

حکیم عمر خیام نظریه پرداز معادلات درجه سوم*

جعفر آقایی چاوشی

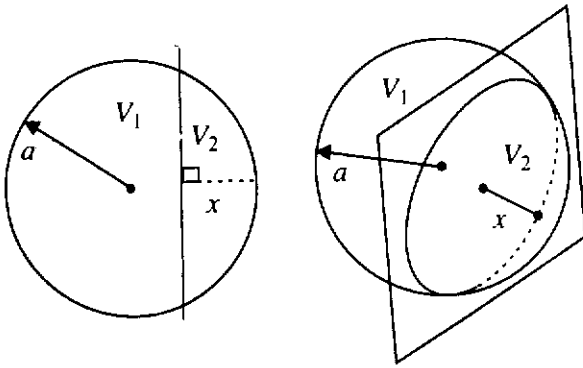
پژوهشگر تاریخ و فلسفه ریاضیات

و عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی شریف

نظریه معادلات درجه سوم حکیم عمر خیام از اهمیت ویژه‌ای در تاریخ ریاضیات برخوردار است. خیام با این نظریه، مشکلی را حل کرد که سالیانی دراز لاینحل مانده بود. برای درک درست نظریه مبتکرانه خیام، باید نخست عناصر تاریخی مرتبط با آن مطالعه شود. نظریه خیام از نظر تاریخی با مسأله معروف ارشمیدس پیوستگی دارد. این مسأله که در شکل چهارم از مقاله دوم کتاب کره و استوانه این دانشمند یونانی آمده چنین است: «کره‌ای مفروض را بوسیله صفحه‌ای چنان قطع کنید که نسبت حجمهای دو قطعه حاصل مساوی مقدار مفروضی باشد.»

ارشمیدس این مسأله را به ساختمان هندسی زیر منجر می‌کند: «قطعه خط \overline{DZ} و نقاط B و T بر آن مفروض است B بین D و T می‌باشد، نقطه‌ای مانند X را بر \overline{DZ} چنان تعیین کنید که: $\frac{XZ}{ZT} = \frac{BD}{DX}$ باشد.» گرچه ارشمیدس وعده داده بود که راه حل این ساختمان هندسی را در آخرین بخش از کتاب کره و استوانه خود ارائه دهد، ولی چنین ترسیمی در این کتاب یافت نمی‌شود. گویا از همان دوران باستان، این ترسیم ارشمیدس مفقود گردیده است.

با این حال اطوقیوس عسقلانی ریاضیدان یونانی عهد باستان و یکی از شارحان آثار ارشمیدس، * این مقاله ترجمه فارسی سخنرانی نویسنده است که در کنفرانس جهانی تاریخ ریاضیات قدیم در شهر دلفی یونان در ۲۰ اوت ۲۰۰۰ به زبان فرانسه ایراد کرده است.



شکل ۱

مدعی است که راه حل وی را ضمن یک نسخه خطی کهن یافته و محتوای آن را مدون کرده است. این اثر یکی از جالبترین کارهای تاریخی است که یک هندسه‌دان یونانی انجام داده است.^۱ علاوه بر این راه حل، مسأله فوق را دیگر هندسه‌دانان یونانی با روشهای گوناگون حل کرده‌اند. در عصر زرین تمدن اسلامی، هنگامی که علوم یونانی به عالم اسلام انتقال یافت، این مسأله از نو مورد تحقیق قرار گرفت. ماهانی ریاضیدان بزرگ ایرانی در قرن چهارم هجری برای اولین بار این مسأله هندسی را به صورت یک معادله جبری درجه سوم به صورت زیر درآورد:

$$x^3 + c = ax^2$$

اثری که ماهانی در آن به حل مسأله ارشمیدس پرداخته به دست ما نرسیده است، اما به آسانی می‌توان دریافت که چگونه او به این معادله رسیده است.

در واقع همانطور که در شکل ۱ مشاهده می‌کنیم، هرگاه کراهی به شعاع a را با صفحه‌ای به دو قطعه V_1 و V_2 تقسیم نماییم و فرض کنیم که X ارتفاع V_2 باشد مسأله به صورت $\frac{V_1}{V_2} = \frac{m}{n}$ درمی‌آید که در آن m و n اعداد صحیح هستند.

$$V_2 = \pi x^2 \left(a - \frac{1}{2}x \right) \quad \text{چنین است:}$$

۱. درباره این اثر رجوع شود به:

حکیم عمر خیام نظریه پرداز معادلات درجه سوم ۳

در نتیجه حجم قطعه V_1 چنین خواهد شد: $V_1 = \frac{2}{3}\pi a^2 - \pi x^2(a - \frac{1}{3}x)$ بنابراین باید داشته باشیم:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{m}{n} = \frac{2a^2 - 3ax^2 + x^3}{3ax^2 - x^3} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{2a^2 - 3ax^2 + x^3}{x^2(3a - x)} = \frac{m}{n}$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 3ax^2 + x^3 = \frac{m}{n}x^2(3a - x)$$

$$2a^2 - x^2(3a - x) = \frac{m}{n}x^2(3a - x) \Rightarrow 2a^2 = x^2(3a - x)\left(\frac{m}{n} + 1\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2a^2}{x^2} = \frac{(m+n)(3a-x)}{na}$$

از گسترش و ساده کردن رابطه اخیر معادله ماهانی به دست می آید. گرچه ماهانی موفق به حل این معادله نگردید، ولی با تبدیل یک مسأله هندسی به یک مسأله جبری تحولی در علم ریاضیات ایجاد کرد. این پیشرفت علمی به همین جا خاتمه نیافت، زیرا ابوجعفر خازن ریاضیدان دیگر ایرانی و معاصر ماهانی سرانجام توانست معادله ماهانی را با توسل به مقاطع مخروطی حل کند و مباحث تازه به نام معادلات درجه سوم در ریاضیات بگشاید. از آن پس ریاضیدانان اسلامی تقسیم معینی از یک قطعه خط را رها کرده و تمام کوشش خود را روی معادلات درجه سوم معطوف کردند. با این حال نه ابوجعفر خازن و نه هیچیک از ریاضیدانانی که روی این موضوع کار کردند، نتوانستند نظریه ای علمی از معادلات درجه سوم ارائه دهند. این نظریه را نخستین بار حکیم عمر خیام ریاضیدان و فیلسوف بزرگ ایرانی عرضه کرد. نظریه خیام که این مقاله به بررسی آن اختصاص یافته، در رساله بسیار مهم الجبر و المقابله او آمده است. خیام رساله خود را به ترتیب زیر تدوین کرده است:

۱. مقدمه

۲. معادله های خطی و معادله های درجه دوم

۳. معادله های درجه سوم

۴. معادله های کسری

۵. ضمیمه ای که به نقد کارهای ابوالجود در حل معادلات درجه سوم اختصاص دارد و خیام

آن را چند سال پس از به پایان رساندن متن اصلی رساله خود، یافته است.

مقدمه شامل تعریفی است که در آن علم جبر به عنوان علم معادلات جبری معرفی گردیده

است. طبق تعریف خیام «فن جبر و مقابله فنی است علمی، که موضوع آن عدد مطلق و مقادیری

قابل سنجش است، از آن جهت که مجهول اند ولی مرتبط با چیز معلومی هستند که بوسیله آن

می‌توان آنها را استخراج کرد.^۲ عدد مطلق از نظر خیام عددی است طبیعی و مقادیر قابل سنجش همانا خطوط، سطوح و اجسام هندسی سه‌بعدی‌اند که بطور کلی می‌توان آنها را کمیت‌های پیوسته و ناپیوسته نامید.

خیام علاوه بر توضیح مقدماتی، نکاتی را نیز دربارهٔ درجهٔ معادلات ذکر می‌کند. مثلاً می‌گوید که مجهول معادلات بالاتر از درجهٔ سوم را باید بطور مجازی در نظر گرفت، چرا که به مقادیر حقیقی مربوط نمی‌شوند. همچنین به این نکته تصریح می‌کند که معادلات درجه سوم را که غیر قابل تحویل به معادلات درجه دوم هستند باید با مقاطع مخروطی حل کرد و حل عددی آنها یعنی یافتن ریشه‌ها بصورت رادیکال را ناشناخته می‌داند.^۳ خیام سپس طبقه‌بندی معادلات درجهٔ سوم و حل هندسی آنها را مطرح می‌کند. پس از بحث مفصلی دربارهٔ معادلات درجهٔ سوم، دربارهٔ معادلات کسری، که مجهول آنها قسمتی از چیزی و یا بخشی از مربعی و غیره باشد، به اختصار سخن می‌گوید. مانند:

$$\frac{1}{x^2} + 3\frac{1}{x^2} + 5\frac{1}{x} = 3\frac{3}{8} \quad x \neq 0$$

خیام با انتخاب تغییر متغیر $z = \frac{1}{x}$ آنها را به معادلاتی که قبلاً بررسی کرده منجر می‌کند. وی تأکید می‌کند روشی برای حل معادلاتی مانند $z + \frac{1}{z} = 2 + 2\frac{1}{z}$ وجود ندارد. خیام با چنین بیانی کشفیات خود را در این مورد پایان می‌دهد.

نظریهٔ معادلات درجهٔ سوم

یک نظریه، هنگامی صورت علمی به خود می‌گیرد که یک فرآیند یا قانونی را در حالت کلی آن مطرح کند. علاوه بر آن باید با یکی از علوم حقیقی اثبات شود تا صورت یک علم حقیقی را به خود بگیرد. تمام این خصوصیات را در نظریهٔ معادلات درجهٔ سوم خیام می‌توان مشاهده کرد.

ارائه شکل کلی برای معادلات درجه سوم

از جنبه‌های عمومی بودن نظریهٔ خیام، این است که تمام معادلات درجهٔ سوم را به صورت کلی خود مطرح می‌کند. معادلات ارائه شدهٔ خیام به قرار زیرند:

۲. خیام، جبر و مقابله، ترجمهٔ غلامحسین مصاحب در کتاب حکیم عمر خیام به‌عنوان عالم جبر، تهران، ۱۳۳۹ ش، ص ۲۴۱.

۳. چهار قرن پس از خیام دو ریاضیدان ایتالیایی کردان و تارتاگلیا روش یافتن ریشه‌های معادلات درجهٔ سوم از طریق جبری را کشف کردند.

حکیم عمر خیام نظریه پرداز معادلات درجه سوم ۵

۱. $x^2 = c$

۲. $x^2 + bx = c$

۳. $x^2 + c = bx$

۴. $x^2 = bx + c$

۵. $x^2 + ax^2 = c$

۶. $x^2 + ax^2 = c$

۷. $x^2 + c = ax^2$

۸. $x^2 = ax^2 + c$

۹. $x^2 + ax^2 + bx = c$

۱۰. $x^2 = ax^2 + c + bx$

۱۱. $x^2 = ax^2 + bx + c$

۱۲. $x^2 + bx + c = ax^2$

۱۳. $x^2 + ax^2 = bx + c$

۱۴. $x^2 + bx = ax^2 + c$

۱۵. $x^2 + c = ax^2 + bx$

خیام بدین نحو همه معادلات درجه سوم را به ۱۵ نوع می‌رساند. معادلاتی که دارای ریشه‌های مثبت نیستند مورد توجه خیام قرار نگرفته‌اند، مثلاً معادله $x^2 + ax^2 + c = 0$ را در طبقه‌بندی خیام نمی‌بینیم. البته در ریاضیات امروزی، می‌توان معادلات (۲) و (۳) و (۴) را به صورت: $x^2 + Bx + C = 0$ و معادلات (۵) و (۶) و (۷) را به صورت $x^2 + Ax^2 + C = 0$ و معادلات (۸) تا (۱۵) را به شکل $x^2 + Ax^2 + Bx + C = 0$ نمایش داد.

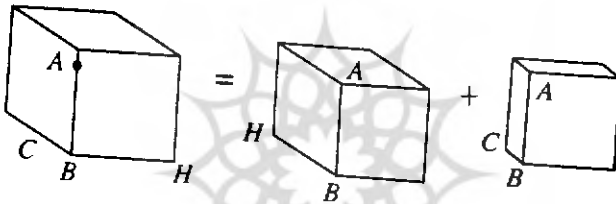
مسئله متجانس سازی

در ریاضیات جدید، ما با معادلات کاملاً عددی سروکار داریم و برای همین است که با مسئله «متجانس سازی» مواجه نمی‌شویم؛ اما خیام با کمیت‌های هندسی، که بعد آنها معلوم است سروکار داشت. بدیهی است که نمی‌توان یک قطعه خط را با یک سطح که دو بعد دارد، یا یک سطح را با یک حجم که سه بعد دارد، جمع کرد. کمیت‌ها در یک معادله باید قابل مقایسه یعنی متجانس باشند.

برای رهایی از این بن‌بست منطقی خیام واحد اندازه‌گیری خود را ارائه می‌کند. برای مثال هنگامی که از تساوی یک عدد با یک سطح صحبت می‌کند، منظورش از عدد مستطیلی است که

یک ضلع آن مساوی واحد و عدد مزبور، ضلع دیگر این مستطیل باشد. مثلاً برای معادله $x^2 = 3$ مطابق آنچه گفتیم چنین نوشته می‌شود: $x^2 = 1 \times 3$. خیام قبل از حل هر یک از معادلات درجه سوم آنها را متجانس می‌کند؛ مثلاً معادله $x^2 = bx + c$ را به صورت: $x^2 = p^2x + q^2p$ درمی‌آورد. برای فهم دقیق متجانس‌سازی، فرض می‌کنیم قطعه خط $BH = x$ مجهول معادله $x^2 = bx + c$ باشد. نیز فرض می‌کنیم $AB = \sqrt{b}$ باشد. خط BC را بر AB به صورتی عمود می‌کنیم که داشته باشیم $BC = \frac{c}{b}$. آنگاه مکعب مستطیلی را به سطح $AB \cdot AB$ و به بعد BC می‌سازیم. حجم این جسم برابر c است (شکل ۲). بنابراین خواهیم داشت:

$$\overline{BH}^3 = \overline{AB}^2 \cdot \overline{HB} + \overline{AB}^2 \cdot \overline{BC}$$



شکل ۲

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی

رتال جامع علوم انسانی

$$\overline{B}^3 = b\overline{HB} + c$$

یا

حل هندسی معادلات درجه سوم

خیام معادلات درجه سوم را از طریق تقاطع مقاطع مخروطی حل می‌کند. در انتخاب خود از مقاطع مخروطی برای ۱۵ نوع معادله درجه سوم، خیام روش دقیقی را بکار می‌برد.

فرانتس وپکه روابط زیر را عرضه کرد تا نشان دهد که خیام چگونه از مقاطع مخروطی برای هر یک از معادلات خود استفاده کرده است.

هرگاه p, q, r, s و t نمایش‌دهنده سه مقدار $-1, 1$ یا صفر باشند. در این صورت مقاطع

حکیم عمر خیام نظریه پرداز معادلات درجه سوم ۷

مخروطی مورد نیاز خیام برای حل معادلات درجه سوم از سه دستگاه زیر بدست می آید:

$$I. \begin{cases} x^2 - \sqrt{b}y = 0 & \text{سهمی} \\ y^2 + px^2 + q\frac{a}{b}x = 0 & \begin{cases} p = 0 & \text{سهمی} \\ p = +1 & \text{دایره} \\ p = -1 & \text{هذلولی} \end{cases} \end{cases}$$

این دستگاه برای حل معادلات درجه سوم $x^2 + pbx + qa = 0$ که صورت کلی معادلات (۲) و (۳) و (۴) خیام است، بکار گرفته می شود.

$$II. \begin{cases} yx - \sqrt{cm} = 0 & \text{هذلولی} \\ y^2 + pmx + qm = 0 & \text{سهمی} \end{cases}$$

این دستگاه برای حل معادله $x^2 + pqax^2 + pc = 0$ (صورت کلی معادلات (۵) و (۶) و (۷) خیام) بکار گرفته می شود که در آن m می تواند برابر یا مساوی \sqrt{a} یا p باشد.

$$III. \begin{cases} y^2 + px^2 + q\left(\frac{c}{b} \pm a\right)x + r\frac{ac}{b} = 0 & \begin{cases} p = +1 & \text{دایره} \\ p = -1 & \text{هذلولی} \end{cases} \\ yx + s\sqrt{bx} + t\frac{a}{\sqrt{b}} = 0 & \text{هذلولی} \end{cases}$$

این دستگاه برای حل معادله $x^2 + p\left(b + p\frac{ac}{b}\right)x^2 + 2pstcx + p\frac{c^2}{b} = 0$ بکار می رود. پس از بخش کردن آن بر $\frac{c}{b}$ به معادله درجه سوم $x^2 + uax^2 + vbx + wc = 0$ (صورت کلی معادلات (۸) تا (۱۵) خیام) می رسیم که در آن v, u, w برابر ± 1 هستند.

مثلاً برای حل معادله $x^2 = bx + c$ دستگاه I ما را به هذلولی $y^2 = x^2 + \frac{c}{b}x$ و سهمی $y = \frac{x^2}{\sqrt{b}}$ راهنمایی می کند.

خیام سهمی EBD به رأس B و به محور AB و نیز هذلولی EBG به رأس B و محور BC را با استفاده از کتاب مخروطات آپولونیوس رسم می کند. با توجه به شکل ۳ این دو منحنی یکدیگر را در نقطه E قطع می کنند و $BH = x$ جواب مسأله است. روشن است که خیام جواب منفی معادله را نمی دهد.

یا

$$\frac{CH}{BI} = \frac{BI}{BH} \quad (۲)$$

از مقایسه دو رابطه (۱) و (۲) خواهیم داشت:

$$\frac{HB}{AB} = \frac{BI}{BH} = \frac{CH}{BI}$$

که از آن دو رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$AB \cdot BI = \overline{HB}^2 \quad (۳)$$

$$AB \cdot CH = HB \cdot BI \quad (۴)$$

از ضرب طرفین دو رابطه خواهیم داشت:

$$\overline{HB}^2 = \overline{AB}^2 \cdot \overline{CH}$$

از طرف دیگر:

$$CH = HB + BC$$

پس:

$$\overline{HB}^2 = \overline{AB}^2 \cdot \overline{HB} + \overline{AB}^2 \cdot \overline{BC} \Rightarrow \overline{HB}^2 = bHB + c$$

بنابراین HB جواب مسأله است و در نتیجه درستی راه حل روشن می‌شود.

بحث در وجود ریشه‌های معادلات درجه سوم

خیام پس از حل هر یک از معادلات درجه سوم در عده جوابها یعنی در تعداد نقاط تقاطع، مقاطع مخروطی بحث کرده است. نتایج این بحث صرف نظر از دو خطا، همگی درست است. نخستین خطای وی هنگام بحث درباره ریشه‌های معادله $ax^2 + bx = c$ رخ داده است. می‌دانیم

که این معادله به ازای $\frac{c}{b} < a$ دارای سه ریشه مثبت است! اما بحث خیام درباره این معادله کامل نیست. به همین دلیل است که تنها یک ریشه مثبت را بدست می آورد. اشتباه خیام واقعاً تأسف بار است، زیرا او به خوبی می دانسته که یک معادله درجه دوم حداکثر دو ریشه مثبت دارد، پس هرگاه معادله درجه سوم را کشف می کرد که دارای سه ریشه مثبت باشد، قطعاً به کشف رابطه میان درجه معادلات و تعداد ریشه نائل می آمد.

خطای دوم خیام به هنگام حل و بحث در ریشه های معادله $x^2 + c = ax^2 + bx$ رخ داده است. خیام متوجه دومین ریشه مثبت این معادله نگردیده است. این اشتباه از اینجا ناشی می شود که او به هنگام حل معادلات تنها به ترسیم قسمتی از قطع های مخروطی اکتفا کرده است. یعنی به جای ترسیم دایره، سهمی و هذلولی، به ترتیب نیم دایره، نصف سهمی و شاخه ای از هذلولی را رسم می کند. همین عادت تأسف بار او را، از شناخت ریشه های منفی معادلات محروم کرده است. خیام به بحث در عده جوابهای معادله برحسب ضرایب آن نمی پردازد مگر در مورد معادلات $x^2 + c = ax^2$ و $x^2 + bx + c = ax^2$.

نظریه خیام در ریاضیات امروزی

از نظریه خیام تنها «روش حل معادلات درجه سوم به کمک مقاطع مخروطی»، در ریاضیات امروزی به جا مانده است، اما همانطور که قبلاً نیز اشاره شد، خیام در روش خود از هندسه ترکیبی قدما استفاده می کند. حال آنکه هندسه تحلیلی در ریاضیات امروزی به ما امکان می دهد که همان نتایج خیام را آسانتر به دست آوریم. به عبارت دیگر به کمک این هندسه ما می توانیم همه معادلات درجه سوم را تنها به کمک یک دایره و یک سهمی حل کنیم. در واقع برای حل معادله $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ پس از ضرب آن در x خواهیم داشت: $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx = 0$ با استفاده از تغییر متغیر $z = x - \frac{a}{3}$ توان سوم مجهول حذف می شود و معادله زیر به دست می آید:

$$z^3 + pz^2 + qz + r = 0 \quad (1)$$

فرض می کنیم:

$$z^2 = y \quad (2)$$

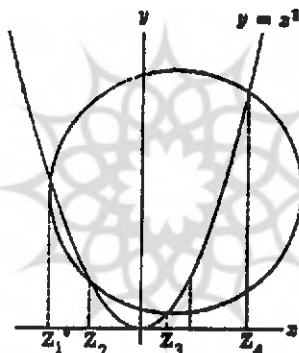
از آنجا خواهیم داشت:

$$y^2 + py + qz + r = 0 \quad (3)$$

از جمع روابط (۲) و (۳) خواهیم داشت:

$$z^2 + y^2 + (p-1)y + qz + r = 0 \quad (4)$$

رابطه (۴) معادله دایره‌ای است به مرکز $(z_0 = -\frac{q}{2}, y_0 = -\frac{p-1}{2})$ و شعاع $R = \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + (p-1)^2} - 4r$. از تقاطع این دایره و سهمی (۲) ریشه‌های معادله (۱) به دست می‌آید (شکل ۴).



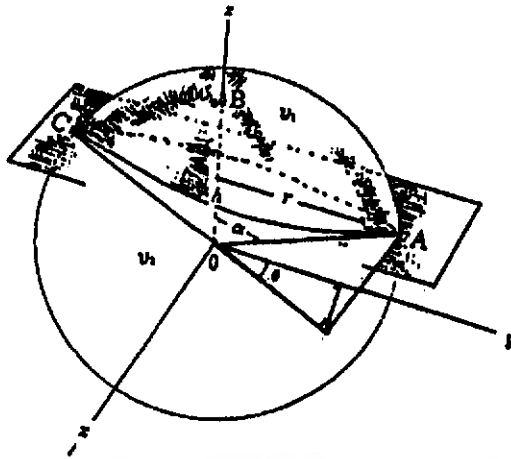
شکل ۴

حل مسئله ارشمیدس با روش خیام

پیش از این، روش خیام را برای حل معادله درجه سوم با استفاده از ریاضیات جدید تشریح کردیم. اکنون این روش را برای حل مسئله ارشمیدس بکار می‌بریم. این کار را آقای امیر معز انجام داده است^۴ که ما آن را با جزئیات تمام در ادامه می‌آوریم.

فرض می‌کنیم کره‌ای به معادله $\rho = a$ توسط صفحه $z = h$ به دو بخش V_1 و V_2 تقسیم گردیده به طوری که $\frac{V_1}{V_2} = k$. برای تعیین حجمهای V_1 و V_2 نخست حجم بخشی از این کره را

4. Amir Moez, A. R., "Khayyam, al-Biruni, Gauss, Archimedes and Quadratic Equations", *The Texas Journal of Science*, 1994, Vol. 46 (No. 3), pp. 255-257.



شکل ۵

که در مخروطی به معادله $\varphi = \alpha$ محدود گردیده است، حساب می‌کنیم. حجم این قطعه از کره را که در شکل ۵ با OABC نمایش می‌دهیم، V می‌نامیم. پس خواهیم داشت:

$$V = \iiint f(x, y, z) dx dy dz$$

تغییر متغیری در دستگاه مختصات کروی به ما امکان می‌دهد تا این انتگرال سه‌گانه را به آسانی محاسبه نماییم.

نگاشت λ را در نظر می‌گیریم به طوری که هر یک از مختصات (x, y, z) از دستگاه مختصات قائم متناظر با هر یک از مختصات (ρ, θ, φ) از دستگاه مختصات کروی باشند یعنی:

$$\lambda : \begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \quad 0 \leq \rho \leq a, \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \alpha$$

حکیم عمر خیام نظریه پرداز معادلات درجه سوم ۶۳

این نگاشت از کلاس C^∞ در R^3 می باشد که ژاکوبین آن مساوی است با:

$$\Delta_\lambda(\rho, \varphi, \theta) = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & -\rho \sin \varphi \cos \theta & -\rho \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \varphi & 0 & -\rho \sin \varphi \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \varphi$$

بنابراین برای هر تابع پیوسته f خواهیم داشت:

$$V = \iiint f(x, y, z) dx dy dz = \iiint \Delta_\lambda(\rho, \varphi, \theta) d\rho d\varphi d\theta$$

بنابراین خواهیم داشت

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^\alpha \int_0^a [\rho^2 \sin \varphi] d\rho d\varphi d\theta = \int_0^\alpha \rho d\rho \int_0^\alpha \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} \theta d\theta$$

پس:

$$V = \left[\frac{\rho^3}{3} \right] [-\cos \varphi]_0^\alpha [\theta]_0^{2\pi} = \frac{a^3}{3} (1 - \cos \alpha) \times 2\pi$$

و بنابراین:

$$V = \frac{2\pi a^3}{3} (1 - \cos \alpha)$$

حال، برای تعیین حجم قطعه V_1 ، کافی است که حجم مخروط به معادله $\varphi = \alpha$ را از V کم کنیم. حجم این مخروط مساوی است با:

$$\frac{\pi r h^2}{3} = \frac{\pi a^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{3}$$

$$V_1 = \frac{2\pi a^3}{3} (1 - \cos \alpha) - \frac{\pi a^2}{3} \sin^2 \alpha \cos \alpha$$

$$V_1 = \frac{\pi}{3} a^2 (2 - 2 \cos \alpha - \sin^2 \alpha \cos \alpha)$$

$$V_2 = \frac{4}{3} \pi a^2 - \frac{\pi}{3} a^2 (2 - 2 \cos \alpha - \sin^2 \alpha \cos \alpha)$$

پس:

$$V_r = \frac{\pi}{3} a^r (2 + 2 \cos \alpha + \sin^2 \alpha \cos \alpha)$$

طبق مسأله ارشمیدس باید داشته باشیم:

$$\frac{V_1}{V_r} = k$$

$$\frac{(2 - 2 \cos \alpha - \sin^2 \alpha \cos \alpha)}{(2 + 2 \cos \alpha + \sin^2 \alpha \cos \alpha)} = k \quad \text{پس}$$

پس از ساده کردن، این رابطه به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$(1 + k) \cos \alpha \sin^2 \alpha + 2(1 + k) \cos \alpha + 2(k - 1) = 0$$

در این معادله هرگاه $x = \cos \alpha$ انتخاب شود، معادله فوق به صورت زیر درمی‌آید:

$$x^3 - 3x + \frac{2(1-k)}{1+k} = 0 \quad (1)$$

اگر $p = \frac{2(1-k)}{1+k}$ آنگاه خواهیم داشت:

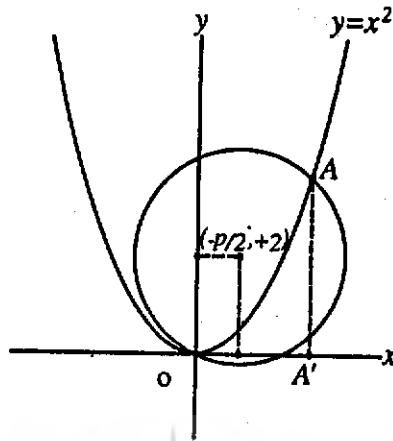
$$x^3 - 3x + p = 0 \quad (2)$$

با ضرب x در طرفین این معادله داریم:

$$x^4 - 3x^2 + px = 0 \quad (3)$$

در این معادله با فرض اینکه $y = x^2$ دستگاہ زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} y^2 - 3y + px = 0 \\ x^2 - y = 0 \end{cases}$$



شکل ۶

یا

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + y^2 - 4y + px = 0 \end{cases}$$

برای حل هندسی این دستگاه کافی است دایره $x^2 + y^2 - 4y + px = 0$ به مرکز $(-\frac{p}{2} + 2)$ را با سهمی $y = x^2$ تقاطع دهیم. این دو مقاطع مخروطی در نقطه A یکدیگر را قطع می‌کنند. همانطور که در شکل مشاهده می‌شود $OA = x$ ، جواب مسأله ما خواهد بود. این معادله همچنین دارای دو ریشه مختلط می‌باشد. البته ریشه $x = 0$ پارازیت است زیرا معادله اولیه ما درجه سوم است. پس از تعیین این ریشه‌ها مقدار ریشه‌های معادله اصلی را با استفاده از رابطه $z = x - \frac{p}{4}$ پیدا می‌کنیم.

نتیجه

همانطور که دیدیم مسأله معروف ارشمیدس، ریاضیدانان دوره اسلامی را به حل معادلات درجه سوم سوق داد. با این حال هیچیک از این ریاضیدانان نتوانستند یک نظریه علمی از این معادلات به دست دهند. این نظریه تنها در قرن ششم هجری بدست عمر خیام ریاضیدان عالی قدر ایرانی، (متوفی ۵۱۷ ق/ ۱۱۲۳ م) عرضه شد.

می‌توان خلاصه نظریه خیام را در عرضه صورت کلی همه معادلات درجه سوم، متجانس کردن آنها، حل هر یک از آنها با مقاطع مخروطی و بحث در عده جوابهای آنها دانست.

کتابشناسی

رسالة جبر و مقابله خیام را وپکه نخستین بار در سال ۱۸۵۱ م همراه با ترجمه فرانسه و شرحی عالمانه از آن در پاریس منتشر کرد:

Woepke, F., *L'algebr d'Omar Khayyam*, Paris, 1815.

رشدی راشد و احمد جبار برای دومین بار این رساله را به فرانسه ترجمه کردند که در سال ۱۹۸۱ م در دمشق به چاپ رسیده است:

Rashed, R., et Djebbar, A., *L'œuvre Algebrique d'al-khayyam*, university of Alepp, 1981.

چاپ سوم این رساله همراه با ترجمه فرانسوی آن در کتاب زیر آمده است:

Rashed, R., et Vahabzadeh, B., *Al-Khayyam Mathematicien*, Paris, 1999.

کازیر با استفاده از متن عربی چاپ وپکه رساله خیام را به زبان انگلیسی ترجمه کرده است:

Kasir, D. S., *The Algebra of Omar Khayyam*, New York, 1913.

ترجمه انگلیسی دیگری را وینتر و عرفات با استفاده از نسخه خطی موجود در کتابخانه ایندیا آفیس در سال ۱۹۵۰ م در هندوستان به چاپ رسانده‌اند:

Winter, H. J. J., et W. Arafat "The Algebra of Omar Khayyam", *Journal of the Royal Asiatic Society of Bengal*, vol. XVI (1950), n. 1, pp. 27-78.

ترجمه فارسی این رساله را شادروان دکتر غلامحسین مصاحب انجام داده و در سال ۱۳۱۷ ه ش در تهران به چاپ رسانید. ایشان در سال ۱۳۳۹ ه ش در کار پیشین تجدید نظر کرده و آن را تحت عنوان حاکم عمر خیام به عنوان عالم جبر چاپ نموده است.

ترجمه روسی این اثر خیام را دو محقق روس یوشکویچ و رزنفلد انجام داده‌اند که در سال ۱۹۶۱ م در مسکو به چاپ رسیده است. علاوه بر این ترجمه‌ها، مقالات متعددی درباره این رساله خیام نوشته شده که بعضی از آنها عبارت‌اند از:

Amir Moez, A. R., "Khayyam's Solution of cubic Equations", *Mathematics Magazine*, No 35 (1962), pp. 270-273.

Coolodge, J., *The Mathematics of Great Amateurs*, Oxford, 1950, Chapter II (Omar Khayyam), pp. 19-20.

Eves, H., "Omar Khayyam's Solution of Cubic Equations", *The Mathematics Teacher* LVI (April 1958), pp. 285-286.

Lumpkin, B., "A Mathematics Club Project from Omar Khayyam", *The Mathematics Teacher*, December 1978, pp. 740-743.

Risivi, V. A., "Umar Khayyam as a Geometrician, A Survey", *Islamic Studies*, vol. 24 N° 2 (1985), pp. 193-204.

Ballieu, M., "Les Rapports Entre l'Algèbre et la Géométrie Dans L'œuvre d'Omar Khayyam et Sharaf ad-Din al-Tusi (Cinq Siècles Avant Descartes et Newton)", *Mathématiques & Pédagogie*, n°91 (1993), p. 7-21.

Woepcke, F., "Notice Sur un Manuscrit Arabe d'un Traité d'Algèbre par Aboul Fath Omar Ben Ibrahim Alkhayami, contenant la Construction Géométrique des Equations Cubiques," *J. Für die Reine und Angew. Math.* 40 (1850), pp. 160-172.

Woepcke, F., "Les Constructions des Équations du Quatrième Degré Par les Géomètres Arabes", *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 8 (1863).

Yeschekevitch, A. P., *Les Mathématiques Arabes (VIII-XV Siècles)*, Traduction Française par K. Jaouich et M. Cazenay, Paris 1976, pp. 94-99.



شروېشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی