سنجش از دور
و
GIS ایران

سنجش از دور و GIS ایران — سال دوم، شماره چهارم، زمستان ۱۳۸۹
Iranian Remote Sensing & GIS — Vol.2, No.4, Winter 2011
۳۷-۵٦

ارائه شاخص بی‌نظمی برای بهبود عملگر میانگین وزنی مرتب‌شده در تصمیم‌گیری‌های چندمعیاره مکانی

حسین حسینی*[۱]، علی‌اصغر آل‌شیخ[۲]، محمدحسن وحیدنیا[۳]

۱. دانشجوی کارشناسی ارشد سیستم‌های اطلاعات مکانی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
۲. دانشیار گروه مهندسی سیستم‌های اطلاعات مکانی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
۳. دانشجوی دکتری سیستم‌های اطلاعات مکانی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۸۹/۱۰/۲۷ — تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۰/۳/۱۸

چکیده

یاگر با تعریف عملگر میانگین وزنی مرتب‌شده در سال ۱۹۸۸، چارچوبی یکپارچه را برای تصمیم‌گیری در شرایط عدم قطعیت فراهم ساخت. تعیین بردار وزن در عملگر میانگین وزنی مرتب‌شده موضوعی اساسی در استفاده از این عملگر برای تصمیم‌گیری به‌شمار می‌آید، زیرا نتایج ترکیب انجام‌شده به‌وسیلهٔ آن تا حدود زیادی بستگی به تعریف بردارهای وزن استفاده‌شده دارد. در نوشتار حاضر براساس تعریف شاخص بی‌نظمی (پراکندگی) در تابع لامبرت، مدل بیشینه بی‌نظمی برای تعیین وزن‌های عملگر OWA بهبود داده می‌شوند و نتایج به دست آمده با سایر روش‌های موجود مقایسه می‌گردند و نشان داده می‌شود که وزن‌های تولید شده به‌وسیلهٔ این روش از توزیع منظمی پیروی نمی‌کنند. سپس برای بررسی میزان استحکام این روش، تحلیل حساسیت انجام می‌شود. در نهایت مدل مذکور در کاربردی واقعی برای تعیین محل احداث یک ایستگاه پمپ بنزین جدید به‌کار گرفته شده و نتایج آن با روش کمینه واریانس ـ که از متداول‌ترین و پرکاربردترین روش‌هاست ـ مقایسه خواهد شد. نتایج تحقیق نشان می‌دهد که به‌کارگیری روش ارائه‌شده در برخی از درجات خوش‌بینی، استحکام بیشتری در مقایسه با روش کمینه واریانس دارد، از این‌رو به‌کارگیری آن در مسائل تصمیم‌گیری موجب تصمیم‌گیری با ریسک کمتر می‌شود.

کلیدواژه‌ها: عملگر میانگین وزنی مرتب‌شده، وزن معیارها، درجه خوش‌بینی، معیار بی‌نظمی، تحلیل حساسیت.

* نویسنده مکاتبه‌کننده: تهران، خیابان ولی‌عصر (عج)، تقاطع میرداماد، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تلفن: ۸۸۷۸۶۲۱۲
Email: hosein.hoseini65@gmail.com

۱- مقدمه

تصمیم‌گیری شامل انتخاب برخی گزینه‌های دارای ارجحیت از میان انبوهی از گزینه‌هاست. تقریباً در تمامی مسائل تصمیم‌گیری، چندین معیار برای ارزیابی گزینه‌ها وجود دارد. روش تصمیم‌گیری چندمعیاره[1] شامل دو بخش (۱) ایجاد مسئله تصمیم‌گیری و تعیین اطلاعات، و (۲) ترکیب اطلاعات و بهره‌برداری از آن می‌گردد (یاگر، ۱۹۸۸ و ۱۹۹۲). ترکیب ارزیابی‌ها و قضاوت‌ها نقش مهمی در تصمیم‌گیری‌های چندمعیاره ایفا می‌کند. یاگر (۱۹۸۸) عملگر میانگین وزنی مرتب‌شده (OWA)[2] را تعریف کرد تا روشی را برای ترکیب معیارها در تصمیم‌گیری چندمعیاره فراهم کند. عبارت «مرتب‌شده» به طور ضمنی بیان می‌دارد که عملگر OWA ترکیب غیرخطی از ورودی‌های مفروض را حساب می‌کند. از زمان ظهور این روش، عملگر OWA در محدوده وسیعی از کاربردها استفاده شده است، که از جمله می‌توان به اینها اشاره کرد: شبکه‌های عصبی (یاگر، ۱۹۹۲ و یاگر، ۱۹۹۵)، سیستم پایگاه داده (یاگر، ۱۹۸۷)، کنترل‌کننده‌های منطقی فازی (یاگر، ۱۹۹۱ و یاگر و فیلوف، ۱۹۹۲)، مسائل تصمیم‌گیری گروهی همراه با ارزیابی‌های زبانی (هررا و همکاران، ۱۹۹۶)، داده‌کاوی (تورا، ۲۰۰۴). دلیل اصلی این میزان از استفاده، قابلیت انعطاف بالای این روش برای مدل کردن بخش وسیعی از عملگرهای ترکیبی مورد استفاده است، زیرا این عملگر به‌وسیلهٔ پارامتر تعریف نمی‌شود بلکه بردار وزن آن را مشخص می‌سازد (فرناندز و همکاران، ۲۰۰۳). با انتخاب مناسب بردار وزن می‌توان انواع مختلفی از روابط بین معیارهایی را که قرار است ترکیب شوند مدل‌سازی کرد.

ترکیب ارزیابی‌ها به‌وسیله عملگر OWA به‌طور کلی شامل سه مرحله است (تورا، ۲۰۰۴):

(۱) مرتب‌سازی متغیرهای ورودی.

(۲) تعیین وزن‌های مرتبط با عملگر OWA با استفاده از روش مناسب.

(۳) به‌کارگیری عملگر OWA برای ترکیب آرگومان‌های مرتب‌شده.

نکته مهم در مورد عملگر OWA تعریف معیار خوش‌بینی[3] است که می‌تواند نشان دهد رفتار عملگر OWA تا چه میزان مشابه با رفتار عملگر منطقی OR است. این معیار براساس مقادیر بردار وزن عملگر OWA محاسبه می‌شود. اگر مقدار ترکیبی به بیشینه آرگومان‌های مرتب‌شده نزدیک باشد، فرایند ترکیب مشابه عملگر OR رفتار می‌کند و اگر مقدار ترکیبی به کمینه آرگومان‌های مرتب‌شده نزدیک باشد، فرایند ترکیب، رفتاری مشابه با عملگر منطقی AND از خود بروز می‌دهد. مفاهیم اشاره شده، به‌طور کامل منطق با نظریه تصمیم‌گیری مرسوم است که در آن تصمیم‌گیری براساس مقدار بیشینه نشان‌دهنده تصمیم‌گیری خوش‌بینانه است و تصمیم‌گیری براساس مقادیر کمینه نشان‌دهنده تصمیم‌گیری بدبینانه. از طرف دیگر یاگر یک معیار بی‌نظمی[4] یا پراکندگی[5] ارائه داد (یاگر، ۱۹۸۸) که طبق آن هر یک از بردارهای وزن مفروض ـ حتی اگر درجه خوش‌بینی یکسانی داشته باشند ـ می‌توانند از نظر میزان بی‌نظمی با یکدیگر متفاوت باشند.

افراد مختلفی براساس تعریف مدل‌های ریاضیاتی گوناگون اقدام به ارائه روش‌هایی جدید به‌منظور تعیین بردار وزن در عملگر OWA کرده‌اند. در پژوهش حاضر، مقایسه‌ای بین روش‌های مختلف در تعیین بردار وزن عملگر OWA و تحلیل حساسیت عملگر OWA نسبت به درجه خوش‌بینی تصمیم‌گیر انجام خواهد شد. تحلیل حساسیت، ابزاری بسیار مهم در به‌دست آوردن بینشی عمیق در مورد راه‌حل‌های مختلف مدل ریاضیاتی به‌شمار می‌آید. هر چه میزان ریسکِ تصمیم

---

1. Multicriteria Decision Making (MCDM)
2. Ordered Weighted Averaging
3. Optimism Degree
4. Entropy Measure
5. Dispersion Measure

پایین‌تر باشد، تصمیم قابلیت اطمینان بیشتری دارد. پس در تصمیم‌گیری‌های چندمعیاره، هدف علاوه بر بیشینه کردن یک معیار ترکیبی ارزشمند، کمینه کردن میزان حساسیت این معیار نسبت به درجه خوش‌بینی نیز خواهد بود.

در نوشتار حاضر، ابتدا شاخص بی‌نظمی براساس آرگومان تابع لامبرت ارائه می‌شود و سپس براساس آن بردار وزن عملگر OWA در یک سطح خوش‌بینی مفروض، تعیین می‌گردد و آنگاه بردار وزن به‌دست آمده از این روش با بردارهای وزن به‌دست آمده از سایر روش‌ها مقایسه خواهد شد. همچنین برای بررسی میزان استحکام این روش، تحلیل حساسیت برای آن صورت گرفته و در خصوص پروژه مکان‌یابی محل احداث یک ایستگاه پمپ بنزین جدید، میزان حساسیت با این روش محاسبه شده و با میزان حساسیت در روش کمینه واریانس (MVM)[1] ـ که یکی از مرسوم‌ترین روش‌هاست ـ مقایسه می‌شود. سپس با استفاده از ترکیبی از معیارهای ارزشمندی و حساسیت، گزینه‌های موجود با استفاده از هر دو روش رتبه‌بندی خواهد شد و میزان شباهت نتایج حاصل از دو روش با یکدیگر مورد مقایسه قرار خواهند گرفت.

در بخش دوم مقاله، عملگر OWA و روش‌های مربوط به تولید بردار وزن آن مرور می‌گردد. در بخش سوم، مدلی جدید برای تعیین بردار وزن این عملگر همراه با یک مثال عددی ارائه می‌گردد و سپس تحلیل حساسیت برای این مدل جدید انجام خواهد شد. در بخش چهارم، مدل معرفی‌شده، در پروژه تعیین محل احداث یک ایستگاه پمپ بنزین جدید به‌کار برده می‌شود و کارایی آن در مقایسه با مدل‌های موجود، بررسی می‌گردد. در بخش پنجم، نتایج حاصل از این تحقیق مورد ارزیابی قرار خواهد گرفت.

۲- عملگر OWA و روش‌های تولید بردار وزن مربوط به آن

فرض کنید W یک بردار وزن n بعدی است و OWA_w عملگری است که یک تصویر از R^n به روی R می‌سازد، به طوری‌که:

$$OWA_W(a_1,a_2,...,a_n)=\sum_{j=1}^{n} w_j b_j \qquad \text{رابطه (۱)}$$

که در این رابطه a_iها، مجموعه متغیرهای ورودی هستند و b_j برابر با aای است که jامین مقدار بزرگ را در مجموعه آرگومان‌های ورودی داراست. به مقدار تابع $\sum_{j=1}^{n} w_j b_j$ معیار ارزشمندی نیز گفته می‌شود. دو قید بر روی وزن‌های عملگر OWN اعمال می‌شود: ۱- جمع تمامی وزن‌ها باید یک شود؛ و ۲- تمامی وزن‌ها باید در بازه $[0,1]$ باشند.

عملگرهای OWA مختلف به‌وسیله بردار وزن‌شان شناخته می‌شوند. در ادامه چهار عملگر ترکیب معروف که با استفاده از عملگر OWA قابل مدل‌سازی هستند، نشان داده می‌شود.

(۱) OWA^*: در این مورد

$OWA^*(a_1,a_2,...,a_n)=\max_i(a_i)$، که نشان دهنده تصمیم کاملاً خوش‌بینانه است.

(۲) OWA_*: در این مورد

$$OWA_*(a_1,a_2,...,a_n)=\min_i(a_i)$$

که نشان‌دهنده تصمیم کاملاً بدبینانه است.

(۳) OWA_A: در این مورد

$$OWA_A(a_1,a_2,...,a_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

که نشان‌دهنده عملگر میانگین مرسوم است.

(۴) OWA_H: در این مورد

$$OWA_H(a_1,a_2,...,a_n)=$$
$$|\alpha \max_i(a_i)+(1-\alpha)\min_i(a_i)|\ 0\le\alpha\le 1$$

که نشان‌دهنده مدل تصمیم‌گیری هارویش[2] است.

دو معیار مهم برای سنجش توزیع مقادیر وزن‌ها در

1. Minimum Variance Method
2. Hurwicz

بردار W وجود دارد که معیار بی‌نظمی و درجه خوش‌بینی نام دارند و به صورت رابطه (۲) تعریف می‌گردند (یاگر، ۱۹۸۸):

رابطه (۲)

$$Disp(W) = -\sum_{i=1}^{n} w_i \ln(w_i)$$

رابطه (۳)

$$orness(W) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(n-i)w_i$$

معیار بی‌نظمی، میزان استفاده عملگر OWA از پارامترهای ورودی را اندازه‌گیری می‌کند. Disp(W) بزرگ‌ترین مقدار خود را هنگامی اختیار می‌کند که بردار وزن به صورت $W = (1/n, 1/n, ...1/n)^T$ باشد. در این حالت $Disp(W) = Ln(n)$ است و کوچک‌ترین مقدار Disp(W) هنگامی است که بردار وزن به یکی از حالت‌های $W = (1, 0, ..., 0)^T$ یا $W = (0, 1, ..., 0)^T$ یا ... یا $W = (0, 0, ..., 1)^T$ باشد که در این صورت $Disp(W)=0$ خواهد بود.

معیار خوش‌بینی درجه‌ای را تعیین می‌کند که در آن عملگر ترکیب مانند عملگر OR رفتار کند، که می‌توان آن را به عنوان معیار خوش‌بینی تصمیم‌گیر تلقی کرد. معیار خوش‌بینی همواره عددی در بازه $[0,1]$ است. هنگامی که بردار وزن به صورت $W = (1, 0, ..., 0)^T$ تعریف شود $orness(W) = 1$ می‌شود؛ به عبارت دیگر عملگر ترکیب کاملاً مشابه عملگر OR رفتار می‌کند و هنگامی که W به صورت $W = (0, 0, ..., 1)^T$ تعریف شود، $orness(W) = 0$ خواهد بود، لذا عملگر ترکیب کاملاً مشابه عملگر AND رفتار می‌کند.

برای تعیین وزن عملگر OWA، اوهاگان[1] روش بیشینه بی‌نظمی[2] (MEM) را ارائه داد که در آن معیار بی‌نظمی تعریف‌شده در رابطه (۲) تحت یک درجه خوش‌بینی ثابت، بیشینه می‌شود (اوهاگان، ۱۹۸۸):

رابطه (۴)

$$\text{maximize } Disp(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln w_j$$

$$\text{s.t. } orness(w) = \alpha = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(n-j)w_j$$

$$, 0 \le \alpha \le 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1,\ 0 \le w_j \le 1,\ j = 1, ..., n$$

فولر[3] و مایلندر[4] روشی برمبنای کمینه کردن تغییرات بردار وزن[5] (MVM) ارائه دادند که واریانس وزن‌های عملگر OWA را تحت سطح خوش‌بینی داده‌شده، کمینه می‌کند. این روش نیاز به حل مدل ریاضیاتی رابطه (۵) دارد (فولر و مایلندر، ۲۰۰۳).

$$\text{minimize } D(W) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(w_j - \frac{1}{n}\right)^2$$

رابطه (۵)

$$\text{s.t. } orness(w) = \alpha = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(n-j)w_j$$

$$, 0 \le \alpha \le 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1,\ 0 \le w_j \le 1,\ j = 1, ..., n$$

وانگ[6] و پارکان[7] روشی را برمبنای اختلاف کمینه ـ بیشینه[8] (MDA) ارائه دادند که بیشینهٔ اختلاف بین دو وزن همسایه را تحت سطح خوش‌بینی مفروض، کمینه می‌کند. این روش نیاز به حل مدل ریاضی رابطه (۶) دارد (وانگ و پارکان، ۲۰۰۵).

1. O'Hagan
2. Maximum Entropy Method
3. Fuller
4. Majlender
5. Minimum Variance Method
6. Wang
7. Parkan
8. Minimax Disparity Approach

رابطه (۶)

$$\text{minimize}\left\{\underset{j\in(1,\dots,n-1)}{\text{Max}} |w_j - w_{j+1}|\right\}$$

$$\text{s.t. orness}(w) = \alpha = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(n-j)w_j$$

$$, 0 \le \alpha \le 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \ , \ 0 \le w_j \le 1 \ , \ j = 1,\dots,n$$

مایلندر مدلی را براساس بیشینه کردن معیار بی‌نظمی رنئی[1]، تحت سطح خوش‌بینی مفروض ارائه داد، که نیاز به حل مسئله بهینه‌سازی غیرخطی رابطه (۷) دارد (مایلندر، ۲۰۰۵):

رابطه (۷)

$$\text{maximize } H_\beta(w) = \frac{1}{1-\beta}\log_2 \sum_{j=1}^{n} w_j^{\beta}$$

$$\text{s.t. orness}(w) = \alpha = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(n-i)w_j \ , \ 0 \le \alpha \le 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \ , \ 0 \le w_j \le 1 \ , \ j = 1,\dots,n$$

که

$$H_1(w) = \lim_{\beta \to 1} H_\beta(w) = -\sum_{i=1}^{n} w_i \log_2 w_i$$

و

$$\beta = \Re$$

وانگ و همکارانش دو مدل جدید برای به دست آوردن وزن‌های عملگر OWA ارائه دادند که یکی برمبنای مدل کمترین مربعات[2] (LSM) و دیگری برمبنای مدل کای اسکور[3] (CSM) بود. برای به دست آوردن بردار وزن‌ها براساس این دو مدل به ترتیب نیاز به حل مدل‌های ریاضیاتی غیرخطی زیر است (وانگ و همکاران، ۲۰۰۷):

رابطه (۸)

$$\text{Minimize } J_1 = \sum_{j=1}^{n-1}(w_j - w_{j+1})^2$$

$$\text{s.t. orness}(w) = \alpha = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(n-j)w_j$$

$$, 0 \le \alpha \le 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \ , \ 0 \le w_j \le 1 \ , \ j = 1,\dots,n$$

رابطه (۹)

$$\text{Minimize } J_2 = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{w_j}{w_{j+1}} + \frac{w_{j+1}}{w_j} - 2\right)$$

$$\text{s.t. orness}(w) = \alpha = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(n-j)w_j$$

$$, 0 \le \alpha \le 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \ , \ 0 \le w_j \le 1 \ , \ j = 1,\dots,n$$

۳- ارائه مدلی جدید برای تعیین وزن‌های عملگر OWA

تمام مدل‌هایی که در قسمت قبلی ذکر گردیدند یک قاعده را دنبال می‌کنند، هدف این مدل‌ها آن است که تمامی عناصر بردار وزن را تا جایی که ممکن است با در نظر گرفتن یک سطح خوش‌بینی داده شده، به یکدیگر نزدیک سازند. از این‌رو اگر قید مربوط به یک سطح خوش‌بینی مفروض نادیده گرفته شود، تمامی روش‌ها به یک نتیجه می‌انجامند، یعنی در همه روش‌ها بردار وزن به صورت $W = (1/n, 1/n, \dots 1/n)^T$ به دست می‌آید.

در روش بیشینه ساختن معیار بی‌نظمی، هدف این است که بی‌نظمی مقادیر وزن‌ها در بردار وزن زیاد باشد ـ و همان‌گونه که ذکر شد ـ معیار بی‌نظمی هنگامی به بیشینه خود می‌رسد که $w_1 = w_2 = \dots\dots = w_n = 1/n$ به دست می‌آید. این روش به تولید وزن‌هایی می‌انجامد که از توزیع تقریباً

1. Renyi
2. Least Square Method
3. Chi-square Method

منظمی پیروی می‌کنند ولی هیچ برهانی برای این امر وجود ندارد (وانگ و همکاران، ۲۰۰۷). در روش پیشنهادی سعی بر آن است که معیار بی‌نظمی شبیه‌سازی شود و براساس آن وزن‌هایی به دست آید که از توزیع منظم پیروی نمی‌کنند.

یاگر (۲۰۰۹) ویژگی‌هایی را که یک تابع باید داشته باشد، تا بتواند به عنوان معیار بی‌نظمی در نظر گرفته شود، بیان کرده است. در واقع اگر $W=(w_۱,...,w_n)$ مجموعه‌ای از وزن‌ها باشد به‌طوری‌که:

$$\sum_{j=۱}^{n} w_j = ۱ \;,\; ۰ \le w_j \le ۱ \;,\; j=۱,...,n$$

آنگاه $D(W)$ یک معیار بی‌نظمی تعمیم‌یافته است، البته اگر D در سه شرط زیر صدق کند:

۱. D متقارن باشد، یعنی برای هر تبدیل σ چنین باشد:

$$D(w_۱,...,w_n) = D(w_{\sigma(۱)},...,w_{\sigma(۱)})$$

۲. اگر یکی از وزن‌ها مساوی یک بود آنگاه:

$$D(W_۱,...,w_n) = \text{minimum}$$

۳. D در خاصیت PED[1] صدق کند.

در این روش یک معیار، مشابه معیار بی‌نظمی به صورت $D_۱(W) = \sum_{j=۱}^{n} w_j e^{(۱-w_j)}$ تعریف می‌شود. از آنجا که $D(W) = \sum f(w_j)$ است، واضح است که شرط یک را برآورده می‌کند؛ چون حاصل سری برای تمام تبدیل‌ها یکسان است. برای برآورده کردن شرط دوم و سوم نیز کافی است نشان دهیم که برای $\frac{d^۲f}{dx^۲} \le ۰ : x \in [۰,۱]$. در تحقیق صورت‌گرفته تابع f به‌صورت $f(x) = x.e^{(۱-x)}$ است، که مشتق دوم آن نسبت به x برابر است با $(x-۲).e^{(۱-x)}$ و از آنجا که $e^{(۱-x)}$ همواره عددی مثبت است، بنابراین برای $x \in [۰,۱]$ مشتق دوم همواره عددی منفی خواهد بود. پس تابع معرفی‌شده، شرایط لازم را برای در نظر گرفته شدن به عنوان تابع بی‌نظمی داراست.

مقدار بیشینه این تابع هنگامی است که $w_۱ = w_۲ = ...w_n$ باشد که در این صورت $D_۱(W) = e^{\frac{n-۱}{n}}$ می‌شود و هنگامی که بردار وزن به صورت $W=(۱,۰,...,۰)^T$ یا $W=(۰,۱,....,۰)^T$ یا $W=(۰,۰,...,۱)^T$ تعریف شده باشد، این تابع به مقدار کمینه خود که برابر با یک است می‌رسد. مزیت تابع $D_۱(W)$ این است که هنگام حل کردن مدل بهینه‌سازی به‌وسیله تابع لاگرانژ می‌توان از تابع لامبرت استفاده کرد و از این طریق یک فرمول بسته برای W_j ها به‌دست آورد، که در حل مدل و نیز تحلیل حساسیت کمک می‌کند.

براساس این ویژگی‌ها یک مدل جدید بنام LFM[2] برای تعیین وزن‌های عملگر OWA به صورت رابطه (۱۰) ارائه می‌شود.

رابطه (۱۰)

$$\text{maximize } D_۱(w) = \sum_{j=۱}^{n} w_j e^{(۱-w_j)}$$

$$\text{s.t. orness}(w) = \alpha = \frac{۱}{n-۱} \sum_{j=۱}^{n} (n-j) w_j$$

$$۰ \le \alpha \le ۱$$

$$\sum_{j=۱}^{n} w_j = ۱ \;,\; ۰ \le w_j \le ۱ \;,\; j = 1,...,n$$

۳-۱- محاسبه بردار وزن

همان‌گونه که در بخش دوم ملاحظه شد، وزن‌های ترتیبی وابسته به درجه خوش‌بینی تصمیم‌گیر هستند. در این بخش، ابتدا بردار وزن در روش LFM را به‌دست می‌آوریم و سپس با ارائه یک مثال، نتایج حاصل از این روش با برخی از پرکاربردترین روش‌های موجود مقایسه خواهد شد.

1. Preference for Equal Division
2. Lambert Function Method

تعریـف: اگر $y = xe^{x}$ باشد، آنگاه $W(y) = x$ می‌شود که در آن W تابع لامبرت نامیده می‌شود (کورلس و همکاران، ۱۹۹۶). همان‌گونه که ذکر گردید در این روش برای به‌دست آوردن بردار وزن، مدل بهینه‌سازی غیرخطی در رابطه (۱۰) می‌بایست حل شود. برای حل این مدل از تابع لاگرانژ استفاده خواهد شد و برای بیشینه کردن تابع $D_1(w)$، از $-D_1(w)$ در داخل تابع لاگرانژ استفاده می‌شود. بنابراین تابع لاگرانژ به‌صورت رابطه (۱۱) تعریف می‌شود:

رابطه (۱۱)

$$L(w,\lambda_1,\lambda_2) = -\sum_{j=1}^{n} w_j e^{(1-w_j)} + \lambda_1\left(\sum_{j=1}^{n} w_j - 1\right)$$
$$+\lambda_2\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{n-j}{n-1} w_j - \alpha\right)$$

سپس مشتقات جزئی تابع لاگرانژ بدین صورت محاسبه می‌شوند:

$$\frac{\partial L}{\partial w_j} = -e^{(1-w_j)} + w_j e^{(1-w_j)} +$$
$$\lambda_1 + \frac{n-j}{n-1}\lambda_2 = -(1-w_j)e^{(1-w_j)}$$
$$+\lambda_1 + \frac{n-j}{n-1}\lambda_2 = 0$$
$$\rightarrow (1-w_j)e^{(1-w_j)} = \lambda_1 + \frac{n-j}{n-1}\lambda_2$$

با استفاده از تابع لامبرت از معادله بالا می‌توان w_j را به‌صورت رابطه (۱۲) بازنویسی کرد:

رابطه (۱۲)

$$w_j = 1 - W(\lambda_1 + \frac{n-j}{n-1}\lambda_2)$$

اکنون مشتق تابع لاگرانژ نسبت به λ_1 و λ_2 به‌صورت رابطه (۱۳) محاسبه می‌شود:

رابطه (۱۳)

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \left(\sum_{i=1}^{n} w_j - 1\right) = 0 \rightarrow -\sum_{j=1}^{n} w\left(\lambda_1 + \frac{n-j}{n-1}\lambda_2\right)$$
$$+n-1=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{n-j}{n-1}w_j\right) - \alpha = 0 \rightarrow$$
$$\sum_{j=1}^{n}[\frac{n-j}{n-1}(1 - w(\lambda_1 + \frac{n-j}{n-1}\lambda_2))] - \alpha = 0$$

مطابق با معادلات (۱۳) و (۱۴) یک دستگاه دو معادله دو مجهول تشکیل می‌شود که از روی آن می‌توان مقادیر λ_1 و λ_2 را محاسبه کرد و سپس با قراردادن این مقادیر در معادله (۱۲)، w_jها را محاسبه کرد. پس بردار وزن‌ها قابل محاسبه است.

۳-۲- مثال

در این بخش با استفاده از مدل ارائه شده، بردار وزن در حالتی که ۵ معیار وجود دارد محاسبه می‌شود و رفتار آن با بردارهای وزن حاصل از سایر روش‌ها محاسبه می‌گردد. سپس در یک جدول نتایج حاصل از روش‌های پیشین با نتایج مدل ارائه‌شده از نظر توزیع وزن‌ها مقایسه خواهد شد و نشان داده می‌شود که این روش برخلاف بیشتر روش‌های قبلی، وزن‌ها را براساس توزیع منظم ایجاد نمی‌کند. سپس مقادیر هر یک از عناصر بردار وزن به ازای $\alpha = 0, 0.1, \ldots, 0.9$ محاسبه خواهد شد، و نمودار تغییرات آن ترسیم می‌شود. برای به‌دست آوردن بردار وزن به‌وسیله روش ارائه‌شده، از معادلات (۱۲) و (۱۳) و (۱۴) کمک گرفته می‌شود. برای محاسبه λ_1 و λ_2 از معادلات (۱۳) و (۱۴) از نرم‌افزار MATLAB استفاده شده است. نتایج حاصل از روش LFM در جدول ۱ نمایش داده شده و نتایج حاصل از روش‌های پیشین در جداول ۲ تا ۵ نشان داده شده است.

جدول ۱. وزن‌های عملگر OWA به‌دست آمده از روش LFM

orness / W	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
W_1	0	0	0	.0495	.1224	.2	.2826	.3705	.4760	.6565	1
W_2	0	0	.0546	.1160	.1589	.2	.2386	.2739	.3026	.2871	0
W_3	0	.0564	.1668	.1901	.1975	.2	.1975	.1901	.1668	.0564	0
W_4	0	.2871	.3026	.2739	.2386	.2	.1589	.1160	.0546	0	0
W_5	1	.6565	.4760	.3705	.2826	.2	.1224	.0495	0	0	0

جدول ۲. وزن‌های عملگر OWA به‌دست آمده از روش بیشینه بی‌نظمی (MEM)

orness / W	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
W_1	0	.0050	.0289	.0706	.1278	.2	.2884	.3962	.5307	.7105	1
W_2	0	.0175	.0599	.1086	.1566	.2	.2353	.2574	.2565	.2068	0
W_3	0	.0602	.1240	.1672	.1920	.2	.1920	.1672	.1240	.0602	0
W_4	0	.2068	.2565	.2574	.2353	.2	.1566	.1086	.0599	.0175	0
W_5	1	.7105	.5307	.3962	.2884	.2	.1278	.0706	.0290	.0050	0

جدول ۳. وزن‌های عملگر OWA به‌دست آمده از روش کمینه واریانس (MVM) و روش کمینه-بیشینه اختلاف (MDA)

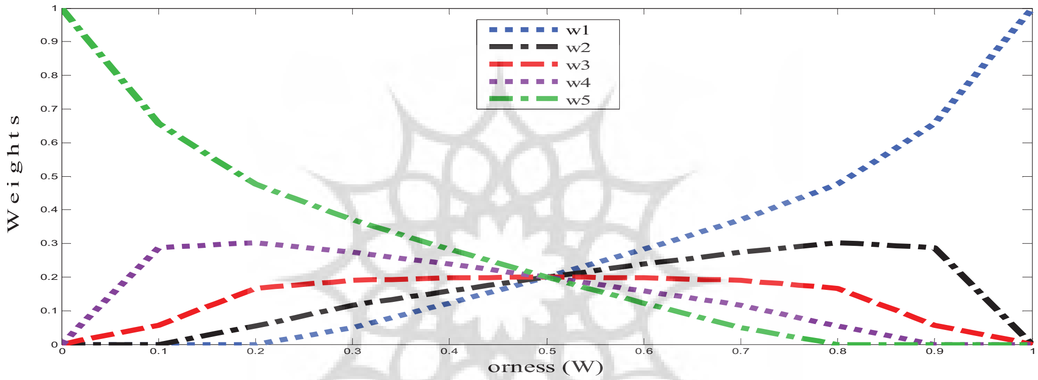
orness / W	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
W_1	0	0	0	.0400	.1200	.2	.2800	.3600	.4600	.6333	1
W_2	0	0	.0400	.1200	.1600	.2	.2400	.2800	.3200	.3333	0
W_3	0	.0333	.1800	.2000	.2000	.2	.2000	.2000	.1800	.0333	0
W_4	0	.3333	.3200	.2800	.2400	.2	.1600	.1200	.0400	0	0
W_5	1	.6333	.4600	.3600	.2800	.2	.1200	.0400	0	0	0

جدول ۴. وزن‌های عملگر OWA به‌دست آمده از روش کمترین مربعات (LSM)

orness / W	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
W_1	0	0	0	.0462	.1231	.2	.2769	.3538	.4516	.6316	1
W_2	0	0	.0387	.1077	.1538	.2	.2462	.2923	.3355	.3368	0
W_3	0	.0316	.1742	.2000	.2000	.2	.2000	.2000	.1742	.0316	0
W_4	0	.3368	.3355	.2923	.2462	.2	.1538	.1077	.0387	0	0
W_5	1	.6316	.4516	.3538	.2769	.2	.1231	.0462	0	0	0

جدول ۵. وزن‌های عملگر OWA به‌دست آمده از روش کای اسکور (CSM)

W \ orness	0.0001	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.9999
W_1	$.2730*10^{-6}$	.0158	.0440	.0822	.1329	.2	.2888	.4060	.5571	7455	.9996
W_2	$.7311*10^{-6}$	.0235	.0598	.1027	.1513	.2	.2395	.2553	.2336	.1640	$.3922*10^{-3}$
W_3	$.5868*10^{-5}$	.0511	.1056	.1535	.1875	.2	.1875	.1535	.1056	.0511	$.4380*10^{-5}$
W_4	$.3870*10^{-3}$	.1640	.2336	.2553	.2395	.2	.1513	.1030	.0598	.0235	$.2888*10^{-6}$
W_5	.9996	.7455	.5571	.4060	.2888	.2	.1329	.0822	.0440	.0158	$.9468*10^{-7}$



شکل ۱. تغییر وزن‌های عملگر OWA نسبت به درجه خوش‌بینی در روش LFM

از مقایسه بردارهای وزن به‌دست آمده از روش LFM با سایر روش‌ها می‌توان نتیجه گرفت که این روش در درجات خوش‌بینی بین ۰/۴ تا ۰/۶ رفتاری مشابه با روش CSM و MEM دارد و درجات ۰/۱ ≤ orness ≤ ۰/۳ و ۰/۷ ≤ orness ≤ ۰/۹ رفتاری مشابه روش‌های MVM و MDA از خود نشان می‌دهند. مقادیر وزن‌های عملگر OWA برای هر یک از پنج معیار نسبت به درجه خوش‌بینی در روش LFM در شکل ۱ نشان داده شده است.

جدول ۶ نحوه توزیع وزن‌های معیارها را در بردارهای وزن به‌دست آمده از هر روش نشان می‌دهد. برای این منظور توزیع وزن‌ها در سطح خوش‌بینی دلخواه (در اینجا ۰/۸) بررسی شد. در این بررسی تفاضل بین دو وزن همسایه و نیز نسبت‌های دو وزن همسایه محاسبه شد. با انجام این محاسبات مشخص گردید که روش‌های MEM، MDA و MVM از توزیع‌های نسبتاً منظمی پیروی می‌کنند. در روش‌های MDA و MVM اختلاف بین دو وزن همسایه، همواره عدد ثابتی است. در روش MEM نیز نسبت دو وزن همسایه همیشه یک عدد ثابت است. ولی هیچ اثباتی بر اینکه وزن‌ها باید از توزیعی منظم پیروی کنند، وجود ندارد. در ضمن بردار وزن به‌دست آمده از روش CSM نیز از نظر تفاضل بین وزن‌های همسایه اختلاف فاحشی با سایر روش‌ها دارد و به نظر می‌رسد که اندکی از واقعیت دور است.

جدول ۶. توزیع وزن‌های عملگر OWA به‌دست آمده از روش‌های مختلف به ازای orness=۰/۸

نسبت دو وزن همسایه				تفاضل بین دو وزن همسایه				روش
W_4/W_5	W_3/W_4	W_2/W_3	W_1/W_2	W_4-W_5	W_3-W_4	W_2-W_3	W_1-W_2	
∞	4.5013	1.9259	1.3461	.0387	.1355	.1613	.1161	LSM
1.3591	1.7659	2.2121	2.3848	.0158	.0458	.1280	.3235	CSM
2.0690	2.0690	2.0690	2.0690	.0310	.0641	.1325	.2742	MEM
∞	4.5	1.7778	1.4375	.14	.14	.14	.14	MDA
∞	4.5	1.7778	1.4375	.14	.14	.14	.14	MVM
∞	3.0549	1.8141	1.5730	.0546	.1122	.1351	.1734	LFM

۳-۳- تحلیل حساسیت

یکی از ویژگی‌های مهم عملگر OWA، تغییرات زیاد این عملگر در اثر انتخاب وزن‌های ترتیبی مختلف است. وزن‌های ترتیبی به درجه خوش‌بینی تصمیم‌گیر بستگی دارد. هر چه وزن‌ها در ابتدای بردار وزن بزرگ‌تر باشند، درجه خوش‌بینی تصمیم‌گیر بزرگ‌تر است (ریسک‌پذیری بیشتر). هر تصمیم‌گیر به‌طور غیرعمد، نظرهای خوش‌بینانه‌اش را در خروجی‌های تصمیم‌گیری وارد می‌کند. برای تحلیل حساسیت روش پیشنهادشده به صورت زیر عمل می‌شود:

تعریف: اگر W تابع لامبرت باشد، آنگاه مشتق آن به‌صورت رابطه (۱۵) قابل محاسبه است (کورلس و همکاران، ۱۹۹۶):

رابطه (۱۵)

$$W'(x)=\frac{W(x)}{x(W(x)+1)}$$

برای محاسبه میزان حساسیت، می‌بایست از تابع ارزشمندی نسبت به درجه خوش‌بینی (α) مشتق گرفته شود:

رابطه (۱۶)

$$F=\sum_{j=1}^{n} w_j b_j$$

$$S=\frac{\partial F}{\partial \alpha}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial w_j}{\partial \alpha} b_j$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial w_j}{\partial \lambda_1}\times\frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha}+\frac{\partial w_j}{\partial \lambda_2}\times\frac{\partial \lambda_2}{\partial \alpha}\right)b_j$$

با مشتق گرفتن از رابطه (۱۲) نسبت به λ_1 و λ_2، $\frac{\partial w_j}{\partial \lambda_1}$ و $\frac{\partial w_j}{\partial \lambda_2}$ به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند.

رابطه (۱۷)

$$\frac{\partial w_j}{\partial \lambda_1}=-W'\left(\lambda_1+\frac{n-j}{n-1}\lambda_2\right)$$

رابطه (۱۸)

$$\frac{\partial w_j}{\partial \lambda_2}=-\frac{n-j}{n-1}W'\left(\lambda_1+\frac{n-j}{n-1}\lambda_2\right)$$

برای محاسبه $\frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha}$ و $\frac{\partial \lambda_2}{\partial \alpha}$ از روابط (۱۳) و (۱۴) نسبت به α مشتق گرفته می‌شود.

رابطه (۱۹)

$$-\sum_{j=1}^{n}\left[W'(\lambda_1+\frac{n-j}{n-1}\lambda_2)\frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha}\right]-\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{n-j}{n-1}W'(\lambda_1+\frac{n-j}{n-1}\lambda_2)\frac{\partial \lambda_2}{\partial \alpha}\right]=0$$

رابطه (۲۰)

$$-\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{n-j}{n-1}w'(\lambda_1+\frac{n-j}{n-1}\lambda_2)\frac{\partial \lambda_1}{\partial \alpha}\right]-\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{n-j}{n-1}\right)^2 w'(\lambda_1+\frac{n-j}{n-1}\lambda_2)\frac{\partial \lambda_2}{\partial \alpha}\right]-2=0$$

حال معادله (۱۹) به‌صورت رابطه (۲۱) بازنویسی می‌شود.

رابطه (۲۱)

$$\frac{\partial\lambda_1}{\partial\alpha}=-\frac{\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{n-j}{n-1}w'\left(\lambda_1+\frac{n-j}{n-1}\lambda_2\right)\right]}{\sum_{j=1}^{n}\left[W'(\lambda_1+\frac{n-j}{n-1}\lambda_2)\right]}\frac{\partial\lambda_2}{\partial\alpha}$$

با جای‌گذاری مقدار بـه‌دسـت آمـده بـرای $\frac{\partial\lambda_1}{\partial\alpha}$ در رابطه (۲۰) مقدار $\frac{\partial\lambda_2}{\partial\alpha}$ قابل محاسبه است.

رابطه (۲۲)

$$\frac{\partial\lambda_2}{\partial\alpha}=\frac{2\sum_{j=1}^{n}W'(\lambda_1+\frac{n-i}{n-1}\lambda_2)}{\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{n-j}{n-1}W'(\lambda_1+\frac{n-j}{n-1}\lambda_2)\right]^2-\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{n-j}{n-1}\right)^2W'\left(\lambda_1+\frac{n-j}{n-1}\lambda_2\right)\right]\times\sum_{j=1}^{n}\left[W'(\lambda_1+\frac{n-j}{n-1}\lambda_2)\right]}$$

و با جای‌گذاری مقدار به‌دست آمده بـرای $\frac{\partial\lambda_2}{\partial_a}$ در رابطه (۲۱) مقدار $\frac{\partial\lambda_1}{\partial a}$ نیز به‌دست می‌آید.

اکنـون بایـد نـشان داده شـود جـوابی کـه از ایـن معادلات حاصل می‌گردد، ماکزیمم است. بـرای بررسـی این موضوع جملات به‌کار رفته در تابع لاگرانژ به‌صورت زیر نام‌گذاری می‌شوند:

رابطه (۲۳)

$$M(w_j)=-\sum_{j=1}^{n}w_je^{(1-w_j)}$$

رابطه (۲۴)

$$N_1(w_j)=\sum_{j=1}^{n}w_j-1$$

رابطه (۲۵)

$$N_2(w_j)=\sum_{j=1}^{n}\frac{n-i}{n-1}w_j-\alpha$$

برای اثبات اینکه جواب به‌دست آمده ماکزیمم است می‌بایست نـشان داد کـه حاصـل رابطـه (۲۶) مقـداری مثبت است:

رابطه (۲۶)

$$M_{\overline{w}\overline{w}}(\overline{w}^*)+\sum_{i=1}^{2}\lambda_iN_{i_{\overline{w}\overline{w}}}(\overline{w}^*)>0$$

که در آن $M_{\overline{w}\overline{w}}$ نشان‌دهنده مشتق دوم M نسبت به بردار وزن W است و $N_{i_{\overline{w}\overline{w}}}$ نشان‌دهنده مشتق دوم N_iها نسبت به بردار وزن w است. $\overline{w}^*$ نیز بـردار وزن بهینه را نشان می‌دهد.

ابتدا می‌بایست مـشتق اول M و N_iهـا نـسبت بـه بردار w گرفته شود:

رابطه (۲۷)

$$M_{\overline{w}}=\left[(w_1-1)e^{(1-w_1)}\quad(w_2-1)e^{(1-w_2)}\ldots(w_n-1)e^{(1-w_n)}\right]$$

رابطه (۲۸)

$$N_{1\overline{w}}=[1\quad 1\quad\ldots\quad 1\quad 1]$$

رابطه (۲۹)

$$N_{2\overline{w}}=\left[1\quad\frac{n-2}{n-1}\quad\ldots\quad\frac{1}{n-1}\quad 0\right]$$

حال مشتق دوم آنها محاسبه می‌شوند:

رابطه (۳۰)

$$M_{\overline{w}\overline{w}}=\begin{bmatrix}(2-w_1)e^{(1-w_1)} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & (2-w_n)e^{(1-w_n)}\end{bmatrix}$$

رابطه (۳۱)

$$N_{1\overline{w}\overline{w}}=[0]_{n\times n}$$

رابطه (۳۲)

$$N_{2\overline{w}\overline{w}}=[0]_{n\times n}$$

از آنجـا کـه $N_{1\bar{w}\bar{w}}$ و $N_{2\bar{w}\bar{w}}$ دو مـاتریس صـفر هستند ـ بر طبق رابطه (۲۶) ـ برای اثبات اینکـه بـردار وزن بهینه، بردار ماکزیمم است فقط کافی است نـشان دهیم که رابطـه $M_{\bar{w}\bar{w}}(\bar{w}^*) > 0$ برقـرار اسـت. بـرای اینکه ماتریس $M_{\bar{w}\bar{w}}(\bar{w}^*)$ مثبـت باشـد بایـد تمـامی مقادیر ویژه این ماتریس مثبت باشند و از آنجا که ایـن ماتریس از نوع ماتریس قطـری اسـت، مقـادیر ویـژه آن عناصر روی قطر اصـلی مـاتریس هـستند. از آنجـا کـه تمامی وزن‌های بهینه‌ای که به دست می‌آیند می‌بایست بین صفر و یک باشند، پـس تمـامی عناصـر روی قطـر اصلی ـ که همان مقادیر ویژه ماتریس‌اندـ مثبت هستند و در نتیجه ماتریس $M_{\bar{w}\bar{w}}(\bar{w}^*)$ مثبت اسـت و بـردار وزن بهینه، نقطه ماکزیمم تابع لاگرانژ خواهد بود.

۴- مطالعه موردی

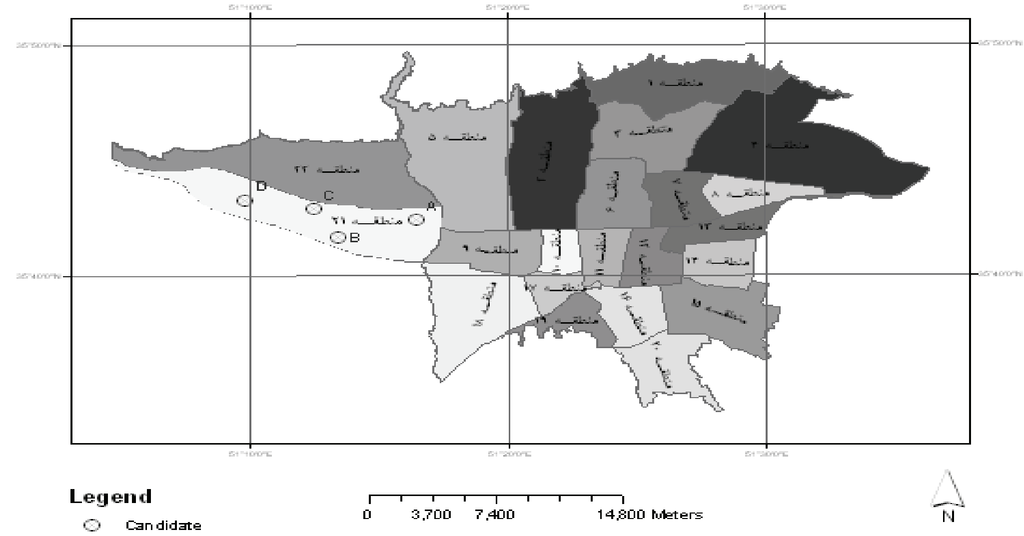
با افزایش روزافزون تعداد خودروها در شهر تهران، یکی از مشکلات اساسی کمبود ایستگاه‌های پمپ بنزین و در نتیجه ایجاد صـف‌هـای طـولانی در پمـپ بنـزین‌هـای موجـود اسـت. منطقـه ۲۱ در غـرب تهـران بـا طـول جغرافیایی ۳۵°,۷′ و عرض جغرافیایی ۵۱°,۲′ یکـی از مناطقی است که کمبود ایستگاه‌های پمپ بنزین در آن مشکلاتی را برای ساکنان این منطقـه بـه وجـود آورده است. براساس نظر افراد خبره، ۴ مکـان در منطقـه ۲۱ شهر تهران برای احداث یک ایستگاه پمپ بنزین جدید انتخاب شدند. مکان این ۴ گزینه در نقشه شـهر تهـران در شکل ۲ مشخص شـده اسـت. در ایـن بخـش ابتـدا حـساسیت هـر یـک از گزینـه‌هـا نـسبت بـه درجـه خوش‌بینی تصمیم‌گیر در روش LFM محاسـبه شـده و حاصل آن با حساسیت بـه‌دسـت آمـده از روش MVM ـ که از پرکاربردترین روش‌هاست ـ مقایسه خواهد شـد. سپس ایـن ۴ گزینـه براسـاس روش LFM رتبـه‌بنـدی می‌شوند و از بین آنها گزینه بهینه انتخاب خواهد شد و نتـایج حاصـل از آن بـا نتـایج روش MVM مقایـسه می‌شود. برای رتبه‌بندی گزینه‌ها از معیاری ترکیبی کـه ضرغامی (۲۰۰۸) ارائه کرده است استفاده می‌شود. این معیار گزینـه‌هـا را بـا در نظـر گـرفتن همزمـان میـزان حساسیت و میزان ارزشمندی رتبه‌بندی می‌کند، از این رو قابلیت اطمینان مناسبی دارد (شکل ۳).

برای ارزیابی گزینه‌های موجود از پنج معیار استفاده خواهد شد: ۱- اشتغال‌زایـی ۲- نـسبت فایـده / هزینـه ۳- نزدیکی به ایستگاه آتش‌نـشانی ۴- دسترسـی و ۵- فاصله از گسل. برای ارزیابی گزینه‌ها در دو معیار اول از نظر افراد خبره بهره گرفته شده و برای ارزیابی گزینه‌ها در معیارهای سوم، چهارم و پنجم از نرم‌افـزار ArcGIS استفاده شده است.

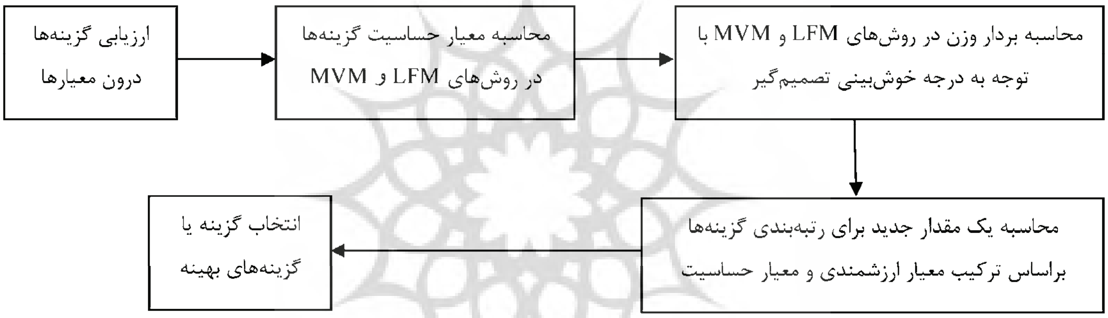
برای ارزیابی گزینه‌ها در معیار سوم از ایستگاه‌هـای آتش‌نشانی و شبکه راه‌ها در شهر تهران اسـتفاده شـده است (شکل ۴) و کمترین فاصلهٔ هر یک از گزینـه‌هـا از ایستگاه‌های آتش‌نشانی محاسبه می‌شود. برای محاسبه فاصله هر کدام از گزینه‌ها از ایستگاه‌های آتش‌نشانی، از فاصـله شـبکه‌ای اسـتفاده مـی‌شـود. کمتـرین فاصـله شبکه‌ای پمپ بنزین A بـا ایـستگاه‌هـای آتـش‌نـشانی، ۲۶۸۸,۱۹۹ متر است و این مقدار برای پمپ بنزین‌های B، C و D بـــه ترتیـــب ۷۹۲۵/۲۴۳، ۳۰۵۶/۰۵۳ و ۵۸۲/۱۸۳ متر است. شـکل ۵ کوتـاه‌تـرین مـسیر بـین پمپس بنزین A را با ایـستگاه‌هـای آتـش‌نـشانی نـشان می‌دهد.

برای ارزیابی گزینـه‌هـا در معیـار چهـارم از شـبکه خیابان‌ها در منطقه ۲۱ کمک گرفتـه شـده و براسـاس فاصله شبکه‌ای بیشترین محدوده‌ای[1] که نیـاز اسـت تـا کل منطقه ۲۱ تحت پوشش هـر یـک از ایـستگاه‌هـای پمپ بنـزین قـرار بگیـرد محاسـبه مـی‌شـود. در مـورد پمپ‌بنزین A حداکثر فاصله شبکه‌ای که بایـد در نظـر گرفته شود تا بتواند تمام نـواحی داخـل منطقـه ۲۱ را پوشـش دهـد ۱۹۶۳۴,۳۲۰ متـر اسـت و بـرای پمـپ بنزین‌های B، C و D این عدد به ترتیـب ۱۹۹۷۶,۲۳۱ متـر، ۱۴۸۴۱,۸۸۱ متـر و ۱۳۹۹۴,۳۲۴ متـر بـرآورد مـی‌شـود. شـکل ۶ محـدوده حاصـل براسـاس فاصـله شبکه‌ای برای ایستگاه D را نشان می‌دهد.

1. Buffer



شکل ۲. منطقه ۲۱ شهر تهران و مکان گزینه‌های پیشنهادی برای پمپ بنزین



شکل ۳. نمودار روند انجام پیاده‌سازی

شکل ۴. ایستگاه‌های آتش‌نشانی و شبکه راه‌ها در شهر تهران

شکل ۵. کوتاه‌ترین مسیر بین پمپ‌بنزین A با ایستگاه‌های آتش‌نشانی

برای ارزیابی گزینه‌ها در معیار پنجم، کمترین فاصلهٔ هر یک از گزینه‌ها از گسل‌های موجود در شهر تهران محاسبه شده است. شکل ۷ گسل‌های موجود در شهر تهران را نمایش می‌دهد. کمترین فاصله پمپ بنزین A از گسل‌های موجود در شهر تهران ۵۸۷۵,۹۸۹ متر است و این مقدار برای پمپ بنزین‌های B، C و D به ترتیب ۶۶۵۷,۲۹۳ متر، ۴۵۱۰,۷۷۹ متر و ۱۹۲، ۳۲۹۴ متر را نشان می‌دهد.

حال می‌بایست مقادیر حاصل از ارزیابی گزینه‌ها در معیار سوم، چهارم و پنجم نرمال شوند. برای این منظور، مقادیر حاصل از ارزیابی گزینه‌ها در معیارهای سوم و چهارم به‌صورت زیر تغییر داده می‌شوند:

رابطه (۳۳)

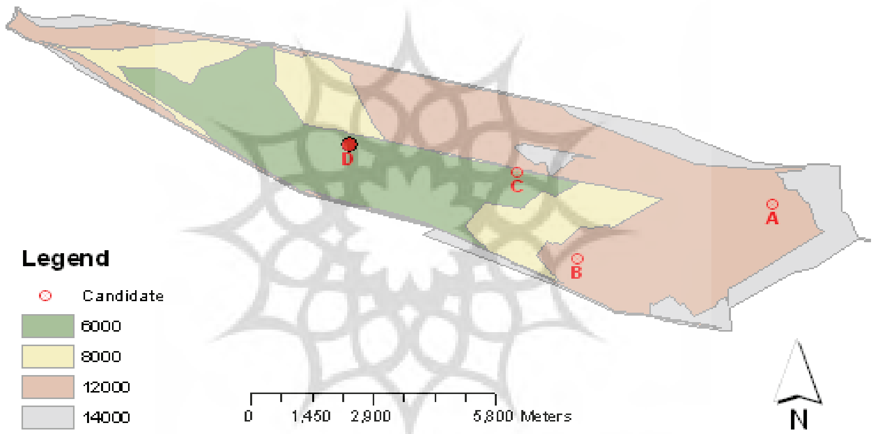
مقدار کمینه در بین مقادیر حاصل از ارزیابی گزینه‌ها × (مقدار حاصل از ارزیابی هر گزینه / ۱)

و برای نرمال کردن مقادیر حاصل از ارزیابی گزینه‌ها در معیار پنجم به‌صورت زیر عمل می‌شود:

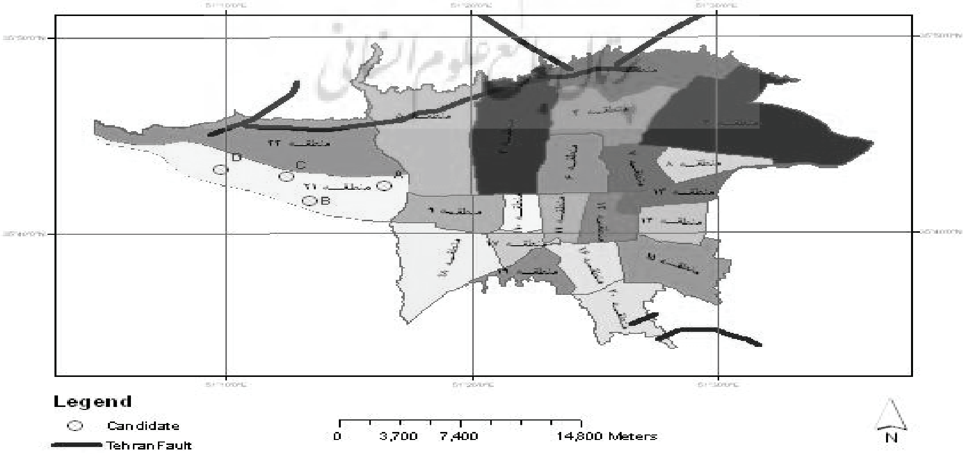
رابطه (۳۴)

مقدار بیشینه در بین مقادیر حاصل از ارزیابی گزینه‌ها / مقدار حاصل از ارزیابی هر گزینه

نتایج کلی حاصل از ارزیابی گزینه‌ها در پنج معیار، در جدول ۷ آمده است.



شکل ۶. محدوده حاصل برای ایستگاه D براساس فاصله شبکه‌ای



شکل ۷. گسل‌های موجود در شهر تهران

معیار حساسیت برای روش LFM طبق آنچه در بخش ۳-۳ ذکر گردید محاسبه می‌شود. برای محاسبهٔ معیار حساسیت در روش LFM باید از میزان ریسک‌پذیری تصمیم‌گیر اطلاع داشت و برای این منظور می‌توان در جلسات متوالی با تصمیم‌گیر و شنیدن دیدگاه‌های وی به اطلاعات مورد نظر دست یافت. در مطالعهٔ حاضر به دلیل شخصیت ریسک‌گریز (بدبین) تصمیم‌گیر، درجهٔ خوش‌بینی تصمیم‌گیر ۳، ۰/۳ در نظر گرفته شد ($\alpha = ۰/۳$). میزان حساسیت در روش MVM را ضرغامی به صورت رابطه (۳۵) محاسبه کرده است (ضرغامی و همکاران، ۲۰۰۸):

رابطه (۳۵)

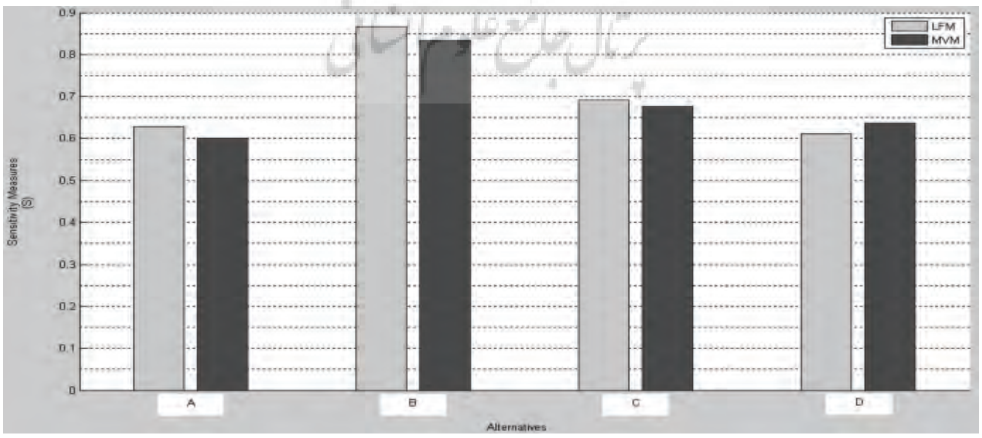
$$S = \frac{6}{n(n+1)} \sum_{j=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} (n-2j+1)(b_j - b_{n+1-j})$$

که در این معادله، n تعداد معیارهاست و b_j، jامین عنصر بزرگ در بین مقادیر ورودی عملگر OWA. همان‌طور که ملاحظه می‌شود در روش MVM، میزان حساسیت به درجه خوش‌بینی تصمیم‌گیر بستگی ندارد و فقط به تعداد معیارها و مقادیر ارزیابی هر گزینه در هر کدام از معیارها وابسته است. در شرایطی که به‌دست آوردن درجه خوش‌بینی سخت باشد، آنگاه روش MVM مناسب خواهد بود، زیرا تحلیل حساسیت مستقل از درجه خوش‌بینی تصمیم‌گیر صورت می‌پذیرد.

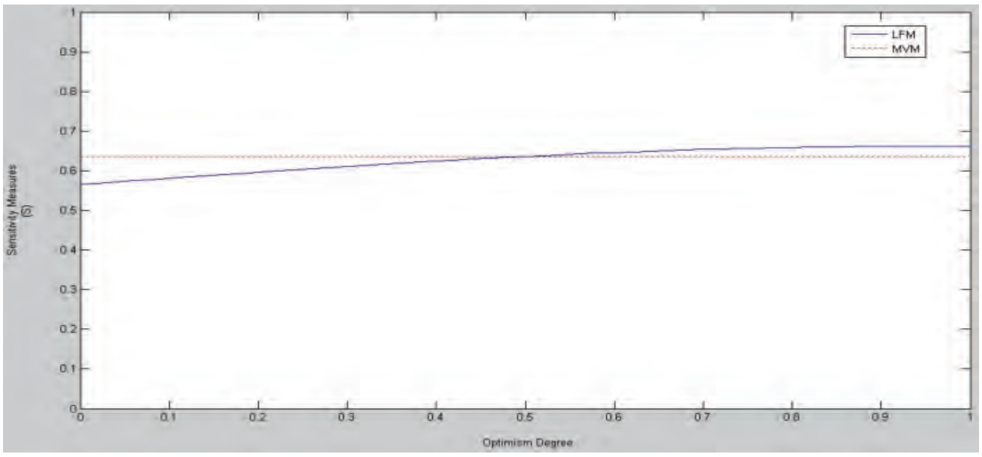
حال معیار حساسیت برای هر ۴ گزینه A، B، C و D در هر دو روش LFM و MVM محاسبه می‌شود. نتایج این محاسبات در شکل ۸ نمایش داده شده است.

جدول ۷. ارزیابی هر گزینه نسبت به پنج معیار

معیار / گزینه	فاصله از گسل	دسترسی	نزدیکی به ایستگاه آتش‌نشانی	فایده / هزینه	اشتغال‌زایی
A	۰/۸۸۳	۰/۷۱۳	۰/۲۱۷	۰/۵۵	۰/۷۲
B	۱	۰/۷۰۱	۰/۰۷۳	۰/۵۵	۰/۷۸
C	۰/۶۷۸	۰/۹۴۳	۰/۱۹۱	۰/۴۹	۰/۶۷
D	۰/۴۹۵	۱	۱	۰/۴۶	۰/۴۹



شکل ۸. میزان حساسیت گزینه‌ها با استفاده از روش LFM (در $\alpha = ۰/۳$) و روش MVM



شکل ۹. میزان حساسیت گزینه D برای درجات خوش‌بینی مختلف در دو روش LFM و MVM

همان‌طور که شکل ۸ نشان می‌دهد، در روش LFM، گزینه D کمترین میزان حساسیت را دارد که مقدار آن برابر است با ۰/۶۱۰۸ ولی در روش MVM گزینه A کمترین میزان حساسیت را دارد و مقدار آن برابر با ۰/۶۰۰۸ است. ضریب همبستگی بین نتایج حاصل از دو روش برابر با ۰/۹۷۹۷ است. برای مقایسه رفتار دو روش LFM و MVM تحت درجات خوش‌بینی مختلف، معیارهای حساسیت برای گزینه D در درجات مختلف خوش‌بینی محاسبه شده‌اند و نتایج آن در شکل ۹ آمده است. همان‌گونه که در شکل نشان داده می‌شود، اگر از روش LFM استفاده شود، معیار حساسیت دارای رفتاری غیرخطی نسبت به درجه خوش‌بینی است ولی در روش MVM معیار حساسیت، رفتاری ثابت نسبت به درجه خوش‌بینی دارد. از آنجا که حساسیت، مشتق تابع ارزشمندی نسبت به درجه خوش‌بینی است، پس تابع ارزشمندی (که نشان‌دهنده نتیجه حاصل از ترکیب معیارهاست) نسبت به درجه خوش‌بینی در روش LFM رفتاری غیرخطی دارد ولی در روش MVM رفتاری خطی دارد. بنابراین روش LFM در مقایسه با روش MVM قدرت تفکیک بالاتری در توصیف رفتار عملگر OWA دارد. زیرا در روش LFM می‌توان اکسترمم‌های محلی (نقاط بحرانی) را یافت. از روی علامت مشتق می‌توان دریافت که در کدام درجات خوش‌بینی عملگر OWA رفتار صعودی و در کجا رفتار نزولی دارد، همچنین می‌توان دریافت که در کدام درجات خوش‌بینی تغییرات عملگر OWA شدیدتر است و در چه درجاتی تغییرات ملایم‌ترند. ولی در روش MVM، حساسیت دارای رفتاری ثابت نسبت به درجه خوش‌بینی است و در نتیجه تغییرات عملگر OWA نسبت به درجه خوش‌بینی همواره ثابت است و براساس درجات خوش‌بینی مختلف نمی‌توان به تحلیل رفتار این عملگر پرداخت. هنگامی که درجه خوش‌بینی تصمیم‌گیر ۰/۵ باشد میزان حساسیت در هر دو روش با یکدیگر برابر می‌شود. از آنجا که هر چه میزان حساسیت معیار ارزشمندی نسبت به درجه خوش‌بینی کمتر باشد، تصمیمِ گرفته شده قابل اطمینان‌تر است، در صورتی که درجه خوش‌بینی تصمیم‌گیر بین ۰ تا ۰/۵ باشد (تصمیم‌گیر ریسک‌گریز) بهتر است از روش LFM استفاده شود؛ اما در شرایطی که درجه خوش‌بینی بین ۰/۵ تا ۱ قرار می‌گیرد روش MVM کارآمدتر خواهد بود. معیار حساسیت نشان می‌دهد که کدام گزینه‌ها به ارزیابی آنها در معیارها و همچنین مشخصه خوش‌بینی تصمیم‌گیر حساس‌تر هستند. اگر میزان حساسیت یک گزینه زیاد باشد، معیار ارزشمندی آن نیز تغییرات زیادی برای تصمیم‌گیران مختلف که درجات خوش‌بینی متفاوتی دارند، خواهد داشت.

تصمیم‌های قابل اطمینان می‌بایست برمبنای معیاری جدید که ترکیبی از ارزشمندی و میزان حساسیت ارزشمندی است گرفته شوند. اگر تصمیم‌گیر نگرانی در مورد ریسک تصمیم نداشته باشد پس هدف او بیشینه کردن معیار ارزشمندی است ولی در شرایطی که نگرانی تصمیم‌گیر فقط ریسک تصمیم باشد، هدف او کمینه کردن حساسیت معیار ارزشمندی خواهد بود، زیرا هر چه حساسیت معیار ارزشمندی کمتر باشد، تصمیم گرفته شده ایمن‌تر است. ضرغامی برای ترکیب این ویژگی‌ها یک معیار جدید به‌صورت رابطه (۳۶) تعریف کرد (ضرغامی و همکاران، ۲۰۰۸).

رابطه (۳۶)

$$F^{*}=\beta\frac{F-F_{min}}{F_{max}-F_{min}}+(۱-\beta)\frac{S_{max}-S}{S_{max}-S_{min}}\leq ۱$$

$$۰\leq\beta$$

که در این معیار F_{max} و F_{min} به ترتیب بیشترین و کمترین مقدار معیار ارزشمندی در بین گزینه‌ها هستند و S_{max} و S_{min} به ترتیب بیشترین و کمترین میزان حساسیت در بین گزینه‌ها. β یک وزن مثبت است که اهمیت ریسک تصمیم را در مقایسه با افزایش مقدار ارزشمندی نشان می‌دهد. مقدار دقیق β باید در تعاملات مکرر با تصمیم‌گیر تعیین شود.

حال می‌بایست امتیاز کلی برای هر یک از گزینه‌ها مطابق با رابطه (۳۶) محاسبه شود. با در نظر گرفتن orness= ۰/۳ بردار وزن‌ها با استفاده از روش LFM به صورت $W=[۰/۰۴۹۵, ۰/۱۱۶۰, ۰/۱۹۰۱, ۰/۲۷۳۹, ۰/۳۷۰۵]$ به دست می‌آید و با استفاده از روش MVM به صورت $W=[۰/۰۴۰۰, ۰/۱۲۰۰, ۰/۲۰۰۰, ۰/۲۸۰۰, ۰/۳۶۰۰]$ محاسبه می‌گردد. جدول ۸ رتبه‌بندی گزینه‌ها را در روش LFM براساس معیار ترکیبی رابطه (۳۶) نشان می‌دهد و جدول ۹ رتبه‌بندی گزینه‌ها را در روش MVM براساس معیار ترکیبی رابطه (۳۶) نشان می‌دهد؛ این رتبه‌بندی‌ها برای پنج مقدار β یعنی ۰، ۰/۲۵۰، ۰/۵، ۰/۷۵ و ۱ انجام شده است.

ضریب همبستگی بین مقادیر تابع F (ارزشمندی) در دو روش LFM و MVM برابر با ۰/۹۹۹۷ است که نشان از شباهت بسیار زیاد مقادیر ارزشمندی به‌دست آمده در هر دو روش دارد. ضریب همبستگی بین معیارهای حساسیت و معیارهای ارزشمندی گزینه‌ها در روش LFM برابر با ۰/۷۲۱۳- و در روش MVM برابر با ۰/۵۹۸۴- است که نشان می‌دهد بیشینه کردن معیارهای ارزشمندی و کمینه کردن معیارهای حساسیت، اهداف ناسازگاری هستند.

جدول ۸. رتبه‌بندی گزینه‌ها در روش LFM با استفاده از معیار ترکیبی جدید نسبت به مقادیر مختلف β

گزینه‌ها	F	S	رتبه‌بندی				
			$\beta=۰$	$\beta=۰/۲۵$	$\beta=۰/۵$	$\beta=۰/۷۵$	$\beta=۱$
A	۰/۴۹۳۷	۰/۶۲۸۰	۲	۲	۲	۲	۲
B	۰/۴۵۰۹	۰/۸۶۶۵	۴	۴	۴	۴	۴
C	۰/۴۵۷۷	۰/۶۹۱۶	۳	۳	۳	۳	۳
D	۰/۵۶۴۲	۰/۶۱۰۸	۱	۱	۱	۱	۱

جدول ۹. رتبه‌بندی گزینه‌ها در روش MVM با استفاده از معیار ترکیبی جدید نسبت به مقادیر مختلف β

گزینه‌ها	F	S	رتبه‌بندی				
			β=۰	β=۰/۲۵	β=۰/۵	β=۰/۷۵	β=۱
A	۰/۴۹۳۷	۰/۶۲۸۰	۱	۲	۲	۲	۲
B	۰/۴۵۰۹	۰/۸۶۶۵	۴	۴	۴	۴	۴
C	۰/۴۵۷۷	۰/۶۹۱۶	۳	۳	۳	۳	۳
D	۰/۵۶۴۲	۰/۶۱۰۸	۲	۱	۱	۱	۱

پس از برگزاری جلسات با تصمیم‌گیران و توجیه آن‌ها در خصوص تأثیر پارامتر β در استحکام و قابلیت اطمینان تصمیم گرفته‌شده، تصمیم‌گیران با انتخاب مقدار ۰/۷۵ برای پارامتر β موافقت کردند؛ از این‌رو در هر دو روش گزینه D، گزینه بهینه برای احداث پمپ بنزین به دست آمد. ضریب همبستگی، برای مقادیر به‌دست آمده از طریق معیار ترکیبی جدید (رابطه ۳۶) برابر است با ۰/۹۹۸۳ که نشان می‌دهد نتایج به‌دست آمده بسیار به یکدیگر نزدیک هستند.

۵- نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این تحقیق روش جدیدی برای به دست آوردن بردار وزن عملگر OWA برحسب درجه خوش‌بینی تصمیم‌گیر ارائه شد. در انجام مراحل تحقیق، مشاهده گردید که بردارهای وزن حاصل از این روش به بردارهای حاصل از سایر روش‌ها بسیار شبیه‌اند و تقریباً رفتار تمامی روش‌های پیشین را شبیه‌سازی می‌کنند، و از این منظر به‌طور مشابه بسیار کاربردی هستند. در ضمن با بررسی روابط هر وزن با وزن‌های همسایه، مشاهده شد که روش ارائه‌شده برخلاف اکثر روش‌های پیشین از توزیع منظمی پیروی نمی‌کند. از آنجا که اثباتی بر اینکه وزن‌های عملگر OWA باید از توزیع منظمی پیروی کنند وجود ندارد، براساس کاربرد مورد نظر در مسائل مختلف می‌توان از روش پیشنهادی یا روش‌های پیشین استفاده کرد. در پژوهش حاضر، برای بررسی میزان حساسیت یک تصمیم نسبت به ارزیابی آن در معیارها و همچنین درجه خوش‌بینی تصمیم‌گیر، تحلیل حساسیت انجام گرفت و معیار حساسیت برای روش ارائه‌شده محاسبه گردید و با معیار حساسیت روش MVM ـ که از پرکاربردترین روش‌هاست ـ مقایسه شد. برای محاسبه معیار حساسیت می‌بایست از معیار ارزشمندی نسبت به درجه خوش‌بینی تصمیم‌گیر، مشتق گرفت. در روش MVM، میزان حساسیت معیار ارزشمندی، رفتار ثابتی نسبت به درجه خوش‌بینی تصمیم‌گیر دارد، بنابراین رابطهٔ معیار ارزشمندی با درجه خوش‌بینی از نوع خطی است. در حالی که میزان حساسیت در روش ارائه‌شده، رابطه‌ای غیرخطی با درجه خوش‌بینی تصمیم‌گیر دارد، بنابراین معیار ارزشمندی نیز رابطه‌ای غیرخطی نسبت به درجه خوش‌بینی خواهد داشت و در نتیجه در مقایسه با روش MVM قدرت تفکیک بیشتری در توصیف رفتار عملگر OWA داراست. از آنجا که اگر معیار حساسیت پروژه‌ای زیاد باشد، معیار ارزشمندی آن تغییرات بزرگی برحسب تصمیم‌گیران مختلف ـ که درجات خوش‌بینی متفاوتی دارند ـ خواهد داشت؛ پس در نظر گرفتن معیار حساسیت در رتبه‌بندی گزینه‌ها باعث می‌شود تصمیمی که گرفته می‌شود، ریسک کمتری داشته باشد. در واقع اگر نگرانی تصمیم‌گیر فقط ریسک تصمیم باشد، آنگاه کمینه کردن معیار حساسیت هدف اوست ولی اگر تصمیم‌گیر نگرانی در مورد ریسک نداشته باشد آنگاه بیشینه کردن معیار ارزشمندی هدف وی خواهد بود. برای تصمیم‌گیری

ایمن، باید هر دو معیار همزمان در نظر گرفته شوند ولی از آنجا که بیشینه کردن معیار ارزشمندی و کمینه کردن معیار حساسیت دو هدف ناسازگارند، به ناگزیر باید از معیاری جدید که مصالحه‌ای بین این اهداف است، استفاده کرد و برمبنای آن گزینه‌ها را رتبه‌بندی کرد.

در این تحقیق، تحلیل حساسیت عملگر OWA فقط نسبت به عدم قطعیت در درجه خوش‌بینی تصمیم‌گیر انجام گرفت، در حالی که برای اتخاذ یک تصمیم مورد اطمینان و مستحکم، علاوه بر در نظر گرفتن عدم قطعیت در درجه خوش‌بینی تصمیم‌گیر، می‌بایست عدم قطعیت در ارزیابی گزینه‌ها درون معیارها نیز در نظر گرفته شود. در ادامه تحقیقات می‌توان تحلیل حساسیت را ـ به‌طور همزمان ـ براساس عدم قطعیت در درجه خوش‌بینی تصمیم‌گیر و عدم قطعیت در ارزیابی گزینه‌ها درون معیارها محاسبه کرد و از آن برای رتبه‌بندی گزینه‌ها و به دست آوردن نتایجی با قابلیت اطمینان بالاتر بهره برد.

۶- منابع

Corless R.M., Gonnet G.H., Hare D.E.G., Jeffrey D.J. & Knuth D.E., 1996, **On the Lambert W Function**, Advances in Computational Mathematics, Volume 5, 329--359.

Fernandez J.M., Salido & Murakami S., 2003, **Extending Yager's Orness Concept for the OWA Aggregators to Other Mean Operators**, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 139, 515–542.

Fuller R. & Majlender P., 2003, **On Obtaining Minimal Variability OWA Operator Weights**, Fuzzy Sets and Systems 136, 203-215.

Herrera F., Herrera-Viedma E. & Verdegay J. L., 1996, **A Model of Consensus in Group Decision Making under Linguistic Assessments**, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 78, 73–87.

Majlender P., 2005, **OWA Operators with Maximal Renyi Entropy**, Fuzzy Sets and Systems, 155, 340-360.

O'Hagan M., 1988, **Aggregating Template or Rule antecedents in Real-time Expert Systems with Fuzzy Set Logic**, in: Proc. 22nd Annual IEEE Asilomar Conf. on Signals, Systems, Computers, Pacific Grove, CA, 81-689.

Torra V., 2004, **OWA Operators in data Modeling and Reidentification**, IEEE Trans. Fuzzy Syst., Vol. 12, No. 5, 652–660.

Wang Y.M. & Parkan C., 2005, **A Minimax Disparity Approach for Obtaining OWA Operator Weights**, Information Sciences, 175, 20-29.

Wang Y. M., Luo Y. & Liu X. W., 2007, **Two New Models for Determining OWA Operator Weights**, Computers & Industrial Engineering, 52, 203-209.

Yager R.R., 1988, **On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-criteria Decision Making**, IEEE Trans. Syst. Man Cybern, Vol. 18, No. 1, 183–190.

Yager R.R., 1992, **On a Semantics for Neural Networks Based on Fuzzy Quantifiers**, Int. J. Intell. Syst., vol. 7, 765–786.

Yager R.R., 1995, **Fuzzy Aggregation of Modular Neural Networks with Ordered Weighted Averaging Operators**, Int. J. Approx. Reason., vol. 13, PP. 359–375.

Yager R.R., 1987, **A Note on Weighted Queries in Information Retrieval Systems**, J. Amer. Soc. Inf. Sci., Vol. 28, 23–24.

Yager R.R., 1991, **Connectives and Quantifiers in Fuzzy Sets**, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 40, 39–75.

Yager R.R. & Filev D.P., 1992, **Fuzzy Logic Controllers with Flexible Structures**, in Proc. 2nd Int. Conf. Fuzzy Sets and Neural Networks, Tizuka, 317–320.

Zarghami M., Szidarovszky F. & Ardakanian R., 2008, **Sensitivity Analysis of the OWA Operator**, IEEE Trans. Syst. Man. Cybern. B, 38(2), 547-552.