنوا (اکیدا) نزولی می‌باشد، مطلوبیت انتظاری بدست آمده به ازای هر واحد اضافی از ثروت، با افزایش ثروت کاهش می‌یابد و در بی‌نهایت به صفر می‌رسد، که یک اثر اشیاعی (افراد هر چه ثروتمندتر شوند از ثروت بیشتر اشیاع می‌شوند و ثروت اضافی مطلوبیت انتظاری کمتری به ارمغان می‌آورد) را مدل می‌کند.

فرض شده است که هدف سرمایه‌گذار، ماکزیم نمودن مطلوبیت انتظاری خود از ثروت‌نهایی است. به طور خاص، این فرض رفتار عقلانی سرمایه‌گذار را نشان می‌دهد. بنابراین، هدف ما ماکزیم‌کردن مطلوبیت انتظاری بدست آمده از ارزش

<sup>۱</sup> مس کال، پیشین، ص ۲۱۵.

سبدمالی در زمان  $T$  می‌باشد، در یک بیان ریاضی، تابع ارزش به صورت رابطه (۲۹) است؛

$$u(x, t) = \max_{H_1} E[U(X(T))] \quad (29)$$

در ادامه، با استفاده از یک تکنیک ابتکاری معادله (همیلتون، ژاکوبی، بلمن)<sup>۱</sup> را بدست می‌آوریم. حل این معادله تاییدی می‌باشد برای این مهم که راه‌حل بدست آمده، مسئله اصلی ما یعنی انتخاب سبد مالی بهینه را نیز حل کند.<sup>۲</sup> با به‌کارگیری اصول برنامه‌نویسی پویا، برای یک بازه زمانی کوتاه  $\Delta t$ ، داریم؛

$$u(x, t) \approx \max_{H_1} E[u(X(t + \Delta t), t + \Delta t)] \quad (30)$$

برای لحاظ نمودن بخش انتظاری، از لم ایتو استفاده کرده و معادله (۳۱) را بدست آوردیم؛

$$du = [u_t + (1 - H_1)r + H_1\mu]X(s)u_x + \frac{1}{2}H_1\sigma^2 X^2(s)u_{xx} ds + H_1\sigma X(s)u_x dz \quad (31)$$

از آنجایی که  $X(s)$ ، از فرایند ایتو پیروی می‌کند، داریم؛

$$dX(s) = (1 - H_1)rX(s)ds + H_1X(s)(\mu ds + \sigma dz) \quad (32)$$

عبارت فوق شکل دیگری از معادله (۲۷) می‌باشد. با استفاده از رابطه (۳۱) برای  $du$  داریم؛

1. Hamilton\_Jacobi\_Bellman

2. Frank, Robert A, Microeconomics and Behavior. McGraw-Hill/Irwin, 6th Edition, (2006), pp 112- 123.

$$u(X(t+\Delta t), t+\Delta t) - u(X(t), t) = \int_t^{t+\Delta t} [u_t + (1-H_1)r + H_1\mu X(s)u_x + \frac{1}{2}H_1^2\sigma^2 X^2(s)u_{xx}] ds + \int_t^{t+\Delta t} H_1\sigma X(s)u_x dz \quad (33)$$

همچنین،  $X(t) = x$ ، با لحاظ نمودن ارزش انتظاری انتگرال دوم که برابر با صفر است، داریم؛

$$E[u(X(t+\Delta t), t+\Delta t)] - u(x, t) \approx [u_t + (1-H_1)r + H_1\mu]X(t)u_x + \frac{1}{2}H_1^2\sigma^2 X^2(t)u_{xx} \Delta t \quad (34)$$

که در آن؛

$$u(x, t) \approx \max_{H_1} \{u(x, t) + [u_t + (1-H_1)r + H_1\mu]xu_x + \frac{1}{2}H_1^2\sigma^2 x^2 u_{xx} \Delta t\} \quad (35)$$

در عبارت (36)، معادله همیلتون، ژاکوبی، بلمن بدست می‌آید؛

$$u_t + \max_{H_1} \{[(1-H_1)r + H_1\mu]xu_x + \frac{1}{2}H_1^2\sigma^2 x^2 u_{xx}\} = 0 \quad (36)$$

معادله فوق بایستی برای  $t < T$  با شرط نهایی  $u(x, T) = U(x)$  حل شود.

برای حل معادله بالا، تابع مطلوبیست

انتظاری  $U(\xi) = \xi^p$ ،  $\xi > 0$ ،  $p \in (0, 1)$  را در نظر می‌گیریم. همچنین فرض می‌شود که؛

$$X(s) > 0 \quad 1$$

$$u \text{ در } x \text{ کاملاً مقعر می باشد،} \quad 2$$

از آنجایی که ثروت اولیه بیشتر تا سطح مطلوب مورد نظر بایستی مطلوبیت انتظاری نهایی بیشتری را ایجاد نماید، فرض می‌کنیم  $u_x > 0$  که با این شرایط مقدار  $H_1$  که برابر با وزن دارایی ریسکی در سبد مالی است و با رابطه (۳۷) بدست می‌آید؛

$$H_1 = -\frac{(\mu - r)u_x}{\sigma^2 x u_{xx}} > 0 \quad (37)$$

با وارد کردن رابطه (۳۷) در (۳۶)، معادله زیر حاصل می‌شود؛

$$u_t - \frac{1}{2} \frac{(\mu - r)^2 u_x^2}{\sigma^2 u_{xx}} + r x u_x = 0 \quad (38)$$

$$u(\lambda x, t) = \max_{H_1} E[U(\lambda X(T))] = \lambda^p u(x, t)$$

از آنجایی که

می‌توان  $u(x, t) = f(t)x^p$  با  $f(T) = 1$  را در نظر گرفت. با وارد کردن این رابطه در (۳۸) معادله (۳۹) را به دست می‌آوریم؛

$$f'(t) + \left( r + \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2(1 - \rho)} \right) p f(t) = 0 \quad (39)$$

جواب معادله تفاضلی (۳۹) به صورت زیر می‌باشد؛

$$f(t) = \exp\left[ \left( r + \frac{(\mu - r)^2}{2\sigma^2(1 - \rho)} \right) p (T - t) \right] \quad (40)$$

با توجه به نتیجه به دست آمده، رابطه (۴۱) راه‌حل معادله (۳۶) برای تابع مطلوب انتخاب شده می‌باشد.

$$u(X,t) = f(t)X^p \quad (41)$$

مقدار  $H_1$  بهینه با استفاده از رابطه (۴۲) به دست می‌آید؛

$$H_1 = \frac{(\mu - r)}{\sigma^2(1 - p)} \quad (42)$$

$H_1$  بهینه که استراتژی سرمایه‌گذاری بهینه را ارائه می‌کند، به ثروت حال سرمایه‌گذار بستگی ندارد. این موضوع در نگاه اول ممکن است به نظر غیرشهودی بیاید. اما توجه به این نکته ضروری است که با افزایش ثروت، ریسک‌گریزی مطلق کاهش می‌یابد، چرا که اهمیت یک واحد پول اضافی کاهش می‌یابد و در نتیجه سرمایه‌گذار متمایل می‌شود که در سطوح بالاتر ثروتی، واحد پول اضافی خود را صرف امور پرریسک‌تر کند. در نتیجه هرچه ثروت افزایش می‌یابد، واحد پول بیشتری از ثروت سرمایه‌گذار به دارایی‌های ریسکی تخصیص می‌یابد<sup>۱</sup>. البته در برابر ریسک‌گریزی مطلق، ریسک‌گریزی نسبی مطرح می‌شود. در تبیین این مفهوم باید گفت که کاهش ریسک‌گریزی نسبی، حکایت از تخصیص سهم بیشتری از ثروت به دارایی‌های ریسکی همزمان با افزایش ثروت دارد. ثابت‌بودن ریسک‌گریزی نسبی به این معنا است که درصد ثروتی که به دارایی ریسکی تعلق می‌گیرد، ثابت می‌ماند، جدا از این که خود در چه پایه‌ای از ثروت باشد. این امر دلالت بر این موضوع نیز دارد که تابع مطلوبیت انتظاری فرد بر میزان ریسک‌گریزی نسبی ثابتی دلالت دارد، بدین معنا که رفتار سرمایه‌گذار در مقابل ریسک مستقل از ثروتش می‌باشد.

<sup>۱</sup>. Varian, Hal R., Microeconomic Analysis. W.W.Norton & Company, 3rd Edition, (2003).

### تحلیل اقتصادی مدل

همان‌طور که در روابط فوق در نظر گرفته شد، فرد سرمایه‌گذار به میزان  $H_1$  از سرمایه خود را صرف دارایی ریسکی خواهد کرد. این وزن براساس مجموعه‌ای از محاسبات ریاضی بدست آمده است. اما سوالی که اینجا مطرح می‌شود این است که آیا این نتیجه بدست آمده توسط تعابیر ارایه شده در اقتصاد خرد تایید می‌شود؟ پاسخ به این سوال می‌تواند تضمین نماید که فرد سرمایه‌گذار، به عنوان یک عامل اقتصادی منطبق بر تئوری‌های اقتصاد خرد به بهینه‌سازی سبد مالی خود می‌پردازد. اگر وزن بهینه‌ای که برای دارایی ریسکی در رابطه (۳۷) به دست آمد را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$H_1 = -\frac{U_x}{xU_{xx}} \times (\mu - r) \times \frac{1}{\sigma^2} > 0 \quad (45)$$

تئوری‌های اقتصاد خرد نشان می‌دهد که موارد زیر را به عنوان عوامل موثر بر تصمیم‌گیری یک فرد در بهینه‌سازی سبد مالی مورد توجه قرار دارد:

ضریب ریسک‌گریزی نسبی: هر چه ضریب ریسک‌گریزی نسبی کاهش یابد، فرد سهم بیشتری از ثروت خود را صرف خرید دارایی ریسکی می‌کند. با در نظر گرفتن تابع مطلوبیت انتظاری برنولی  $U^{(0)}$ ، ضریب ریسک‌گریزی نسبی به صورت

$$r_R(x, U) = -\frac{x \cdot U''(x)}{U'(x)}$$

تعریف می‌شود. این شاخص نشان می‌دهد که یک فرد تا چه میزان در هر سطح ثروت ریسک‌گریز است.

در مقدار بهینه  $H_1$  محاسبه شده، معکوس ضریب ریسک‌گریزی نسبی به عنوان یکی از اجزای موثر در مقدار بهینه وجود دارد. به عبارت دیگر، افزایش ضریب ریسک‌گریزی نسبی، وزن دارایی‌های ریسکی در سبد مالی سرمایه‌گذار کاهش



می‌یابد. لذا، از نظر اقتصادی، این جز از رابطه منطبق بر تئوری‌های اقتصاد خرد است.

۱. بازدهی نسبی دارایی‌ها: اگر فرض را بر این قرار دهیم که تنها دو نوع دارایی وجود دارد و هر دو دارایی قابلیت نقدشوندگی یکسانی دارند (بدون آنکه کلیت را از دست بدهیم)، تابع تقاضا برای این دو دارایی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_1 = L(X, \mu, r) : L_X > 0, L_\mu > 0, L_r < 0 \quad (46)$$

$$L_0 = L(X, \mu, r) : L_X > 0, L_\mu < 0, L_r > 0 \quad (47)$$

۲. در این دو تابع، تقاضا تصریح شده است که تقاضا برای هر دو دارایی با افزایش ثروت افزایش می‌یابد و در صورتی که بازدهی هر یک از دارایی‌ها افزایش یابد، تقاضا برای آن دارایی افزایش یافته و تقاضا برای دیگری کاهش می‌یابد. به بیان دیگر، روابط بالا بیان‌کننده این موضوع هستند که فرد براساس بازدهی نسبی این دو دارایی نسبت به تصمیم‌گیری اقدام می‌کند. در رابطه (۴۵) این موضوع به صورت اختلاف قیمت دو دارایی لحاظ شده است، یعنی اینکه هر چه دارایی ریسکی بازدهی بیشتری نسبت به دارایی غیرریسکی داشته باشد، فرد سرمایه‌گذار بخش بیشتری از ثروت خود را به دارایی ریسکی تخصیص می‌دهد.

۳. نوسان قیمت دارایی ریسکی: برای یک فرد ریسک‌گریز، افزایش ریسک باعث می‌شود تا مطلوبیت انتظاری کمتری برای وی ایجاد شود. در واقع، ریسک برای او یک کالای بد با مطلوبیت انتظاری منفی است که سبب کاهش مطلوبیت انتظاری سبد انتخابی وی می‌گردد. پس، باید به نحوی میزان ریسک سبد انتخابی مورد توجه قرار بگیرد. در این مدل، به واسطه‌ی نوسان قیمت سهام فرد سرمایه‌گذار همواره با این ریسک مواجه است که ارزش دارایی ریسکی وی در صورت کاهش قیمت سهام کاهش یابد و او بخشی از ثروت خود را از دست بدهد. در رابطه (۴۵)

دید می‌شود که نوسان قیمت سهام به عنوان یک عامل ریسکی در وزن دارایی ریسکی فرد سرمایه‌گذار موثر است، به طوری که با افزایش نوسان (واریانس) قیمت سهام، فرد از میزان سهم دارایی ریسکی در سبد سهام خود می‌کاهد.

### توسعه مدل

برای تابع مطلوبیت انتظاری  $U(\xi) = \xi^P$  که برای حل معادله در نظر گرفته شد، مشخص گردید که  $U$  در  $X$  کاملاً مقعر می‌باشد، زیرا  $f$  مثبت است. همچنین، با توجه به ثابت بودن  $H_1$ ، می‌توان  $h_1, h_2$  را طوری انتخاب کرد که هیچ محدودیتی را تحمیل نکنند و بر جواب بهینه تاثیری نگذارند. با تغییر ثابت‌ها، معادله دیفرانسیل تصادفی<sup>۱</sup> (۳۲) برای فرآیند ثروت  $X(t)$  با شرط اولیه  $X(0) = x$  راه‌حل منحصر به فردی دارد که همواره مثبت است.

$$X(t) = x \exp\left[\left((1-H_1)r + H_1\mu - \frac{1}{2}H_1^2\sigma^2\right)t + \sigma H_1 Z(t)\right] \quad (43)$$

برای تکمیل تحلیل، می‌بایست بررسی نماییم که آیا  $U$  نیز یک راه‌حل برای مسئله ثروت‌نهایی انتظاری بهینه می‌باشد. این بررسی بر اساس همان ابزارهای اصلی که در فرمول ایتو و همچنین، این حقیقت که ارزش‌های انتظاری انتگرال‌های تصادفی به صفر می‌رسند، قابل استنباط است.

به راحتی می‌توان موقعیت در نظر گرفته شده را به سهام با بازده‌های چندگانه تعمیم داد. اگر فرض کنیم که  $N$  نوع دارایی در سبد مالی داریم که هر یک از آنها بازدهی  $Z^n$ ، به ازای هر واحد پول سرمایه‌گذاری شده دارند. البته، یکی از این دارایی‌ها می‌تواند بدون ریسک باشد. در این حالت این بازدهی‌ها دارای یک توزیع

<sup>۱</sup>. Stochastic differential equation

مشترک با تابع توزیع  $F(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n)$ ، هستند. آنگاه تابع مطلوبیت انتظاری حاصل از نگهداری این سبد مالی عبارت خواهد بود؛

$$U(h_1, h_2, \dots, h_n) = \int u(h_1 z_1 + h_2 z_2 + \dots + h_n z_n) dF(z_1, \dots, z_n) \quad (44)$$

این تابع مطلوبیت انتظاری تعریف‌شده بر  $R^N_+$  نیز نسبت به  $(h_1, \dots, h_n)$  افزایشی، پیوسته و مقعر است. این بدان مفهوم است که می‌توان دارایی‌ها را به صورت کالاهای معمولی تلقی کرد و برای آنها نظریه تقاضا ارایه نمود. ریسک‌گریز بودن فرد در اینجا منجر به نقشه بی‌تفاوتی محدب برای سبد دارایی می‌گردد.

شرایط مطرح شده در این مقاله را می‌توان از جهات گوناگون دیگری نیز تعمیم داد؛ فرضاً در صورتی که بازارناکامل<sup>۱</sup> باشد، شرایط تحلیلی پیچیده‌تر خواهد بود و همچنین، هنگامی که سرمایه‌گذاری‌های غیرقابل مبادله در سبد مالی سرمایه‌گذار وجود داشته باشد، وضعیت ترسیم شده شرایط خاص‌تری خواهد داشت.

همچنین، می‌توان به جنبه‌های عدم قطعیت مدل عمق بیشتری بخشید و ریسک دارایی را به صورت احتمالی در نظر گرفت. در صورتی که بیش از یک دارایی ریسکی در مدل وجود داشته باشد، می‌توان با تخصیص یک توزیع احتمال به ریسک مرتبط با هر دارایی، یک قدم دیگر در تحلیل‌ها و حل مدل به واقعیت نزدیک شد.

از سوی دیگر، با تعمیم نوسان قیمت به دارایی بدون ریسک و حضور یک سرمایه‌گذار دیگر در مدل و واردکردن اثرات متقابل تصمیم‌گیری هر یک از این دو سرمایه‌گذار بر فرآیند انتخاب سبد بهینه، می‌توان مدل را در ابعاد بیشتری توسعه داد.

<sup>۱</sup>. Incomplete Market

## نتیجه‌گیری

ارایه یک مدل و تحلیل نتایج حاصل از آن در علوم اقتصادی و مالی هنگامی مورد توجه قرار می‌گیرد که مدل‌سازی و نتایج مرتبط با آن از یک بهینه‌سازی در سطح خرد نشأت بگیرد، شهود اقتصادی قابل توجیه باشد و بتواند واقعیت‌های معمول در دنیای واقعی را توصیف نماید. استفاده از مبانی اقتصادخرد در مدل‌ارایه شده از یک سو، پایه‌های تئوریک آن را تقویت کرده است و از سوی دیگر، سبب شده است تا نتایج حاصل از حل مدل با تعابیر و شهود اقتصادی قابل تفسیر باشد. آنچه در نتایج این مدل بارز است، ارایه رابطه‌ای است که به صورت توأم سه عامل ریسک‌پذیری فرد، نوسان قیمت دارایی و بازده نسبی آن را مورد توجه قرار می‌دهد و از آن مهم‌تر آن که این رابطه در قالب حل یک مساله بهینه‌سازی مطلوبیت انتظاری بدست آمده است. لازم به ذکر است تئوری مطلوبیت انتظاری توانایی توضیح و مدل تمامی رفتارهای فرد سرمایه‌گذار را ندارد و طبق تئوری کانمن و تیورسکی، افراد به دلیل ویژگی‌های روان‌شناختی بیشتر از زیان کردن ناخشنود می‌شوند و نسبت به آن بیشتر از سود واکنش نشان می‌دهند. این امر باعث می‌شود که احتمال وقوع رخدادها با وزن تصمیم جایگزین شود و تابع تصمیم نیز براساس انحراف از نقطه مرجع تعیین شود. علاوه بر این، در نظریه مطلوبیت انتظاری، گرایش به ریسک تنها به وسیله انحنای تابع مطلوبیت بیان می‌شود. لیکن، در نظریه‌های مختلف دیگر به وسیله توزین غیرخطی احتمالات تحت تاثیر قرار می‌گیرد. به عنوان مثال، یک فرد حتی اگر تابع مطلوبیت او برای بازدهی پول مقعر باشد، چنانچه وزن بیش از حدی به شانس کوچک برد خود بدهد، عقلایی و توجیه‌پذیر است که یک بلیت بخت‌آزمایی بخرد. این فرض که به احتمالات کوچک وزن بسیار زیاد داده می‌شود، قادر است توضیح دهد که چرا افراد با مطلوبیت مقعر در منافع شخصی، دوستدار بلیت‌های بخت‌آزمایی نامتقارن با شانس بسیار کم برای برد هستند. همچنین، در پژوهش‌های اخیر نظریاتی جدیدی ارایه شده است که داوطلب جایگزینی تئوری‌های مرسوم و متعارف هستند. اول این که، نظریه مطلوبیت

انتظاری ذهنی که مبتنی بر این اصل است که احتمالات شخصی به وسیله قضاوت‌های ذهنی شکل می‌گیرند و نه این که از شواهد عینی مشتق شده باشد، می‌تواند به وسیله تئوری‌های احتمالات نا هم جمع جایگزین شود. دوم، مطلوبیت نزولی است که به وسیله هذلولی‌های نزولی جایگزین می‌شود. در هذلولی‌های نزولی، نرخ‌های تنزیل کوتاه‌مدت بسیار بیشتر از نرخ‌های تنزیل آینده هستند، که این امر منعکس‌کننده بی‌صبری‌های موقتی یا اقدامات آنی و پرنوسان افراد است. همچنین، نظریه نفع شخصی می‌تواند به وسیله نظریه رجحان اجتماعی جایگزین گردد. هر یک از موارد مطرح‌شده ابزارهایی هستند که اقتصاددانان برای مدل‌سازی رفتارهای فردی مورد استفاده قرار می‌دهند. هر یک از تئورهای جدید مطرح شده همراه با پشتیبانی دامنه وسیعی از داده‌های تجربی می‌باشد و می‌توانند در مطالعات آتی مورد توجه قرار گرفته و نتایج آن‌ها در حوزه‌های اقتصاد، مهندسی مالی و مالیه رفتاری مورد استفاده قرار گیرد.

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی  
پرتال جامع علوم انسانی

## پی نوشتها:

1. Cohn, R.A. and Lewellen, W. G. "Individual Investor Risk Aversion and Investment Portfolio Composition", *Journal of Finance*, Vol 30, No 49, (1975), pp 605 -620.
2. Epstein, M.J, "Social disclosure and the individual investor", *Accounting, Auditing & Accountability Journal*, No 4, (1994), pp.94 -109.
3. Frank, Robert A, *Microeconomics and Behavior*. McGraw-Hill/Irwin, 6th Edition, (2006), pp 112- 123.
4. Hasan al tamimi, "Investors perceptions of earning quality, auditor independence", *Accounting Horizons*, NO17, (2006), PP.37-48.
5. Hull, J, A. White. "The pricing of options on assets with stochastic volatilities". *J. Finance* NO 42, (1987), pp.281-300
6. Hull, John, "Fundamentals of futures and options markets", *Prentice Hull, Version 6*, (2006), pp.102-168
7. Jensen, M, "The Performance of Mutual fund in the period 1945-1964" , *Journal of finance*, Vol 23, No 2, (1968 ), pp. 389-416
8. Kothary, S. Warner, J, "Evaluating mutual fund performance", *Journal of finance*, Vol 56, (2002), pp.1985-2010
9. LeBaron, D. and Farrelly, G. and Gula, S. "Facilitating a Dialogue on Risk: A Questionnaire Approach", *Financial Analysts Journal*. Vol 45, No 3, (1989), pp 19-24.
10. Lewellen, W. G. and Lease, R. C. and Schlarbaum, G. C. "Patterns of Investment Strategy and Behavior among Individual Investors", *Journal of Business*, No 50, (1977), pp.265-269
11. Markowitz HM, "Portfolio selection", *Journal of Finance*, No 7, (1952), pp.77-91.
12. Markowitz HM, "Portfolio selection: Efficient Diversification of investment", *New York*, John Willey and Sons, (1959).
13. Mas-Colell, Andreu; Whinston, Michael D.; and Jerry R. Green, *Microeconomic Theory*. *Oxford University Press*, US, (1995), p.194
14. Merilkas,A .and Prasad,d. "factors influencing Greek investor behavior on the Athens stock exchange, *paper presented at the annual meeting of academy of financial service*, Colorado, October2003-9-8 .
15. Riley, W. B. and Chow, K. V. "Asset Allocation and Individual Risk Aversion", *Financial Analysts Journal*, No 25, (1992), pp 234- 260
16. Sharp.W, "Mutual fund performance", *Journal of Business*, No 39(1), (196٤), pp.119-138.
17. Simon, H.A., "A Behavioral Model of Rational Choice", Cowles Foundation Paper 98, *The Quarterly Journal of Economics*, Vol LXIX,(1995), pp. 99-118
18. Treynor. J, "How to Rate Management of investment funds", *Harvard Business Review*, NO 44, (1965), pp.63-75
19. Tversky, A. Kahneman, D. "Judgment Under Uncertainty: Heuristics and Biases" *Science, New Series*, Vol. 185, No. 4157. (Sep. 27, 1974), pp. 1124-1131

20. Tversky, A. Kahneman, D. "The Framing of Decisions and the Psychology of Choice" *Science, New Series*, Vol. 211, No. 4481. (Jan. 30, 1981), pp. 453-458.
21. Varian, Hal R., *Microeconomic Analysis*. W.W.Norton & Company, 3rd Edition, (2003).

