1- O. Bakar, "Omar Khayyam's Criticism of Euclid's Theory of Parallels , *MAAS Journal of Islamic Science* 1, 2(1985) pp. 9-18.
2- L. Giacardi, "Protostoria della Geométrie non-euclidee. Omar Al-Khayyam e il quadrilatero birectangolo isoscele" *Quaderno n.* 1(1986) pp. 11-21.
3- L. Giacardi, & C.S. Roero, "Omar Al-Khayyam prédécesseur de J. H. Lambert" *Quaderno* n° 9 dell' Univ. di Torino (1984) pp.
4- Ch. Houzel, "Omar Khayyam et la théorie des parallèles" *Texte de conférence au Colloque International sur Omar Khayyam,* 20-22 septembre 1999 Paris (UNESCO).
5- K. Jaouiche, De la fécondité mathématique : d'Omar Khayyam à G. Saccheri" *Diogène,* 57(1967) pp. 97-113.
6- K. Jaouiche, *La théorie des parallèles en pays d'Islam* Paris 1986, pp.
7- N. Kanani, "Omar Khayyam and the Parallel Postulate" *Farhang,* vol. 12, N° 29-32(2000) pp. 107-124.
8- B. A. Rosenfeld, *A History of Non-Euclidean Geometry,* Translated by Abe Shenitzer, New-York, 1988, pp. 64-71.
9- D. E. Smith, "Omar Khayyam, and Saccheri" *Scripta Mathematica* 3(1935) pp. 5-10.
A. Youschkevitch, *Les Mathématiques arabes (VIII - XV siècles)* Traduction française par K. Jaouiche et Cazevane, Paris, 1976.

BIBLIOGRAPHIE

Comme nous l'avons déjà signalé, la théorie des parallèles de Khayyam se trouve dans la première partie de son *Epître sur l'explication des prémisses problématiques du Livre d'Euclide*. Il en existe deux manuscrits connu. Le premier se trouve dans la Bibliothèque de l'Université de Leiden sous la cote Or. 199/8, folios 75^r-100^v. Le second, appartient à la Bibliothèque Nationale de France, répertorié sous la cote 4946/4, folios 38^v-73^v.

Liste des publications de cette Epitre:

1- Le texte a été publié pour la première fois par T. Erani, à Téhéran en 1935 (1314 H.S.), à partir du manuscrit de Leiden. Cette édition non critique est de plus entachée de fautes dues à l'incompréhension de la langue arabe et des mathématiques anciens.
2- Une édition critique a été publiée par A.I. Sabra, à Alexandrie en 1961.
3- La troisième édition de ce texte, accompagnée de sa traduction persane et de commentaires, a été effectuée par H. Homaï et publiée en 1967 (1346 H.S.) à Téhéran dans un ouvrage intitulé *Khayyami Nameh*.
4- La quatrième édition a été faite par B. Vahabzadeh et publiée dans : R. Rashed et B. Vahabzadeh, *Al-Khayyam Mathématicien*, Paris, 1999, pp. 307-383.
5- Traduction anglaise de ce texte faite par A. Amir Moez dans « Discussion of difficulties in Euclid by Omar Khayyam » *Scripta Mathematica*, vol. XXIV, N° 4(1959), pp. 272-303.
Traductions française de celle-ci :
• A. Djebbar, dans Fahrang, vol. 14, N° 39-40(2002), pp. 79-136.
• B. Vahabzadeh dans *Al-Khayyam Mathématicien op. cit.* pp. 306-382.
6- Traduction russe par B. Rosenfeld et A. Youschkevitch, Moscou, 1962.
La partie consacrée à la théorie des parallèles de cette épître a été l'objet de nombreuses études dont en particulier :

perpendiculaire commune, et que la base supérieure du quadrilatère de Khayyam-Saccheri est plus petite que l'inférieure. Dans le cas de la géométrie de Lobatchevski, les côtés opposés du quadrilatère à angles égaux sont des droites divergentes, et si on laisse inchangés les deux côtés opposés de ce quadrilatère et qu'on éloigne les deux autres côtés de l'axe de symétrie, ces deux côtés iront en grandissant, c'est-à-dire que deux droites divergentes sur une surface de Lobatchevski s'éloignent l'une de l'autre des deux côtés de leurs perpendiculaires communes, et que la base supérieure du quadrilatère de Khayyam-Saccheri est plus grande que l'inférieure.[24]

Cette disposition de droites est exclue par les postulat de Khayyam, ce qui fait que, dans les quadrilatères de Khayyam-Saccheri étudiés par Khayyam, seule l'hypothèse de l'angle droit s'avère juste. C'est-à-dire que ces quadrilatères sont des rectangles, d'où découle, nécessairement, la justesse du 5ème postulat.

CONCLUSION

Comme nous l'avons vu dans cet article, Khayyam, est le premier qui a ouvertement substitué au 5ème postulat un postulat plus simple et plus évident. Il est aussi le premier à avoir démontré les premiers théorèmes des géométries non-euclidiennes de Lobatchevski et Riemann concernant son quadrilatère dans l'hypothèse d'angles aigus et obtus. Ces recherches ont été, à l'insu de leur auteur, les premières étapes vers la démonstration que le 5ème postulat est indépendant des autres axiomes d'Euclide et vers la découverte des géométries non euclidiennes. Les travaux de Khayyam sur la théorie des parallèles ont joué un rôle déterminant pour la découverte des géométries non-euclidiennes.

---

24. B. A. Rosenfeld, *A History of Non-Euclidian Geometry*, Springer-Verlang, New York, Berlin, 1988, pp. 232-233.

postulat est automatiquement réalisé ; en même temps sur cette surface d'autres axiomes d'Euclide ne sont pas réalisés par exemple, sur cette surface, deux droites limitent une partie de la surface (correspondant à une « portion » de sphère entre deux grands demi-cercles à extrémités communes). On peut facilement démontrer que la somme des angles d'un triangle sur une surface de Riemann est supérieure à 2π et une surface de Lobatchevski inférieure à 2π. Par conséquent les sommes des angles d'un quadrilatère sont pour ces surfaces respectivement supérieures et inférieurs à 2π, et que dans le cas d'un quadrilatère équiangle, ces angles sont respectivement obtus et aigus ; ces quadrilatères sont figurés sur la Figure 12, où les côtés des quadrilatères sont par convention figurés par des courbes. Les axes de symétrie partagent ce quadrilatère en deux quadrilatères de Khayyam–Saccheri, de sorte que dans les géométries non-euclidiennes de Riemann et de Lobatchevski sont réalisés respectivement, les hypothèses des angles obtus et aigu.

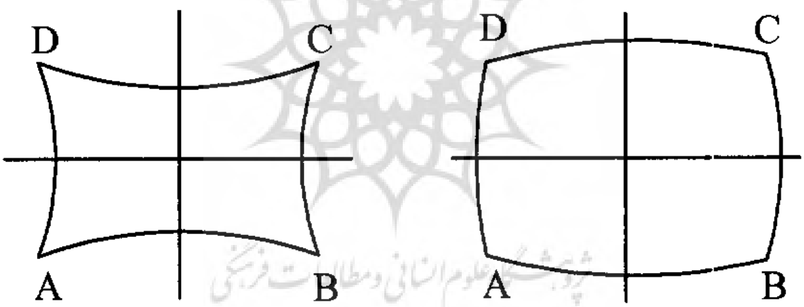


Figure 13

Quadrilatère à angles égaux dans l'hypothèse d'angles obtus et aigu

Dans le cas de la géométrie de Riemann, les côtés opposés des quadrilatères à angles égaux se coupent aux « pôles » des axes de symétrie qui leurs sont perpendiculaires ; c'est pourquoi, si on laisse inchangés les deux côtés opposés de ce quadrilatère, et si on éloigne les deux autres côtés de l'axe de symétrie, ces deux côtés iront en diminuant, c'est-à-dire que les deux droites sur une surface de Riemann se rapprochent l'une de l'autre de chaque côté de leur

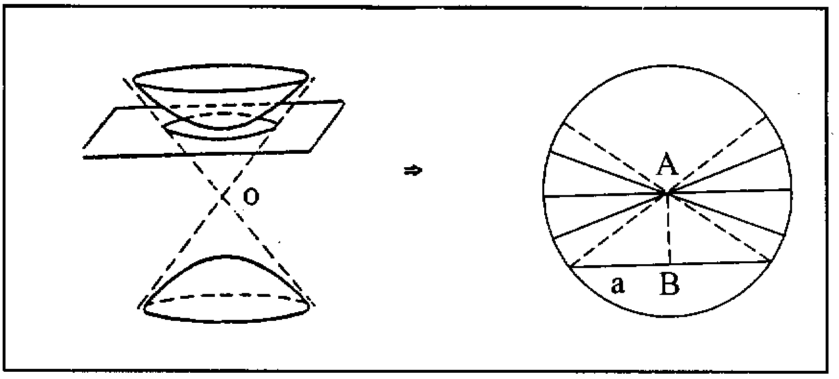


Figure 12

Non réalisation du 5ème postulat sur la carte de Beltrami

Soient le point A d'une surface de Lobatchevski, figuré sur la carte de Beltrami par le centre du cercle et la droite a figuré par la corde horizontale (Figure 11). La perpendiculaire abaissée du point A sur la droite « a » est figurée sur cette carte par une perpendiculaire (même si dans le cas général les angles de la figure sont déformés), tandis que la perpendiculaire élevée au point A sur cette perpendiculaire est représentée par une corde menée par le point A parallèlement à la corde « a ». Ces cordes, de toute évidence, ne se coupent pas. Mais la corde « a » n'est pas non plus coupée par les nombreuses autres cordes menées par le point A, qui par conséquent, forment avec la perpendiculaire un angle aigu. Les surfaces droites de Lobatchevski, figurées sur la carte de Beltrami par les cordes du cercle se coupant sur la circonférence sont appelées des droites parallèles (sur la figure nous voyons que du point A on peu mener deux parallèles à la droite « a ») ; les droites figurées sur la carte de Beltrami par des cordes sans points communs sont appelées droites divergentes. Il est aisé de vérifier que tous les autres axiomes d'Euclide, sauf le 5ème postulat, se réalisent sur une surface de Lobatchevski. Par ailleurs, sur une surface de Riemann, deux droites quelconques se rencontrent et le 5ème

$$x^2 + y^2 + \alpha z^2 = c \begin{cases} \alpha = 1 \\ c > 0 \end{cases} \Rightarrow \qquad \begin{cases} \alpha = -1 \\ c > 0 \,,\, c < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

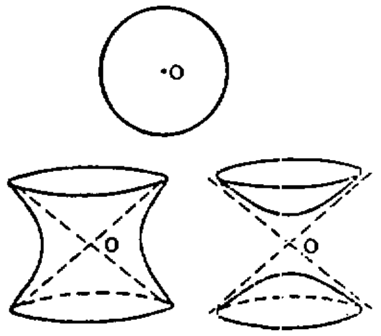


Figure 11

Sphère dans un espace euclidien et pseudo-euclidien

Une surface non-euclidienne de Lobatchevski peut être définie comme une sphère de rayon purement imaginaire dans un espace pseudo-euclidien avec des points identiques diamétralement opposés (au lieu d'un couple de points identiques, on peut se limiter à une seule portion de cette surface, par exemple celle du haut). On appelle lignes droites d'une surface de Lobatchevski les sections de cette sphère par ses plans diamétraux. Une sphère dans un espace euclidien à points identiques diamétralement opposés est appelée surface de Reimann non-euclidienne, et on appelle également lignes droites de cette surface les sections de la sphère par des plans diamétraux, c'est-à-dire, les grands cercles.

La surface de Riemann est souvent appelée surface elliptique, et la surface de Lobatchevski, surface hyperbolique. Afin de vérifier que, pour une surface de Lobatchevski, le 5[ème] postulat n'est pas réalisé, projetons la portions supérieure de la sphère de $x^2+y^2-z^2=c$ (pour les cas c=-1), depuis son centre sur la surface z=1. Toute les surfaces de Lobatchevski sont figurées par des cordes, de ce cercle. Cette figuration d'une surface de Lobatchevski est appelée carte de Beltrami.

Aussi l'angle entre les segment OM_1 et OM_2 étant défini par la formule :

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+\alpha y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+\alpha y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}} \quad (4)$$

Pour $\alpha=1$, notre espace est euclidien et, pour $\alpha=-1$, il est pseudo-euclidien. Pour $\alpha=0$, les segment OM_1 et OM_2 sont perpendiculaires.
Des raisonnements parfaitement analogues peuvent être conduits dans l'espace : pour cela il faut partir non pas d'une courbe (1), mais d'une surface :

$$x^2+y^2+\alpha z^2=c \quad (5)$$

qui pour $\alpha=1$ et $c>0$ est une sphère, pour $\alpha=-1$, $c>0$ est hyperboloïde de révolution à une nappe, et pour $\alpha=-1$, $c>0$ est hyperboloïde de révolution à deux nappes.
Renonçons maintenant au moyen habituel de définition des distances et remplaçons-le par notre nouveau procédé correspondant à $\alpha=-1$: dans ce cas, au lieu de l'habituel espace euclidien, nous obtiendrons un espace pseudo-euclidien. Le carré de la distance M_1M_2 entre les point $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$ est égal à l'expression analogue (3), c'est-à-dire :

$$\overline{M_1M_2}^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+\alpha(z_1-z_2)^2 \quad (6)$$

et l'angle entre les segments OM_1 et OM_2 est défінti par la formule analogue (4), c'est-à-dire :

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+\alpha z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+\alpha z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+\alpha z_2^2}} \quad (7)$$

La surface (5) pour $\alpha=1$ et $c>0$ est une sphère.

Pour $\alpha=-1$ et $c>0$, elle est une pseudo-sphère de rayon réel $\sqrt{c}$ et pour $\alpha=-1$ et $c>0$ est une pseudo-sphère de rayon purement imaginaire $\sqrt{c}=i\sqrt{|c|}$

Considérons les courbes avec des équations :

$x^2 + \alpha y^2 = c$ (1)

Pour $\alpha=1$ et $c>0$, l'équation (1) présente une circonférence.

Pour $\alpha=-1$ et $c<0$ ou $c>0$, l'équation (1) présente une hyperbole équilatérale.

Dans l'espace euclidien, le carré de la distance entre deux point M_1 (x_1, y_1) et $M_2(x_2, y_2)$ est égale :

$$d^2 = \overline{M_1M_2}^2 = (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 \qquad (2)$$

Si maintenant on définit le carré de cette distance par la formule :

$$d^2 = \overline{M_1M_2}^2 = (x_1-x_2)^2 - (y_1-y_2)^2 \qquad (3)$$

notre distance sera dans une surface dite pseudo-euclidienne.

Dans ce cas, si la partie gauche de l'équation (1) est le carré de la distance OM entre le point M(x,y) et le centre des coordonnées O(0,0), dans l'espace euclidien, c'est-à-dire pour $\alpha=1$ et $c>0$, l'équation (1) est une circonférence. En corollaire, sur une surface pseudo-euclidienne, c'est-à-dire pour $\alpha= -1$, l'équation (1) présente une circonférence de rayons réels $\sqrt{c}$, lorsque $c>0$ et pour $c<0$ elle présente une circonférence de rayons purement imaginaire : $\sqrt{c}=i\sqrt{|c|}$

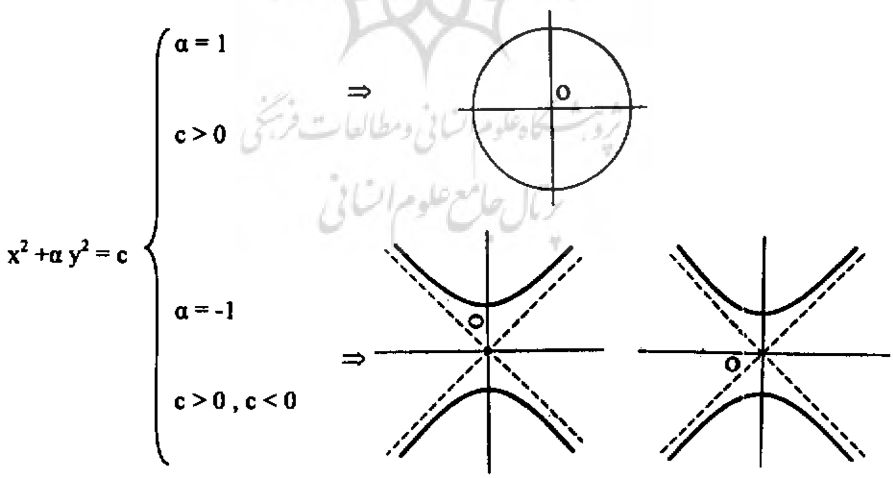
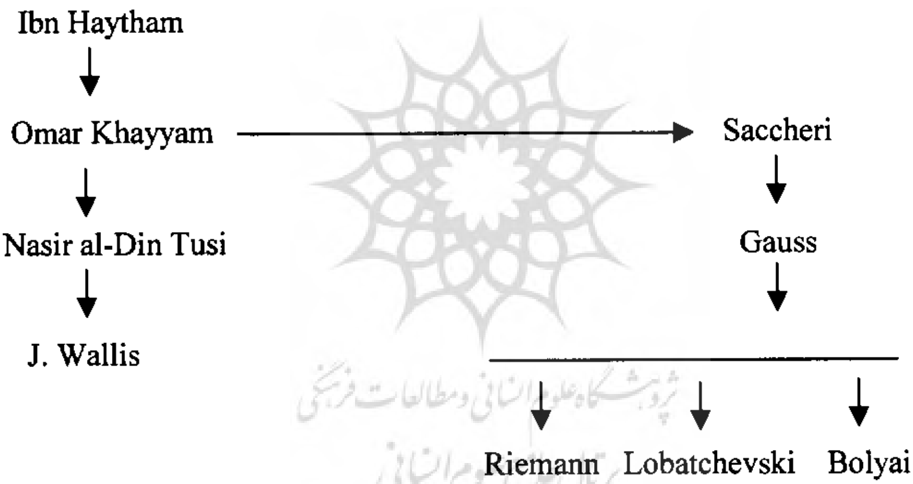


Figure 10

Circonférence dans un espace euclidien et pseudo-euclidien

« Il est hors de doute que Lobatchevski doit en grande partie à J. Bartles la profondeur et la diversité de connaissance mathématiques ainsi que la précision de sa pensée dans ce domaine. »[22]
Il devait donc être informé de toutes les idées nouvelles sur la théorie des parallèles venant de Göttingen. On voit donc comment le travail de Saccheri a abouti à la naissance des géométries non-euclidiennes. C'est pour cette raison que Beltrami, dans un article écrit en 1889, considérait Saccheri comme le précurseur de la géométrie non-euclidienne.[23] Mais les idées essentielles de Saccheri sur ce sujet, comme nous l'avons déjà signalé, se trouvent dans le traité de Omar Khayyam. Il est donc juste de dire que Khayyam était la source des géométries non-euclidienne. On peut également montrer cette influence par le tableau suivant :



V- Les propositions de Khayyam dans la géométrie non-euclidienne

La géométrie lobatchevskienne comme nous l'avons déjà signalé, est une géométrie hyperbolique. Or, le moyen le plus simple de définir une surface de Lobatchevski peut être obtenu en développant une analogie entre une circonférence et une hyperbole équilatérale.

---

[22]. V. Kagan, N. *Lobatchevski, sa vie*, son oeuvre, traduit en français, Moscou, 1957, p. 31.

[23]. E. Beltrami, « Un precursore italiano di Legendre e Lobatchevsky », *Ren. die della R. Acc. die Lincei*, V, (1889), pp. 441-448.

Mathématiciens, annoté de sa main. Et puis, comment Gauss n'aurait-il pas connu le mémoire de Klügel, élève de Kâstener qui enseignait à Göttingen quand le jeune prodige y débarqua, vers 1795. »[21]

En effet l'Université de Göttingen était au 18ème siècle le centre de toutes les recherches pour la démonstration du 5ème postulat d'Euclide. Gauss qui dirigeait l'observatoire de Göttingen a d'abord tenté, comme son prédécesseur italien Saccheri de démontrer le postulat d'Euclide par l'absurde. Plus tard, vers 1813, il se persuada de l'intérêt d'une géométrie différente de la géométrie euclidienne. Cependant il ne publia jamais rien sur ce sujet, de crainte de s'engager dans des polémiques et des diatribes philosophiques. Car, Kant, dans la *Critique de la raison pure* avait déclaré que la géométrie euclidienne est la nécessité inévitable de la pensée. Gauss s'est donc résolu à communiquer son travail à ses amis sous le sceau du secret. Pour cette raison l'on peut affirmer que les idées qui semblent avoir surgi spontanément et indépendamment l'une de l'autre chez différents chercheurs comme Bolyai, Lobatchevski et Rimann sont toutes issues du cerveau de Gauss et dans tous les cas, sont toutes passées par son intermédiaire à Göttingen. Lobatchevski et Bolyai ont développé les conséquences de la troisième hypothèse de Saccheri dans laquelle deux droites d'un plan, perpendiculaires à une troisième, vont en divergeant. Rimann qui était élève de Gauss, a reconnu qu'une autre géométrie est encore possible, quand on accepte l'hypothèse de l'angle obtus de Saccheri tout en rejetant l'hypothèse de l'infinitude de la droite (en considérant la droite comme une ligne fermée). Il obtient ainsi un système de géométrie elliptique. Lobatchevski ne dit rien de ses sources et affirme que les résultats exposés dans son livre lui appartiennent. Beaucoup de gens ne se rendent pas compte de l'influence du temps et du milieu sur la formation de l'esprit humain ainsi que de la longue progression des savoirs. Par conséquent, certains peuvent en arriver à exagérer l'originalité de leurs propres idées sans prendre en considération l'obligation qu'ils ont envers leurs contemporains. Lobatchevski qui s'était rendu en 1814 à l'Université de Kazan pour ses travaux de recherche sur la géométrie, était cependant en relation scientifique avec J. Bartles et ami de Gauss qui était professeur à l'Université de Kazan :

---

21. Jean-Claude Pont, L'aventure..., *op. cit.* p. 374.

Klügel examine dans son mémoire de 1763, qui aura tant d'importance pour l'histoire du postulat. lorsqu'il présente l'Euclides ab omni naevo vindicatus, Klügel[17] *écrit : 'Dans les derniers temps, personne ne s'est occupé de ce problème d'une manière plus complète que le jésuite Hieronimus Saccheri, professeur de mathématiques à Pavie' ».*[18]

J.-H. Lambert, mathématicien suisse, dans sa *Théorie des parallèles*, publiée en 1786, mais qui semble avoir été écrite vingt ans auparavant, discute des trois cas de Saccheri dont, suivant une supposition plausible de Segre,[19] il pouvait connaître les travaux. Il arrive à cette conclusion : l'hypothèse de l'angle aigu ne peut pas être aussi facilement rejetée que celle de l'angle obtus qui contredit l'infirmité de la droite.

Il semble que Adrien Marie Legendre, mathématicien français du 19ème siècle connaissait également l'œuvre de Saccheri car, sa démonstration du 5ème postulat d'Euclide ressemble fortement à celle de Saccheri.[20]

« Le livre le Saccheri fut vraisemblablement connu de Gauss puisqu'il est cité par Lehmann (voir Livre 5, 2ème partie, chapitre 3) dont l'ouvrage a été retrouvé dans la bibliothèque du Prince des

---

17. G.S. Klügel, « Theorie der Parallelinen » *Magazin für reine und angewandte Mathematik*, 1786, pp. 137-64, 325-358.

18. Jean-Claude Pont, *L'aventure des parallèles : Histoire de la géométrie non euclidienne, Précurseurs et Attardés*, Berne, 1986, p. 372.

19. Corrado Segre, *Congetture intorno all' influenza di Gerolamo Saccheri sulla fromazione della goemetria non euclidea*, Atti Accd. Scienze Torino, 1903,

20. Mary of Mercy Fitzpatrick a écrit à ce propos :

"Adrien Marie Legendre (1752-1853) a French mathematician, also displayed knowledge of Saccheri's work. In his Eléments de géométrie, his investigations of the theory of parallels were much like Saccheri's, and the results he obtained were to a large extend the same. He chose, however, to place emphasis upon the angle-sum of a triangle and proposed three hypotheses in which the sum of the angles is, in turn, equal to, greater than, and less than two right angles, hoping to be able to reject the last two. Unconsciously assuming the straight line infinite, he was able to eliminate the geometry based on the second hypothesis by proving the following theorem : The sum of the angles of a triangle cannot be greater than two right angles."

(→ Mary of Mercy Fitzpatrick "Saccheri, forerunner of non-Euclidian geometry" *The Mathematics Teacher*, May 1964, p. 328).

Saccheri, lui-même, n'indique pas ses sources et ne cite jamais le nom de Khayyam. Il faut donc revenir à une autre hypothèse. Toujours d'après M. Jaouiche :

« Une hypothèse, plus immédiate, nous est suggérée par certaines indications que Wallis lui-même donne au sujet des sources où il a puisé ses connaissances sur les mathématiciens d'expression arabe. Avant d'exposer la démonstration de Tusi, Wallis nous apprend qu'il l'a connue grâce à ''l'assistance de l'illustre Edouard Pocock... professeur hautement versé dans les langues orientales et particulièrement en arabe''. Dans le paragraphe qui suit l'exposé de la démonstration de Tusi, Wallis nous dit qu'il a pu avoir connaissance, toujours grâce à Pocock, de deux autres manuscrits arabes dont il ne mentionne pas les auteurs. Faisant ensuite une brève critique de ces derniers, il cite un postulat qui est celui dont s'est servi Khayyam dans ses démonstrations. L'un de ces manuscrits serait-il donc celui de Khayyam et serait-ce par une traduction de Pocock, si celui-ci en a fait une, que Saccheri aurait connu le mathématicien persan ? Ce n'est là qu'une hypothèse, mais il nous semble que c'est dans cette voie que l'on pourrait peut-être résoudre le problème. » [16]

IV- Saccheri et la naissance des géométries non-euclidiennes

L'insuccès de Saccheri dans la démonstration du postulat d'Euclide a été féconde pour la géométrie, car il a laissé ouverte une voie aux recherches postérieures. Cette voie fut obstinément suivie par d'autres chercheurs qui voulaient démontrer ce même postulat ; jusqu'à ce que, enfin, il apparut clairement qu'il est indémontrable et que, si on le laisse de côté, on peut construire des géométries non-euclidiennes parfaitement cohérentes et exemptes de contradiction logique, et, par conséquent, valables dans la région idéale où la notion moderne de l'espace se développe.

Euclide lavé de tout soupçon de Saccheri a été publié en 1733 à Milan. Ce livre est d'abord :

« mentionné dans la monumentale histoire des mathématiques de Montucla (1799, 265, T.I., p. 210) ainsi que dans Historia matheseos de Heilbronner (1742). Ensuite, il compte au nombre de ceux que

---

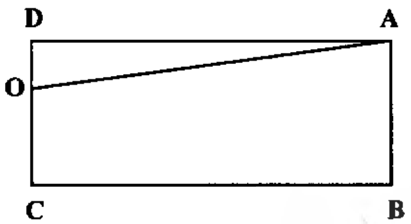
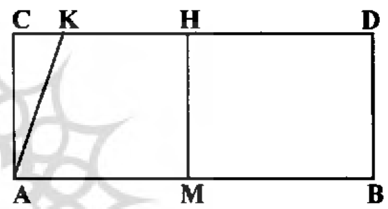
16. K. Jaouiche, « De la fécondité mathématique ... », op. cit., p. 113.

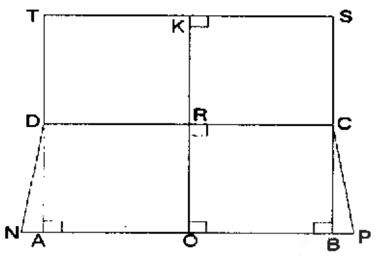
Après avoir comparé les propositions de Khayyam avec celles de Saccheri M. Jaouiche conclut ainsi :

« Nous ferons remarquer, au sujet de la première proposition ; l'équivalence évidente des hypothèses et la similitude des démonstrations. La seule différence qui existe entre les deux propositions est la qualification des angles A et B. Ils sont droits chez Khayyam, égaux chez Saccheri. Dans ce sens on peut dire que la proposition de ce dernier est plus générale que celle de Khayyam. Mais de même que la rectitude des angles à la base est, dans la première proposition de Khayyam, une restriction inutile, la génération de Saccheri n'apporte rien de nouveau. On verra d'ailleurs que dans la proposition où la rectitude des angles à la base est essentielle, Saccheri introduira des angles droits. Les premières propositions des deux autres sont donc identiques. Il en est de même des deux secondes propositions. En ce qui concerne la troisième et la quatrième propositions de Khayyam, d'une part, et la troisième proposition de Saccheri, d'autre part, la similitude entre les deux auteurs est moins apparente, mais elle n'est pas moins profonde. Si la troisième proposition de Khayyam ne correspond pas directement à une proposition de Saccheri, l'idée maîtresse sur laquelle elle repose se retrouve intégralement dans la proposition III de ce dernier. Remarquons tout d'abord que les trois cas distingués dans celle-ci qui deviendront célèbres sous le nom des « trois hypothèses de Saccheri » et qui correspondront à « trois géométrie différentes – sont ceux que Khayyam distingue dans les trois parties de sa démonstration. De plus, les relations essentielles établies par Saccheri dans sa proposition III entre les côtés du quadrilatère et les angles obtus et aigus sont celles-la même que Khayyam établit dan la démonstration de sa troisième proposition. Il existe, il est vrai, une différence. Ce n'est pas le côté opposé CD qui, chez Khayyam, est plus grand ou plus petit que la base, c'est la droite TH. Mais la relation essentielle entre les côtés et les angles se retrouve identiquement chez les deux auteurs... La première partie de la proposition III de Saccheri et sa démonstration sont identiques à la proposition IV de Khayyam et à la démonstration de celle-ci ... »

Reste à savoir comment Saccheri aurait pu accéder à un ouvrage dont on ne connaît, à ce jour, aucune traduction latine. Par ailleurs,

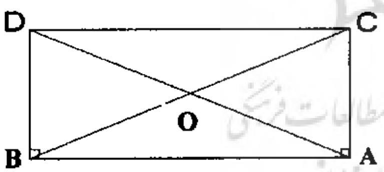
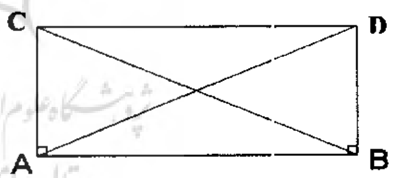
KHAYYAM	SACCHERI
Proposition IV :	Proposition III :
	Joignons les milieux M et H de AB et CD nous avons : AM ⊥ MH CH ⊥ MH $\angle C \neq 90°$ donc (prop. I) CH ≠ AM Mais le segment CH n'est pas plus grand que le segment AM. En effet, supposons qu'il le soit et prenons: HK=AM Alors (prop. I) MAK=AKH Mais cela est impossible, car : $\angle MAK < 90°$ et (Eucl. , I, 16) : HKA > ACD > 90° Donc : CH<AM Et CD>AB 3ème partie $\angle C = \angle D < 90°$ Saccheri démontre, par un raisonnement analogue à celui de la 2° partie, que : CD > AB

KHAYYAM	SACCHERI
Proposition IV :	Proposition III :
Hypothèses : Quadrilatère ABCD : $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=$ 1 angle droit Conclusions : CD=AB  Démonstration : Si AB $\neq$ CD. Supposons DC>AB Prenons OC=AB Joignons AO Alors : BAO=COA (prop. I). Mais : BAO < 1 angle droit et COA >1 angle droit (angle extérieur au triangle AOD qui a déjà un angle droit) Donc COA, qui est plus grand qu'un angle droit, serait égal BAO, qui est plus petit qu'un angle droit : ce qui est impossible. Donc : DC=AB	Hypothèses : Quadrilatère ABCD : AC= D AC et BD $\perp$ à AB Conclusions : a) Si $\angle C=\angle D$ 1 angle droit, CD=AB b) Si $\angle C=\angle D>1$ angle droit, CD<AB c) Si $\angle C=\angle D<1$ angle droit, CD>AB  Démonstration : 1ère partie : $\angle C=\angle D=1$ angle droit Si AB $\neq$ CD Supposons DC>AB Prenons DK=AB Joignons AK Alors: BAK=DKA (Prop. I) Mais : BAK<1 angle droit et DAK>1 angle droit (angle extérieur au triangle ACK dont l'angle DCA est droit) On démontre de même que : AB>DC est impossible. Donc : DC=AB 2ème partie : $\angle C=\angle D>1$ angle droit

KHAYYAM	SACCHERI
Proposition III :	Proposition III :
 Hypothèse : Mêmes hypothèses que dans la proposition I et auxquelles s'ajoutent celles-ci : C=D OR⊥AB D'après la proposition II on a aussi OR⊥CD Prolongeons OR tel que : OR=RK SKT=OK	

KHAYYAM	SACCHERI
Proposition II :	Proposition II :
Hypothèse : BO=OA OR⊥AB Conclusion : CR=RD OR⊥CD Démonstration : Joignons DO et OC, on a : AC=BD AO=OB A=B=90° D'où : DO=OC et AOC=BOD Donc DOR=ROC Dans les triangles DOR et ROCon a : DO=OC OR est commun : DOR=ROC Ces triangles sont donc égaux et par suite : DR=RC DRO=CRD=90°	Hypothèse : AM=MB CH=HD Conclusion: CHM=DHM=90° AMH=BHM=90° Démonstration : Joignons AH, BH, CH et DM, nous avons : A=B C=D ΔDBM=ΔCAM⇒CM=DM Les triangles AMH et BMH sont égaux, donc : CHM=DHM= 90° AMH=BMH= 90°

L'importance de cette comparaison nous oblige à la reproduire dans ce chapitre. On a ici la traduction des proposition de Saccheri en regard avec celles de Khayyam.

KHAYYAM	**SACCHERI**
Proposition I	Proposition I
Hypothèse : Dans le quadrilatère ABCD on a : $\begin{cases} AC \perp AB \\ BD \perp AB \\ AC = BD \end{cases}$	Hypothèse : Dans le quadrilatère ABCD on a : $\begin{cases} AC = AB \\ \\ A = B \end{cases}$
Conclusion : C=D	Conclusion : C=D
Démonstration : $\Delta ABD = \Delta ACD \Rightarrow \begin{cases} AD = CB \\ OAB = ABA \end{cases}$	Démonstration : Joignons CB et AD on a
	
Dans le triangle DOC on a : OCD=OD Donc : ACD=BDC	$\Delta ABD = \Delta ACB \Rightarrow AD = CD$ et $\Delta BDC = \Delta ACD \Rightarrow ACD = BCD$

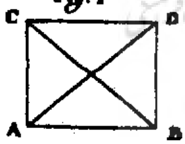
گزاره اول ساکری

PROPOSITIO 1.

Si duæ æquaales re*&*tæ (fig. 1.) A C, BD, æquales ad eaſdem partes efficiant angulos cum re*&*tæ AB: Dico angulos ad jun*&*tam CD aquates invicem fore.

Demonſtratur. Jungantur AD, CD. Tum confiderentur triangula CAB, DBA, Conſtat (ex quarta primi) æqia;es ſpre bafes CB, AD, Deinde confiderentur triangula ACD, BDC. Conſtat (ex o*&*tava primi) æquales fore angulos ACD, BDC, Quod erat demonſtrandum.

Fig. 1



گزاره اول خيام

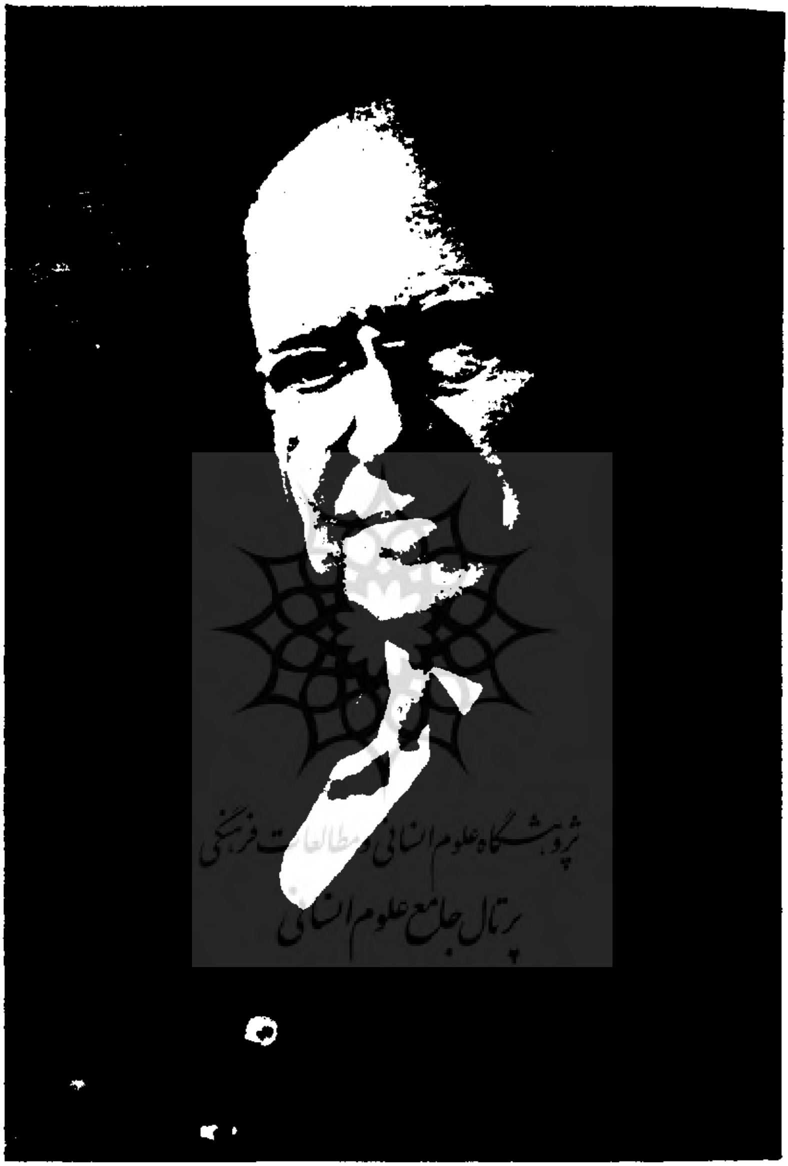
الشكل الأول، و هو كط من مقالة آ:

خطُّ ا ب مفروض، و نخرج ا ج عموداً على ا ب، و نجعل ب د عموداً على ا ب و مساوياً لخطِّ ا ج ، فهما متوازيان / كما بيّنه أقليدس في شكل كو، و نصل ج د ؛ فأقول : إن زاوية ا ج د مساوية لزاوية ب د ج.

برهانه: نصل ج ب ا د . فخط ا ج مثل ب د ، و ا ب مشترک، و زاويتا آ و ب قائمتان ؛ فقاعدتا ا د ج ب متساويتان ، و سائرُ الزوايا مثل سائرِ الزوايا. فيكون زاويتا ه ا ب ه ب ا متساويتين ، فخطا ا ه ه ب متساويان؛ فيبقى ج ه ه د متساويين ؛ فيكون زاويتا ه ج د ه د ج متساويتين. و ا ج ب مثل ا د ب ، فزوايتا ا ج د ج د ب متساويتان. وذلک ما أردنا أن نبين.

و من ههنا استبان أن زاويتي ج ا ب د ب ا ، إذا كانتا متساويتين ، كيف ما كانتا، و خطا ا ج ب د متساويين ، يجب / أن يكون زاويتا ب د ج ا ج د متساويتين.

La comparaison de la première proposition de Khayyam avec celle de Saccheri dans leurs versions originales



DAVID EUGENE SMITH (1860–1944)

David E. Smith, mathématicien américain, est le premier à avoir identifié les deux premières propositions de Khayyam à celles de Saccheri l'œuvre de Khayyam. Smith,[14] mathématicien et historien des mathématiques, est le premier à signaler cette similitude. Celui-ci a comparé les deux premières propositions de Khayyam aux deux premières de Saccheri. Plus tard, en 1967 feu Khalil Jaouiche, historien des mathématiques islamiques est allé plus loin en montrant que deux autres propositions du savant italien sont également identiques à celles du mathématicien persan.[15]

---

[14]. D.E. Smith, "Omar Khayyam and Saccheri" *Scripta Mathematica*, 3(1935), pp. 5-10.

[15]. K. Jaouiche « De la fécondité mathématique d'Omar Khayyam à G. Saccheri », *Diogène*, 57(1967), pp. 97-113

Pourquoi ce titre « Euclide lavé de tout soupçon » ? On suggère que Saccheri était déjà convaincu avant même de commencer ses démonstrations qu'il ne trouverait pas de contradiction, et que le seul but de son livre était de « libérer Euclide ». On sait que Saccheri, déjà dans sa jeunesse, était arrivé à l'idée que la propriété caractéristique des propositions les plus fondamentales de n'importe quelle science démonstrative est précisément qu'on ne peut pas les démontrer sauf en faisant l'hypothèse de la fausseté de la proposition à prouver, et en montrant comment, ainsi, quand on prend cette hypothèse comme point de départ, on arrive à la conclusion que la proposition en question est vraie.

Ce fut en espérant atteindre de cette façon une preuve du Postulat des Parallèles, à savoir le déduire de l'hypothèse même de sa fausseté, que Saccheri poussa son investigation des conséquences découlant des deux autres hypothèses alternatives auxquelles la négation du postulat des parallèles donnait naissance, atteignant ainsi des résultats amenant à une découverte bien plus importante que celle qu'il escomptait à savoir la découverte d'une géométrie entièrement neuve dont l'ancienne n'est qu'un simple cas particulier.

De ce point de vue, sa position ressemble à celle de Christophe Colomb qui fut amené à découvrir un nouveau continent précisément en espérant atteindre d'une nouvelle manière des régions déjà connues .

Ce fut une difficulté psychologique et non pas logique qui amena Saccheri à rejeter les conclusions logiques auxquelles l'amenaient inévitablement et clairement ses propres travaux et ce fut certainement la même sorte de difficulté qui causa le rejet immédiat, par lui-même et par d'autres mathématiciens, plus tard, de l'hypothèse (de l'angle obtus).Quoique l'ouvrage de Saccheri (Euclide lavé …) ait manqué son but il est d'une grande importance. C'est là qu'a été fait l'effort le plus déterminé en faveur du Cinquième Postulat, et le fait que Saccheri ne réussit pas à découvrir la moindre contradiction parmi les conséquences de *l'hypothèse de l'angle aigu*.

Nous discuterons plus tard sur l'impact du travail de Saccheri en Occident, nous signalons ici que la similitude des propositions de Saccheri avec celles de Khayyam, fait penser que celui-ci connaissait

Il revient à la démonstration par l'absurde du type de celle de Khayyam, mais il développe beaucoup plus les propriétés déductibles des diverses hypothèses : angle aigu, angle obtus. Sa figure de base est le quadrilatère de Khayyam. Il montre que si dans l'un d'entre eux les angles aux sommets sont aigus, ils le sont dans tous, et que la même propriété est valable si les angles aux sommets sont droits ou obtus. Pour que le 5$^{\text{ème}}$ postulat soit démontre, il suffit donc de prouver l'existence d'un rectangle. Ensuite, Sacchaeri par un raisonnement irréprochable, démontre, dans la 14$^{\text{ème}}$ proposition du livre I, que l'hypothèse de l'angle obtus est fausse car, dans cette hypothèse, le postulat d'Euclide se prouve rigoureusement ; et ce postulat entraîne l'hypothèse de l'angle droit. Mais il faut remarquer à ce propos, qu'il a dû invoquer pour cela des propositions qui ne sont démontrées que si l'on admet le 6$^{\text{ème}}$ postulat d'Euclide : « deux droites ne comprennent pas d'espaces ». On ne peut donc pas en conclure que Saccheri démontre la fausseté de la géométrie de Riemann qui rejette ce postulat.

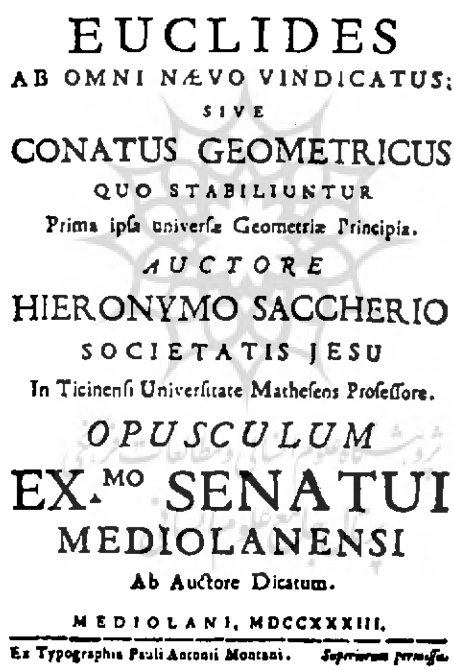
Il restait maintenant à Saccheri à s'occuper de l'hypothèse de l'angle aigu qu'il explora dans l'espoir de trouver une contradiction. Il obtint beaucoup de résultats qui semblaient étranges parce qu'ils différaient très sensiblement de ceux établis en faisant usage du cinquième postulat, mais il ne parvint jamais à trouver la contradiction désirée. Puisqu'il trouvait qu'il était impossible de nier l'hypothèse de l'angle aigu sur des bases purement logiques et de « prouver » ainsi le Cinquième Postulat, Saccheri conclut à la proposition XXXIII de son fameux livre *Euchdes ab omni naevo vindicatus* (Euclide lavé de tout soupçon), que « l'hypothèse de l'angle aigu est absolument fausse car elle répugne à la nature de la ligne droite ». Pour cette preuve, il se fia à l'intuition et à une foi dans la validité du Cinquième Postulat plutôt qu'à la logique, et compta sur cinq lemmes étalés sur 60 pages de son oeuvre maîtresse dans lesquelles sont donnés cinq axiomes fondamentaux ayant trait à la ligne droite et au cercle avec les postulats correspondants.

Il est hautement improbable que Saccheri se soit satisfait de sa propre investigation, pour la raison qu'il était un habile logicien. S'attendait-il vraiment à trouver une faille dans les postulats fondamentaux d'Euclide, ou avait-il l'idée préconçue qu'aucun défaut ne pouvait être trouvé chez son idole ?

III- L'influence de Khayyam sur Saccheri

En Orient, la théorie des lignes parallèles fait l'objet, au XIIIème siècle, d'un ouvrage de Nasir al-Din al-Tusi intitulé : *Traité pour dissiper un doute à propos des lignes parallèles.* Il débute par un exposé et une critique des théories des lignes parallèles d'Ibn al-Haytham, d'al-Jauhari et de Khayyam.

En Occident, le travail le plus important sur ce sujet appartient à G. Saccheri (1667-1733). Celui-ci traite la question des parallèles dans l'ouvrage posthume : *Euclide ab omni naevo vindicatus* (Milan 1733) (Euclide lavé de tout soupçon).



EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinensi Universitate Matheseos Professore.
OPUSCULUM
EX.^MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. *Superiorum permissu.*

روی جلد کتاب ساکری که تحت عنوان «اقلیدس عاری از هرگونه نقص» در سال ۱۷۳۳ در میلان چاپ گردید.

Figure 9

Couverture d'*Euclide lavé de tout soupçon* de Saccheri, publié en 1733 à Milan

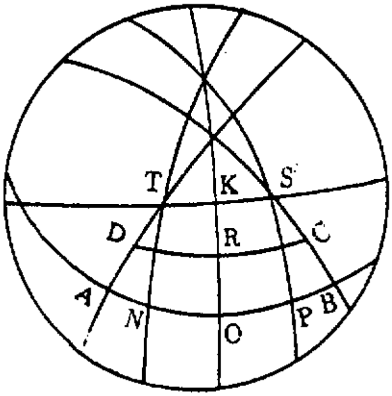


Illustration de l'inégalité AB<TS dans le cas elliptique

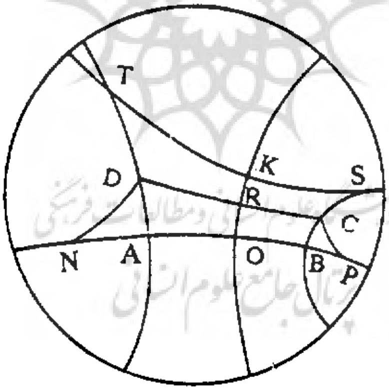


Illustration de l'inégalité AB>TS dans le cas hyperbolique

Figure 8

De la même manière, si les angles égaux BCD et ADC étaient obtus, on montrerait que la longueur ST est plus petite que AB, et donc les droites (BC° ET 5AB) se rapprocheraient l'une de l'autre des deux côtés de (AB). Ainsi, conclut Khayyam, les angles en C et D sont droits car les deux cas, aigu et obtus contredisent l'idée du principe de Khayyam selon lequel :

Deux droites ne peuvent pas s'écarter l'une de l'autre des deus côtés à la fois, ni se rapprocher des deux côtés à la fois. Ainsi Khayyam démontre que AB et CD sont parallèles ; par là il démontre l'existence du rectangle.

La démonstration de Khayyam a été faite avec une rigueur vraiment euclidienne, sauf dans les passages où intervient son fameux principe. Si l'auteur n'avait pas recours à celui-ci, il serait probablement arrivé avant Lobatchevski et Rimown à la géométrie non euclidienne. Car, comme on peut le voir dans la figure suivante, dans la géométrie hyperbolique on trouve AB < TS et dans la géométrie elliptique: AB > TS :

Figure 7

Démonstration par alibi

Dans les mathématiques la *démonstration indirecte* est appelée « démonstration par l'absurde ». Elle débute par la négation de la proposition que l'on veut démontrer pour aboutir à une absurdité, ce qui démontre que la proposition de départ est fausse.

Admettons que nous ayons à démontrer une proposition p. La démarche consiste à montrer que supposer non p (i.e. que p est fausse) mène à une contradiction logique. Ainsi « p » ne peut pas être fausse et doit être a fortiori vraie. Khayyam recours à cette démonstration et suppose que les angles ADC et BCD sont aigus : par « rotation autour de (CD) » c'est-à-dire par symétrie orthogonale – [RK] vient sur [RO], (ST) sur (AB) et le segment [ST] sur un segment [PN]. L'angle SCR étant supérieur à l'angle aigu BCR, la longueur ST, égale à PN, est plus grande que AB. Ainsi, remarque Khayyam, les droites (BC) et (AD), perpendiculaires à (AB) s'écarteraient d'un côté de (AB) ; mais pour des raisons de symétrie, elles s'écarteraient aussi de l'autre côté.

voici que la négation de ce postulat se traduit maintenant en des termes analogues à ceux de son affirmation. La formulation de cette négation prend une consistance. Logiquement, les trois hypothèses, celle de l'affirmation du postulat et les deux hypothèses de sa négation, sont sur le même plan. A priori, la première n'apparaît pas privilégiée. Et il est remarquable que la négation du postulat d'Euclide ne consiste pas dans une seule situation, mais qu'elle se dédouble en deux cas : l'angle aigu correspond à la géométrie de Bolyai-Lobatchevsky, et l'angle obtus à la géométrie de Riemann. Cette dualité est un des traits qui manifestent, qu'en posant ainsi le problème, on en atteint le ressort profond, alors que les considérations antérieures, basées sur la propriété d'équidistance, demeuraient à sa surface. »[13]

En mathématiques on démontre souvent un théorème ou une proposition par une *démonstration directe* : où la conclusion est établie en combinant logiquement des axiomes, des définitions et d'autres théorèmes. Cependant, il existe des propositions que l'on n'arrive pas à démontrer par une telle démonstration. On recours alors à la démonstration indirecte – démonstration que l'on utilise également dans les affaires criminelles. Supposons que quelqu'un soit accusé d'un crime commis à un moment déterminé à un endroit X. S'il peut démontrer qu'à ce moment précis il était à l'endroit Y, l'accusation ne tiendra plus et il sera libre. Une telle démonstration en justice porte le nom « d'alibi ».

[13]. F. Russo, « Genèse de la géométrie non-euclidienne », *Revue des questions scientifiques*, Tome XXIV(1963), pp. 463-464.

perpendiculaire à la base supérieure du quadrilatère et qu'elle divise en deux la base supérieure:

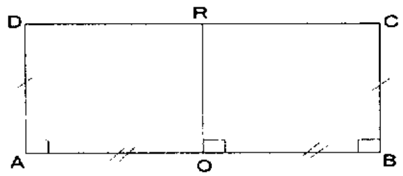


Figure 5

Proposition III :

La proposition III est particulièrement importante : Khayyam y démontre que les angles supérieurs du quadrilatère envisagé sont droits. Pour cela, il examine trois hypothèses selon lesquelles ces angles sont des angles droits, aigus et obtus. En élevant au milieu de O de la base inférieure AB du quadrilatère une perpendiculaire OR coupant la base supérieure CD au point R, Khayyam prolonge cette perpendiculaire au point K tel que OR=RK, puis il élève la perpendiculaire à la droite OK au point K, il trouve les point T et S de son intersection avec le prolongement des côtés AC et BD et il montre que DT=CS, c'est-à-dire que le quadrilatère ABST est un quadrilatère de même type que ABCD :

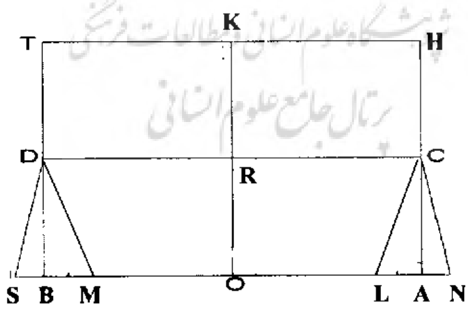
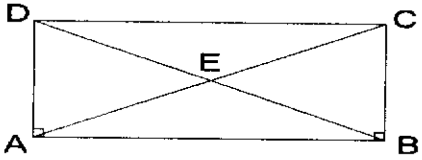


Figure 6

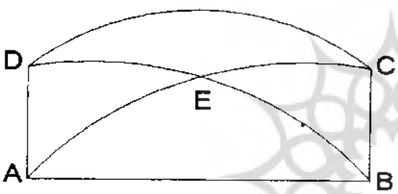
« On ne saurait trop souligner l'importance du pas qui est ainsi franchi. L'horizon s'est soudain élargi. Alors que jusque là. en face du postulat des parallèles, aucune construction concurrente ne s'offrait,

$$\text{Hypothèse:}\begin{cases}|AD| = |BC| \\ A = B = 90^\circ\end{cases}$$

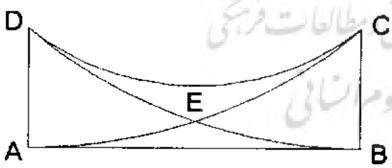
Conclusion: $C = D$



Dans la gèomètrie eucldienne:
$C = D = 90^\circ$



Dans la gèomètrie de Riemann:
$C = D > 90^\circ$



Dans la gèomètrie de Lobatchevski:
$C = D < 90^\circ$

Figure 4

Les alternatives de la première proposition de Khayyam

Proposition II :

Dans la proposition II, Khayyam démontre que la perpendiculaire élevée au milieu de la base inférieure du quadrilatère est

De plus, ils sont aigus si et seulement si $|AB|>|DC|$; ils sont droits si et seulement si $|AB|=|DC|$ et il sont obtus si et seulement si $|AB|<|DC|$. Ainsi apparaissent trois possibilités connues sous les noms d'hypothèse de l'angle aigu, de l'angle droit et de l'angle obtus.

Démontrer le 5ème postulat sera prouver que les hypothèses de l'angle obtus sont impossibles. Le quadrilatère sera alors nécessairement un rectangle.

Dans la proposition I Khayyam démontre que les angles supérieurs du quadrilatère envisagé sont égaux entre eux.[12]

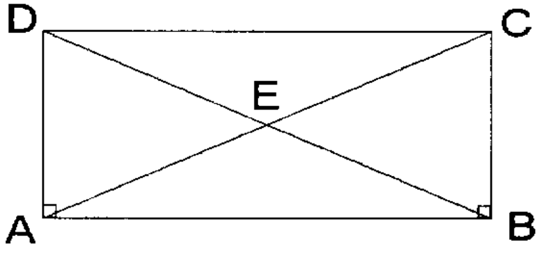


Figure 3

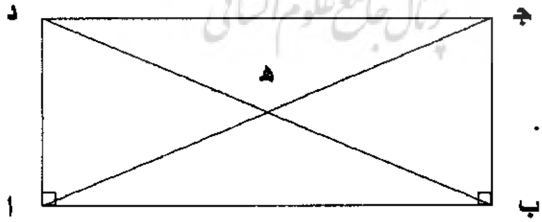
---

[12]. Omar Khayyam, *Epitre*.... op. cit. p. 186 Voici le texte de Khayyam :

الشكل الاول

[و هو الشكل التاسع و العشرون من المقالة الاولى من الاصول]

خط (ا ب) مفروض و نخرج (ا حـ) عموداً على (ا ب) و نجعل (ب د) عموداً على (ا ب) و مساوياً لخطّ (ا حـ) و هماموازيان كمابيّنه اقليدس فى شكل (كز) و نصل (حـ د). فاقول ان زاوية (ا حـ د) مساوية لزاوية (ب د حـ). برهانه نصل (حـ ب) (ا د) فخطّ (ا حـ) مثل (ب د) و (ا ب) مشترک و زاويتا (ا) و (ب) قائمتان.



فقاعدتا (ا د) (حـ ب) متساويتان و سائر الزّوايا مثل سائر الزّوايا؛ فتكون زاويتا (ه ا ب) (ه ب ا) متساويتين؛ فخطّا (ا ه) (ه ب) متساويان. فيبقى (حـ ه) (ه د) متساويين؛ فتكون زاويتا (ه د حـ) (ه حـ د) متساويتين و (ا حـ ب) مثل (ا د ب) فزاويتا (ا حـ د) (حـ د ب) متساويتان و ذلک ما اردنا ان نبيّن.

و من ههنا استبان انّ زاويتى (حـ ا ب) (د ب ا) اذا كانتا متساويتين كيف ماكانتا و خطّا (ا حـ) (ب د) متساويين يجب ان يكون زاويتا (ب د حـ) (ا حـ د) متساويتين

- « Rien de ce qui est continu ne peut être formé de parties indivisibles, par exemple, une ligne de points, si la ligne est continue, le point étant indivisible » « Une grandeur finie peut toujours être épuisée par une grandeur déterminée »
Le principe 3 est une affirmation d'Aristote citées par Proclus, lequel dit que sa démonstration du cinquième postulat :
« suppose l'axiome dont se servait Aristote dans sa démonstration de la finitude du monde : à savoir, si d'un même point partait deux droites, et qu'on les prolonge de façon illimité, leur distance entre elles devient supérieure à n'importe quelle grandeur finie »
Le principe 4 ne se trouve pas dans les ouvrages d'Aristote. Or ce principe tient une place fondamentale dans la démonstration du cinquième postulat par Khayyam. Il contient deux affirmations dont chacune est équivalente au cinquième postulat. Khayyam commence par démontrer que deux perpendiculaire à une droit ne peuvent pas se couper puisque dans ce cas elles devraient se couper en deux points des deux côtés de cette droite.
De là et de la première affirmation du principe de Khayyam, il s'ensuit que deux perpendiculaires à une droite ne peuvent pas converger.
De la seconde affirmation du principe de Khayyam, il découle que ces deux perpendiculaires ne peuvent pas non plus diverger puisqu'elle devraient diverger des deux côtés de cette droite. C'est pourquoi deux perpendiculaires à une droite doivent se trouver à une distance constante.
Ensuite, Khayyam démontre 8 propositions qui, selon lui, devraient être insérées dans le livre I des *Eléments* d'Euclide à la place de la 29ème proposition par laquelle Euclide commence l'énoncé de la théorie des lignes parallèles, fondée sur le cinquième postulat (les 28 premières propositions des *Eléments* ne dépendent pas du cinquième postulat).

Proposition I :
Khayyam construit un quadrilatère formé par deux perpendiculaires AC et BD de longueur égale, élevées à une droite AB, et par les segments AB et CD. Ce quadrilatère a joué un grand rôle dans l'histoire de la géométrie non euclidienne. On l'appelle souvent quadrilatère de Saccheri car celui-ci en a repris l'étude.

circonférences de cercles égaux. Khayyam critique également les démonstrations données par ses prédécesseurs. D'après lui, « ils n'ont fait que substituer d'autres, qui ne sont pas plus évidents ».[9] Il écarte les démonstrations du 5ème postulat tentées par Héron , Eutocius, al-Khazem, al-Shanni et al-Nairizi qu'il estime inconsistantes du point de vu logique. Il écarte également la démonstration d'Ibn Haytham, critiquable, selon lui, par l'utilisation du mouvement. Pour lui, le tort de ces savants est de « n'avoir pas pris en compte les principes empruntés au philosophe, c'est-à-dire Aristote ».[10] Il faut signaler que, contrairement à ses prédécesseurs, Khayyam était à la fois un philosophe et un mathématicien. Ses réflexions philosophiques apparaissent constamment tout au long de sa démonstration. Afin de démontrer le postulat d'Euclide, Khayyam cite cinq de ces « principes philosophiques » : .

1) « Les grandeurs peuvent être divisées à l'infini, c'est-à-dire qu'elles ne sont pas formées d'indivisibles. »
2) « Une ligne droite peut être prolongée à l'infini. »
3) « Deux lignes droites intersectées s'ouvrent et divergent à mesure qu'elles s'éloignent du sommet de l'angle d'intersection. »
4) « Deux lignes droites convergentes se coupent, et il est impossible que deux lignes droites convergentes divergent dans la direction de la convergence. »
5) « Parmi deux grandeurs limitées inégales on peut prendre une plus petites avec une multiplicité telle qu'elle dépassera la grande. »[11]

Le dernier principe est l'axiome bien connu d'Archimède que Khayyam introduit clairement avant l'énoncé de sa théorie des parallèles. Les principes 1, 2 et 5 sont des affirmations d'Aristote qui sont exposés dans sa *Physique* :

- « La longueur et le temps en général tout ce qui est continu, sont appelés infinis, aux deux sens du termes, soit par rapport à la division, soit par rapport aux limites »

---

9. Omar Khayyam, *Epître sur l'explication des prémisses problématiques du Livre d'Euclide, texte établi par J. Homai, dans Khayyami Namé*, Téhéran, 1962 (1341 H.S.), p. 178
10. Ibid. p. 179
11. Proclus, *Commentaire sur le 1er Liver des Eléments d'Euclide*, Traduction par P. Verecke Paris 1987.

d'un rectangle (clé du 5ème postulat) est alors possible par déplacement du côté PS perpendiculaire aux autres côtés.[7]

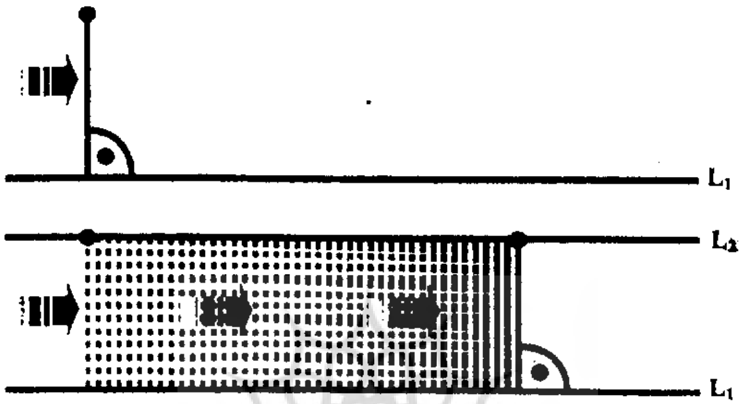


Figure 2

La démonstration qui se base sur une telle construction n'est, bien entendu, pas acceptable. Car, le mouvement appartient à la physique et Aristote, dans sa *Métaphysique*, l'exclut des mathématiques.[8]

II- Omar Khayyam et Le 5ème postulat d'Euclide

Le 5ème postulat d'Euclide ne satisfaisait pas non plus Khayyam. C'est pour cette raison qu'il a consacré le premier chapitre de son *Epître sur l'explication des prémisses problématiques du Livre d'Euclide*, à ce problème, les deux suivants exposant la théorie des rapports. Khayyam ne doute pas de la véracité de ce postulat d'Euclide, mais il le juge moins évident que plusieurs autres propositions qu'Euclide trouve nécessaires de démontrer, comme le théorème suivant lequel des angles centraux égaux découpant des arcs égaux sur des

---

7. Sur la construction d'Ibn al-Haytham, voir également K. Jaouiche, *La théorie des parallèles en pays d'islam*, op. cit. pp. 57-74.

8. Aristote, *Métaphysique*, 989b32, Traduction J. Tricot, Paris, Vrin, 1940.

Ces multiples et vaines tentatives de démonstration du 5ème postulat, commencées dès l'antiquité grecque, ont abouties finalement au XIXème siècle à la naissance de la géométrie non-euclidienne. Il faut signaler également que Beltrami a démontré, en 1868, que ce postulat était indémontrable.[4]

Afin de mieux comprendre le travail de Khayyam sur ce sujet, nous devons étudier brièvement les travaux de ses prédécesseurs de l'antiquité au moyen âge islamique.

Aganis est le premier mathématicien grec qui a tenté de substituer au postulat d'Euclide un autre postulat. Celui-ci que les critiques contemporains ont identifié à Geminus – l'élève de Posidonius, mathématicien du 1er siècle avant J.C – définit les droites parallèles comme étant des droites équidistantes, alors que pour Euclide, les parallèles sont des droites qui ne se rencontrent d'aucun des deux côtés aussi loin qu'on les prolonge. Pour Aganis, la distance entre deux droites est la plus courte des droites qui les coupe et il démontre que cette dernière est la perpendiculaire commune.[5]

Après Aganis, c'est à Thabit ibn Qurra - mathématicien qui a vécu à Bagdad au IXème siècle après J.C. – que l'on doit un travail remarquable sur ce sujet. Dans son *Traité pour la démonstration du postulat d'Euclide*, il prouve par le mouvement, l'existence de rectangles de laquelle découle le 5ème postulat.[6]

Ibn al-Haytham (965-1040), grand mathématicien musulman entreprend une démarche analogue dans *Le livre du commentaires des propositions non démontrées du Livre d'Euclide*. Il explique que par le mouvement d'un segment PS se déplaçant perpendiculairement à la droite L_1, S étant sur L_1, l'autre extrémité P décrit une droite L_2 parallèle à L_1, qui de plus, est équidistante de L_1. La construction

---

4. E. Beltrami, *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea*, Napoli, Torino e Firenz, 1868. Cette œuvre a été traduite en français par J. Hoüel : E. Beltrami, « Essai d'interprétation de la géométrie non euclidienne » *Ann. Sci. Norm.*, 1869. Voir également : J. Hoüel, « Sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le postulatum d'Euclide », *Nouve. Ann. Math.* 9(1870) pp. 93-96.

5. Pour une étude supplémentaire, voir K. Jaouiche, *La théorie des parallèles en pays d'islam*, Paris 1986, pp. 31-35.

6. Voir également K. Jaouiche, *La théorie des parallèles en pays d'islam*, pp. 45-56.

aucunement aux autres postulats, mais également il se manifeste comme un théorème :

- « *Si* une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieures du même côté plus petits que deux droits,
- *alors* les deux droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits. »

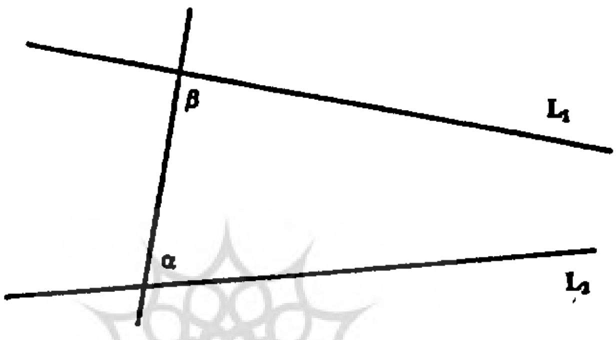


Figure 1 $\hat{\alpha}+\hat{\beta}<180° \Rightarrow L_1 \cap L_2$

Une telle proposition paraît donc démontrable compte tenu des autres postulats, définitions et axiomes proposés par Euclide. D'autre part il engage l'infini car si la sommes α et β dans la figure 1est égale à 180° alors les droites L_1 et L_2 ne se rencontreront jamais, autrement dit, les droites L_1, L_2 sont parallèles. Mais Euclide craignait selon toute vraisemblance d'affirmer qu'il pourrait exister des droites *infinies* qui ne se rencontreraient jamais. L'expérience ne plaidait certainement pas en faveur de lignes droites infinies, alors que les postulats étaient pourtant supposés être des vérités évidentes concernant le monde physique ».[3] C'est pour toutes ces raisons que depuis l'antiquité grecque les mathématiciens s'efforcèrent de débarrasser la géométrie de ce postulat gênant et de le démontrer à partir des quatre premiers postulats. Certains ont prétendu avoir réussi, mais tous utilisaient de façon implicite l'équivalent du postulat qu'ils tentaient de démontrer.

[3]. Morris Kline, *Mathématiques, la fin de la certitude*, traduit de l'anglais par Jean-Pierre Chrétien-Goni et Christian Lazzeri, Paris 1989, p. 146.

L'axiome est une proposition qui est évidente par elle-même. Par exemple : Le tout est plus grand que la partie. Une telles proposition est indémontrable.

Le postulat est une proposition qui n'est pas aussi évidente que l'axiome, pourtant il est demandé de l'admettre sans discussion.

C'est ainsi qu'Euclide demande à ses interlocuteurs d'accepter les cinq postulats suivants sans pouvoir les justifier autrement que par une sorte d'appel à l'intuition :

1. Conduire une droit d'un point quelconque à un point quelconque.
2. Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droit finie.
3. D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence.
4. Tous les angles droits sont égaux enter eux.
5. Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieures du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.

Il faut remarquer que contrairement à l'axiomatique moderne, dans l'axiomatique euclidien, il y a toujours une relation avec les objets réels. De là vient d'ailleurs l'importance de l'intuition chez Euclide. Elle s'y présente comme une appréhension simple, c'est-à-dire directe et sans concept d'un objet ou comme la validité d'une proposition. Elle s'oppose ainsi à une connaissance discursive. En voici un exemple : « Une droite pénètre dans un cercle en un point A. Quelqu'un hésitera-t-il à affirmer que cette droit ira couper le cercle en un autre point B ? Cette proposition est susceptible d'être démontrée ; mais la certitude qui s'y attache n'est pas le fait de la démonstration. Pour que la certitude soit entière, il n'est pas nécessaire que la démonstration ait été faite. La connaissance, dans ce cas, précède le raisonnement, certitude antérieure à toute preuve, telle est la certitude qu'engendre la connaissance intuitive. »[2]

Même si l'intuition aide les interlocuteurs de la géométrie euclidienne à accepter sans discussion les postulats d'Euclide, le cinquième postulat ne les convainc pas. Car d'une part il ne ressemble

---

[2]. Ferdinand Gonseth, *La géométrie et le problème de l'espace*, Tome II, Neuchâtel, 1946, p. 76.

II-2- La démarche axiomatique

La démarches axiomatique de la géométrie euclidienne est en réalité une véritable méthode scientifique qui fait découvrir l'inconnu à partir des connus par une déduction logique. Euclide s'est inspiré pour cette méthode de l'*Organon* d'Aristote. En effet, Aristote dans son fameux *Organon* a mis en place une démonstration déductive afin de réfuter scientifiquement les discours des sophistes. Cette condition se trouve également dans la théorie déductive euclidienne où « les termes propres à la théorie n'y sont jamais introduits sans être définis ; les propositions n'y sont jamais avancées sans être démontrées, à l'exception d'un petit nombre d'entre elles qui sont énoncées d'abord à titre de principe : la démonstration ne peut en effet remonter à l'infini et doit bien reposer sur quelques propositions premières, mais on a pris soin de les choisir telles qu'aucun doute ne subsiste à leur égard dans un esprit sain. Bien que tous ce qu'on affirme soit empiriquement vrai ; l'expérience n'est pas invoquée comme justification : le géomètre ne procède que par voie démonstrative, il ne fonde ses preuves que sur ce qui a été antérieurement établi en se conformant aux seules lois de la logique. »[1]

Nous trouvons donc dans la démonstration euclidienne d'une part des propositions première ou des **principes fondamentaux** et d'autre part des **théorèmes**.

Les théorèmes sont les propriétés que l'on démontre suivant les règles logiques et en utilisant d'autres propriétés ou les principes fondamentaux.

Les principes fondamentaux se divisent en trois parties : *les définitions, les axiomes et les postulats*.

La ***définition euclidienne*** est une proposition qui désigne une chose, ayant pour objet de diriger l'esprit vers la notion dont il s'agit. Par exemple, Euclide définie les lignes parallèles comme étant deux droites situées dans un même plan et qui lorsqu'elles sont prolongées indéfiniment, dans les deux directions, ne se rencontrent dans aucune de ces directions. Une définition ne garantit pas nécessairement l'existence de l'objet.

---

[1]. Robert Blanché, *L'axiomatique*, Paris, 1965, p. 1.

I-1- Les figures géométriques

On ne peut pas parler des figures géométriques, sans évoquer l'espace dans laquelle se trouvent celles-ci. L'espace, dans cette géométrie, où tous les objets occupent leurs places et exécutent leur mouvement, paraît être continu et infini, car il est impossible de concevoir une borne qui puisse l'interrompre ou s'opposer à son extension indéfinie. Son existence est non seulement indépendante de la matière, mais elle est encore plus nécessaire que celle de la matière.

En faisant l'abstraction de toute la matière qu'il contient, l'espace deviendra vide et par conséquent, homogène. Il pourra alors être divisé par la pensée en portions limitées ou non limitées de diverses formes, que l'on appelle corps géométriques. Leurs limites mutuelles sont appelées « surfaces géométriques ». Les « surfaces » à leur tour peuvent être divisées momentanément en différentes portions fermées ou ouvertes, par « les lignées géométriques ». Enfin, l'on peut diviser les lignes en plusieurs segments par des « points géométriques ». Un « point géométrique » est indivisible, étant censé n'avoir aucune étendue ; une ligne ne s'étend qu'en longueur qui constitue son unique dimension. Une surface s'étend, non seulement le long d'une ligne qui s'y trouve, mais encore, transversalement à cette ligne et l'on dit qu'elle a deux dimensions – longueur et largeur. Enfin, un corps s'étend comme une surface qu'il contient et en outre transversalement à cette surface. Et l'on dit qu'il a trois dimensions – longueur, largeur et épaisseur, de même que l'espace entier, dont il fait partie.

Ainsi il y a trois espèces différentes d'étendues – lignes, surfaces et corps, dont chacune peut être considérée indépendamment des autres. On peut également imaginer des points indépendamment des lignes. On appelle figure géométrique un ensemble quelconque que l'ont peut imaginer et représenter, de points, de lignes et de surfaces. Ces figures étant de pures créations de notre esprit dont l'image ne se rencontre pas toujours dans la nature, il est nécessaire qu'on puisse les imaginer et représenter graphiquement, car autrement elles ne sauraient exister dans l'espace réel et ne seraient pas des figures géométriques.

Omar Khayyam et les géométries non-euclidiennes

Jafar Aghayani-Chavoshi
Epistémologue et historien des sciences
Université Technologique de Sharif, Téhéran, Iran

Introduction

Il est indéniable que l'œuvre de G. Saccheri, le géomètre italien du 18ème siècle, a joué un rôle décisif dans la genèse des géométries non-euclidiennes. En effet, celui-ci a effectué les premiers travaux importants en géométrie non-euclidienne, bien qu'il ne les ait pas envisagés en tant que tels, mais plutôt comme une tentative de démontrer le postulat d'Euclide.

Des recherches récentes montrent que Saccheri aurait cependant pu s'inspirer du travail d'Omar Khayyam. Dans cet article, après avoir étudié le traité de Khayyam, sur la théorie des parallèles, nous montrons l'impact de celui-ci sur les recherches postérieure, recherches qui aboutissent, au 19ème siècle, à la découverte des géométries non-euclidiennes.

I- La Géométrie Euclidienne

Deux pièces essentielles apparaissent dans le mécanisme de la géométrie euclidienne : les figures géométriques, la démarches axiomatique.

***Farhang*, Vol. 18, no. 53-54 pp. 57-97**