Maintenant que nous avons présenté tout ce que nous avons projeté <de dire> dans cette épître, il est temps d'achever cette épître, en glorifiant Dieu, le tout puissant.

Sache que nous avons mis dans cet ouvrage, et en particulier dans les deux dernières épîtres, des notions très précises; et, en fonction de ce but, notre propos a été exhaustif. Celui qui y réfléchira et qui l'assimilera puis qui entreprendra de comprendre ce qui se construit sur ces prémisses, connaîtra la Géométrie d'une manière véritable et selon <les exigences de> l'art. S'il s'est assuré <la connaissance> de ses fondements à partir de la Philosophie première, il la connaîtra selon la raison.

que Dieu soit loué en toute circonstance et que la prière soit sur la meilleure de ses créatures, Muḥammad, et sur les membres de sa famille, bons et purs.

Dieu nous est suffisant et il est <notre> excellent soutien.

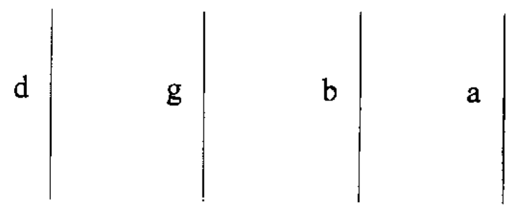
A la fin de cette épître, écrit de la main du Maître, du Guide ^{c}Omar Ibn Ibrāhīm al Khayyāmī, il y avait <ceci>: le noircissement de ces <pages> blanches a été achevé dans la ville de ... dans la bibliothèque <se trouvant> là, à la fin du Premier Jamādā de l'an quatre cent soixante-dix.

La <copie de> l'épître a été réalisée de la main de Mas^{c}ūd ibn Muḥammad ibn ^{c}Alī al-Jalfarī, le cinq Sha^{c}bān de l'an six cent quinze.

* * *

<Proposition 2>

De même, si on avait quate grandeurs homogènes quelconques, le rapport de la première à la quatrième est composé du rapport de la première à la seconde, du rapport de la seconde à troisième et du rapport de la troisième à la quatrième.



Example

Les quatre grandeurs *a, b, g, d,* sont homogènes; *a, b, g* étant trois grandeurs homogènes, le rapport de *a* à *g* est composé du rapport de *a* à *b* et du rapport de *b* à *g; a, g, d,* étant trois grandeurs <homogènes>, le rapport de *a* à *d* est composé du rapport de *a* à *g* et du rapport de *g* à *d.*

Le rapport de *a* à *d* est donc composé du rapport de *a* à *b*, du rapport de *b* à g et du rapport de *g* à *d.*

Et c'est ce que nous voulions démontrer.

Et il en est ainsi si les grandeurs sont <au nombre de> cinq ou six, <et ainsi de suite> jusqu'à l'infini.

<Corollaire>

Si trois grandeurs sont proportionnelles, le rapport de la première à la seconde est comme le rapport de la seconde à la troisième. <Or> le rapport de la première à la troisième est composé du rapport de la première à la seconde et du rapport de la seconde à la troisième. Le rapport de la première à la troisième est donc le rapport *multiplié*[39] de la première à la seconde, comme l'a postulé Euclide dans l'introduction au *Cinquième Livre.*

Et il en est ainsi pour quatre grandeurs proportionnelles successives, pour cinq, pour six, <et ce> jusqu'à l'infini.

(39 Ce terme est utilisé ici dans son sens originel ≪*d'augmenter une quantité par une autre*≫ et non dans son sens de ≪*produit arithmètique d'un nombre par un autre*≫.

abstraite de ces <choses> annexes, et en tant qu'elle est liée au nombre, pas <nécessairement> un nombre absolu véritable, car le rapport entre a et b est peut-être non numérique et il n'existerait pas alors deux nombres ayant leur rapport.

Les calculateurs, je veux dire les arpenteurs, disent souvent la moitié de *un*, son tiers et d'autres parties, alors que *un* ne se divise pas. Mais ils n'entendent pas par lui un *un* qui est absolu et véritable dont se composent les nombres véritables. Ils entendent plutôt, par lui, un *un* qui est supposé divisible. Puis, ils manipulent les grandeurs en fonction de cet un, qui est chez eux divisible, et en fonction des nombres qui en sont composés. Et ils disent souvent ≪*racine de cinq et racine de dix*≫, et de nombreuses autres choses, au cours de leurs discussions et dans le cadre de leurs travaux et de leurs arpentages. Mais, ils entendent par cela cinq composé d'unités divisibles, selon ce que nous avons indiqué. Il faut savoir que cet *un* là est celui qui est divisible.

On considère que la grandeur z, quelle qu'elle soit, contient un nombre, comme nous l'avons indiqué. Et lorsque nous disons ≪*n nous considérons le rapport de l'un à la grandeur z comme le rapport de a à b*≫, nous ne signifions pas par là que nous pouvons réaliser cette idée dans toutes les grandeurs, c'est à dire que nous pouvons faire ce que nous disons à l'aide d'un procédé pratique[38]. Nous voulons plutôt signifier par là que, pour l'esprit, cela n'est pas impossible; et notre incapacité à réaliser cela ne signifie pas que le problème est impossible dans son essence. Comprends cette idée.

Nous considérons le rapport de l'un à la grandeur d comme le rapport de a à g. Le rapport de a à g est donc comme le rapport de un à d. Et le rapport de e à un est comme le rapport de g à b, Dans le rapport à égalité de rang, le rapport de a à b est comme le rapport de e à d. Et le rapport de a à b est comme le rapport de un à z. Le rapport de e à d est comme le rapport de un à z.

Ce sont donc quatre grandeurs proportionnelles: le produit de un, qui est le troisième, par d, le second, est comme le produit de e, le premier, par z, le quatrième. Or, z est le rapport de b à, e est le rapport de g à b, et d est le rapport de g à a. Et le produit de un par toute chose est cette chose même, ni plus ni moins. Le produit du rapport de a à b par le rapport de b à g est donc comme le rapport de a à g. Et c'est ce que nous voulions démontrer.

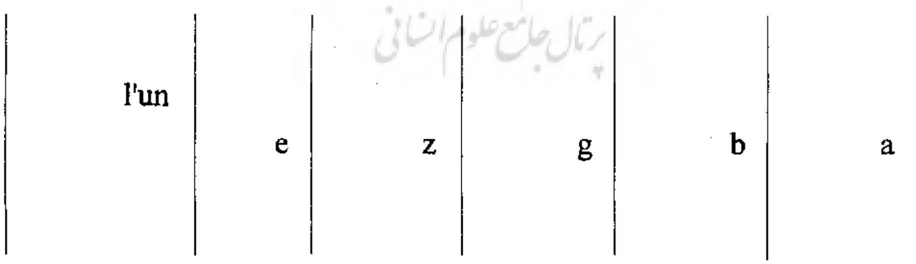
(38 Littéralement: "*règle de l'art*".

soin de quelque chose de Sciences mathématiques qui lui soit extérieur. Sauf qu'il aurait été nécessaire qu'il fasse précéder les <questions> géométriques par les <questions> numériques, comme elles le sont dans l'existence et dans l'esprit.Mais, les preuves arithmétiques sont plus difficiles à saisir que les preuves géométriques. Il a alors commencé par un certain nombre de preuves géométriques afin que l'apprenant s'excerce d'abord avant de s'occuper des preuves arithmétiques et ce afin que cela soit plus facile pour l'apprenant.

Après avoir évoqué ces notions dont certaines sont extérieures au but annoncé et visé dans cette étude, mais que nous avons évoquées pour qu'elles soient un complément dans la connaissance des fondements de ces notions, pour que cette épître englobe le maximum de ce qui y est nécessaire et pour donner envie à l'apprenant de rechercher la connaissance des fondements des arts, d'appréhender les fondements des sciences universelles et les fondements de l'existence, et de connaître ce qui doit exister nécessairement, ainsi que l'ensemble des états divins et le problème de la résurrection, nous commençons la démonstration de ce que nous avons dit:

<Proposition 1>

<*Etant données*> a, b, g, *trois grandeurs homogènes, je dis que le rapport de la grandeur* a *à la grandeur* g *est composé du rapport de la grandeur* a *à la grandeur* b *et du rapport de la grandeur* b *à la grandeur* g.



Preuve

Nous supposons <donné> l'*un* et nous considérons son rapport à la grandeur z comme le rapport de a à b. La grandeur z n'est pas appréhendée en tant qu'elle est une ligne, une surface, un solide ou un temps; elle est plutôt appréhendée en tant qu'ell est, dans l'esprit, passer, comme il pouvait se passer de la proposition que nous avons évoquée.[36]

Quant à la combinaison des rapports sur laquelle sont basées certaines parties de la Musique, elle est numérique; et Euclide en a parlé amplement dans le *Huitième Livre.*

Quant à la séparation des rapports évoquée en Musique, elle est, en réalité, après étude attentive, un type de combinaison; et la manière de la connaître est la même pour celui qui a un esprit pénétrant et une bonne intuition. Nous avons évoqué une partie de cette idée dans *L'Explication des difficultés du Livre de la musique*[37]

La Science du nombre n'a pas besoin de la Géométrie, et comment en aurait-elle <besoin> alors qu'elle précède la géométrie d'une manière essentielle et qu'il n'y a pas entre elles un rapport, si ce n'est que la géométrie a besoin du nombre; et comment en serait-il <autrement> alors que le triangle est ce qui est entouré par trois côtés? Serait-il possible à celui qui ne connaîtrait pas le concept de trois d'appréhender la notion de triangle? Trois est une partie du triangle, c'est sa cause et elle le précède par essence.

L'étude du nombre est différente de l'étude de la géométrie. Ce sont deux sciences qui ne sont pas l'une subordonnée à l'autre. Mais, la géométrie a besoin, dans les démonstrations de certaines de ses parties, de quelque chose du nombre, comme cela est indiqué dans le *Dixième Livre,* et ce au moment de mesurer les grandeurs, c'est à dire de connaître le rapport <existant> entre elles du point de vue du nombre, comme nous l'avons montré dans l'introduction à cette épître. Cela <consiste> à supposer une certaine grandeur <comme étant> *un*, et à mesurer par elle l'ensemble des grandeurs qui lui sont homogènes et ce en déterminant leurs valeurs du point de vue de leurs rapports à cet *un.*

Euclide, quant à lui, a confondu l'art du nombre et l'art de la Géométrie et ce pour deux raisons: l'une d'elles pour que son livre englobe le plus de règles mathématiques. Et tant mieux qu'il ait considéré cela. La seconde est qu'il avait besoin de la Science du nombre dans le *Dixième Livre,* et il ne voulait pas que les propositions de son ouvrage aient be-

(36 *Eléments. Livre VIII,* Proposition 5.

(37 Cet écrit semble différent de son épître intitulée *al-Qawl ʿalā l-ajnās allatībi l-arbaʿ* [Propos sur les genres contenues dans les quartes]. Sur ce dernier écrit, voir Ṣafūrā Hūshār & Muḥammad Bāqirī: Risālat mūsīqā Khyayyām az dīdkāh riyāḍiyyāt, *Rahbawayh Hnr,* **43**, Téhéran, 1997, pp. 42-53; Jaʿfar ĀghāyānīChavoshi: Omar Khayyām et la musique théorique, *Luqmān, XVI, 1, 1999-2000*, pp. 93-108.

s'entend du point de vue de l'adjonction à lui, soit en puissance soit en acte, des concepts du *nombre* et de l'*un.* Quant à savoir comment se fait cette adjonction et si cela a lieu ou non, selon une des manières que nous avons indiquées, cela ne nous concerne pas dans cette étude. Comprends le.

Euclide a eu besoin de la composition de rapports dans la *vingt-troisième proposition* du *Sixième Livre,* dans laquelle il a voulu démontrer que, ≪*<pour> deux parallélogrammes, équiangles quelconques, [le rapport de l'un à l'autre est composé des rapports de leurs côtés]*≫. Par composition, il entendait la *multiplication* de l'un des rapports par l'autre. Puis, dans son livre, il n'a pas eu besoin de cette proposition ni de cette autre qui dit que ≪*pour trois grandeurs proportionnelles quelconques, le rapport de la première à la troisième est <égal au> rapport doublé de la première à la deuxième*≫, sauf dans le rapport des côtés des surfaces semblables et <celui> des côtés des solides semblables, qui pouvaient aussi s'en passer.

Qu'est ce qui donc pu l'obliger à évoquer ces deux prémisses et à les postuler sans démonstration?

Quant à la composition des rapports dans le livre de Ptolémée connu sous le titre de *L'Almageste,* c'est une chose importante qui a de nombreuses utilisation et qui est d'une grande utilité; sauf que Ptolémée a également postulé cette prémisse sans démonstration, qu'il a construit sur elle la figure sécante et qu'il a construit la plus grande partie de l'Astronomie sur la figure sécante, en particulier ce qui concerne les états, les lois et les positions sur les trajectoires des planètes et sur le cercle méridien. Se dispenser de cela, c'est à dire de la composiotion de rapports, n'est donc pas peu de chose.

Il en est de même du *Livre des Coniques* d'Apollonius qui est une importante introduction à la plupart des sciences géométriques et en particulier à <celle des> solides.

D'une manière générale, les choses importantes et difficiles, en Astronomie et en Géométrie, sont basées sur la composition de rapports.

Quant à la composition de rapports qui est évoqué dans la science de la musique, c'est une composition autre que celle-ci. C'est plutôt la combinaison et la séparation, et le terme de composition leur est appliqué par convention et par association, non par pur accord.

Euclide a évoqué dans, le *Huitième Livre,* la composition de rapports <bien> connue et il l'a utilisée dans une proposition qui pouvait s'en *première à la deuxième*[33], *et il en est de même si c'étaient quatre grandeurs, cinq grandeurs et ainsi de suite*≫.[34]

Ceci est une proposition importante qu'il n'est permis de mettre comme prémisse à des questions importantes qu'à l'aide d'une démonstration géométrique satisfaisante.

Quant à ce cinq signifie trois cinquièmes de *un*; et cela, en supposant une grandeur *unité*,[35] c'est à dire en supposant une grandeur qu'on appellera *un* et à laquelle on rapportera les autres grandeurs.

Il est nécessaire que, dans toute <chose> mesurée, il y ait quelque chose qui soit supposé être *un*, le reste étant rapporté à lui par l'intermédiaire du nombre. Si le rapport de grandeurs n'était pas numérique, on rapporterait son carré au carré de l'*un*, ou le carré de son carré, ou le carré du carré de son carré, jusqu'à l'infini; ou bien, on laisserait ce rapport inconnu du point de vue de la mesure puisque alors il n'y aurait aboslument pas de moyen d'atteindre sa valeur en tant qu'elle est rapportée à cette unité supposée.

Je ne dis pas qu'il est nécessaire que le rapport de grandeurs soit mesuré pour qu'il soit connu. Je dis plutôt qu'il est nécessaire que tout rapport de grandeurs soit tel que l'on puisse supposer une grandeur de ce genre <égale à> *un*. Le rapport de cet *un* supposé à une autre grandeur connue serait <alors> égal à ce rapport supposé.

Cett <autre> grandeur n'est pas nécessairement inexistante parce qu'elle est inexistante de visu, <et ce> à cause de notre incapacité à truver un procédé à l'aide duquel on pourrait la déterminer.

Il arrive souvent que ce rapport soit inconnu du point de vue du nombre et connu du point de vue de la géométrie. Mais, il n'y a pas d'inconvénient pour nous après que nous nous soynon assurés que le rapport de grandeurs coïncide avec quelque chose de numérique ou <qui a> la puissance du nombre.

Quant à savoir si le rapport de grandeurs contient le nombre dans son essence ou accompagne le nombre, ou bien si le nombre lui est rattaché à l'extérieur de son essence, à cause d'autre chose, ou si le nombre lui est rattaché par une cause accompagnant son essence, sans la nécessité d'un jugement extérieur, cela est <du domaine> de l'étude philosophique et le géomètre n'a absolument pas à l'aborder.

Mais, on doit savoir qu'ici le propos sur la composition du rapport

---

(33 C'est à dire ≪*Le rapport de la première à la deuxième multiplié par lui-même*≫.

(34 *Les eléments*. Livre V, définitions 9 et 10.

(35 Littéralement: ≪*une grandeur-un*≫ [miqdār wāḥid].

Le Troisieme Chapitre
Sur La Composition Des Rapports Et Sa Realisation

Nous avons évoqué, au début du deuxièms chapitre, le vrai état du rapport quantitatif et sa signification, et nous avons dit <à cet endroit> là que le rapport est une relation entre des grandeurs en tant qu'elles sont des grandeurs attachées à autre chose, cette chose étant la mesure de la différence <existant> entre elles d'une manière connue et à laquelle ne s'associe pas une <grandeur> autre qu'elles. Et nous nous y sommes longuement étendus.

Nous poursuivons le propos sur la composition des rapports <en disant>: Euclide a dit ≪*Si on prend deux rapports et que l'on multiplie l'un par l'autre, on rèalise un certain rapport. Ce rapport est composè de ces deux rapports*≫, l'un des deux étant le *produit de* l'autre.[31]

Il a dit <aussi> dans l'introduction du *Cinquième Livre,* à la manière d'un postulat, sans démonstration ≪*Trois grandeurs homogènes quelconques <étant données>, le rapport de la première à la troisième est composé du rapport de la première à la seconde et du rapport de la seconde à la troisième*≫.[32]

Il a dit <aussi> ≪*Trois grandeurs proportionnelles <étant données>, le rapport de la première à la troisième est le rapport doublé de la*

(31 *Les Éléments, Livre VI, Définition 5: "Un rapport est dit* être composé à partir de rapports *quand les valeurs des rapports, étant multipliées entre elles, produisent quelque chose*". Cf. B. Vitrac: *Euclide, Les Éléments. Volum 2,* op. cit., p. 150.

(32 On ne trouve pas ce postulat dans la version Isḥābit des *Éléments.* Mais on le trouve dans une version arabe de l'Occident musulman (Ms. Escurial, n° 907, f. 46 a) et dans la rédaction des *Éléments* d'Ibn Sīn ā (A. I. Sabra & A. Lotfi (édit.): *al-Shifā', Uṣūl al-handasa,* Le Caire, Organisation Egyptienne Générale du Livre, 1977, p. 154).

selon la <*définition*> *véritable.* Et il en de même pour le plus petit. Et, inversement, tout rapport plus grand selonla <*définition*> *véritable*, est aussi plus grand, selon la <*définition*> *connue.* Et il en est de même pour le plus petit.

Tout ce qui reste <concernant> la composition, la séparation, la permutation, l'inversion, le rapport à égalité de rang, et les autres propriétés qu'a indiquées Euclide dans l'introduction du *Cinquième Livre* et dans le corps <du texte> -anisi que ce qui est lié à lui et qui se démontre par lui, sans avoir besoin d'un autre <livre> que lui-, tout cela fait partie des conséquences du *rapport véritable* et de celles de la *proportionnalité véritable.* Et il en est de même du plus grand et du plus petit rapport. Quant à la composition des rapports et leur décomposition, on n'en a pas besoin dans le *Cinquième Livre.* On en a plutôt besoin dans le *Sixième Livre.* Nous allons en parler d'une manière exhaustive dans la troisième partie de cette épître, avec la grâce de Dieu et son accord bienveillant.

<Ici> s'achève le deuxième chapitre. Que Dieu soit loué.

* * *

comme le rapport de g à e, selon la <*proportionnalité*> *véritable*.

Le rapport de g à e est donc plus petit que le rapport de g à d; d est donc plus grand que e, selon la <*proportionnalité*> *véritable*, comme nous l'avons montré dans la proposition précédente; et le rapport de a à b est comme le rapport de g à e, selon la <*proportionnalité*> *véritable;* le rapport de g à d est donc, selon le <*rapport*> *véritable*, plus grand que le rapport de g à e; d serait donc plus petite que e. Or elle était plus grande qu'elle. Cela est impossible.

Le rapport de a à b n'est donc pas plus petit que le rapport de g à d. Il est donc plus grand que lui.

Et c'est ce que nous voulions démontrer.

<Proposition 8>: réciproque de cette proposition

Le rapport de a à b est, selon la <proportionnalité> véritable, *plus grand que le rapport de g à d. Je dis qu'il l'est aussi, selon la* <proportionnalité> connue.

S'il ne l'était pas, il n'est pas permis que le rapport soit égal au rapport, sinon il en découlerait l'impossibilité <déjà> évoquée.

Que le rapport de a à b soit plus petit que le rapport de g à d, selon la <*proportionnalité*> *connue*. Nous supposons que le rapport de a à b, selon la <*proportionnalité*> *connue*, est comme le rapport de g à e. Le rapport de g à e est donc plus petit que le raport de g à d. e serait donc plus grande que d; et le rapport de a à b, selon la <*proportionnalité*> *connue*, est comme le rapport de g à e. Il en de même selon la <*proportionnalité*> *véritable*.

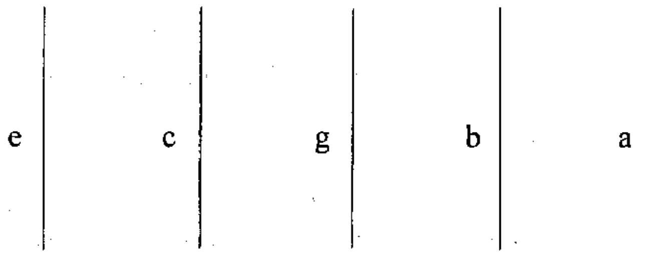
Le rapport de g à, e, selon la <*proportionnalité*> *véritable*, est donc plus grand que le rapport de g à d. e serait donc plus petite que d. Or elle était plus grande qu'elle. Cela est impossible.

Le rapport de a à, b, selon la <*proportionnalité*> *connue*, est donc plus grand qud le rapport de g à d.

Et c'est ce que nous voulions démontrer.

<Conclusion>

Nous avons donc montré que ce qu'a dit Euclide, au sujet de la description du plus grand et du plus petit rapport, est une conséquence du plus grand et du plus petit rapport *véritables*, et qui est que tout rapport plus grand selon la <*définition*> *connue* est aussi plus grand plus petite qu'elle, Et c'est ce que nous voulions démontrer.



Cette proposition possède plusieurs cas. Le plus difficile de ses cas est celui que nous avons exposé. Le reste peut être déduit à l'aide de celui-là. Nous l'avons donc abandonné, <pour éviter> l'ennui de la longueur. Si ces cas venaient à se présenter à celui qui a une bonne intuition et un esprit pénétrant, il saisirait leurs démonstrations, en un temps très court, grâce à ce que nous avons indiqué.

Il en est de même pour toutes les propositions qui la précèdent: elles ne sont pas exemptes de cas et de situations différentes. Et la voie pour les connaître est cette voie-la. La plupart des propositions géométriques n'est pas exempte de cas différents. Et parmi les gens, il y en a certains qui s'imposent des longueurs qui éloignent l'ouvrage de son voulume et de son format <habituels>. Ceci n'est qu'affectation et déviation stupide. Pour cette raison, Thābit[30] n'a fait aucun cas de cela.

<Proposition 7>

Le rapport de la grandeur a *à la grandeur* b *est plus grand que le rapport de la grandeur g à la grandeur* d, *selon la* <proportionnalité> connue. *Alors, je dis qu'il est aussi plus grand que lui selon la* <proportionnalite> véritable.

Preuve

S'il ne l'est pas, alors il lui est égal ou plus petit.

S'il lui est égal, le rapport de a à b selon la *<proportionnalité> véritable* est comme le rapport de g à d; et nous avons dit qu'il était plus grand que lui. Cela est impossible.

S'il est plus petit que lui, nous supposons que le rapport de a à b est

(30 Devant l'absence de points diacritiques sur ce mot, nous avons adopté cette lecture parce qu'elle n'est pas invraisemblable dans la mesure où Khayyām a déjà évoqué thābit Ibn Qurra par son seul prénom.

cas, elle est plus facile et elle se comprend à l'aide d'un minimum de réflexion.

Et nous séparons de $\overline{AB}$ tous les multiples de $\overline{E}$, il reste le reste $\overline{A}$. De même, nous séparons de $\overline{G}$ tous les multiples de $\overline{E}$, il reste le reste $\overline{GH}$.

Donc $\overline{H}$ est égale à $\overline{B}$.

si elle ne l'est pas, il est alors nécessaire que $\overline{B}$ soit plus grande que $\overline{H}$, car le plus grand rapport est de son côté. Mais $\overline{G}$ est plus grande que $\overline{AB}$. Ce qui est impossible.

$\overline{H}$ est donc égale à $\overline{B}$. $\overline{GH}$ est donc plus grande que $\overline{A}$.

Et on sépare de $\overline{E}$ tous les multiples de $\overline{GH}$, il reste le reste $\overline{EK}$; et nous séparons de $\overline{E}$ tous les multiples de $\overline{A}$, il reste le reste $\overline{E}$.

Il faut que, dans ceci, les nombres de restes soient aussi égaux, sinon cela entraîne la première impossibilité; car, si les nombres des restes n'étaient pas égaux, il seraient en excèx <l'un par rapport à l'autre>:

Si le nombre d'exmplaires de $\overline{HG}$ dans $\overline{KZ}$ est plus grand que le nombre que le ombre d'exemplaires de $\overline{A}$ dans $\overline{KZ}$, $\overline{KL}$ serait plus grande que $\overline{A}$; mais $\overline{E}$ est plus petite qu'elle. Cela est impossible.

Et si le nombre d'exemplaires de $\overline{GH}$ dans $\overline{KZ}$ est plus petit que le nombre d'exemplaires de $\overline{A}$ dans $\overline{L}$, le rapport de $\overline{E}$ à $\overline{G}$ serait plus petit que son rapport à $\overline{AB}$ Or, nous avons supposé le contraire de cela. Ceci est <donc> impossible.

Le nombre d'exemplaires de $\overline{GH}$ dans $\overline{KZ}$ est <doc> égal au nombre d'exemplaires de $\overline{A}$ dans $\overline{KZ}$.

De même, le nombre d'exemplaires des reste de $\overline{E}$ dans $\overline{G}$ sera égal au nombre d'exemplaires des restes de $\overline{E}$ dans $\overline{AB}$. Sinon, il en découlera l'impossibilité <déjà> évoquée.

Et les restes restant de $\overline{E}$ ne cessent, aprés en avoir ôté les restes de $\overline{G}$, d'être plus petits que les restes de $\overline{E}$, après avoir ôté de $\overline{E}$ les restes de $\overline{AB}$, c'est à dire leurs homologues.

Et les restes de $\overline{G}$, après en avoir ôté les restes de $\overline{E}$, sont plus grands que les restes $\overline{AB}$, après en avoir ôté les restes de $\overline{E}$, je veux dire leurs homologues.

Or cela est contraire à ce qui est demandé et qui est que le rapport de $\overline{E}$ à $\overline{AB}$ est plus petit que le rapport de $\overline{E}$ à $\overline{G}$. Cela est impossible.

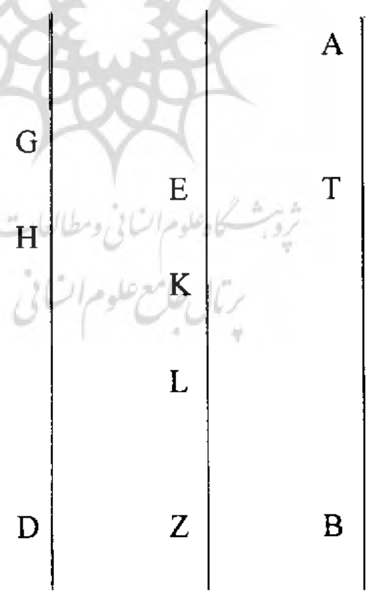
G n'est donc pas plus grande que $\overline{AB}$, ni égale à elle. Elle est donc

Exemple

Les deux grandeurs $\overline{AB}$, $\overline{G}$ sont supposées, et la grandeur $\overline{E}$ est <aussi> supposée, et le rapport de $\overline{E}$ à $\overline{AB}$ est plus petit que son rapport à $\overline{G}$. Je dis que $\overline{AB}$ est plus grande que $\overline{G}$.

Preuve

Si $\overline{AB}$ n'est pas plus grande que $\overline{G}$, elle est alors ou bien égale à elle, et il en découle que le rapport $\overline{E}$ à $\overline{AB}$ est comme le raport de $\overline{E}$ à $\overline{G}$, ce qui n'est pas ainsi, et donc elle ne lui est pas égale; ou bien elle est plus petite qu'elle, et nous avons supposé que le rapport de $\overline{E}$ à $\overline{AB}$ est plus petit que le rapport de $\overline{E}$ à $\overline{G}$. Il est donc nécessaire que le nombre de certains restes de $\overline{E}$ parmi les restes de $\overline{AB}$ soient plus grand que le nombre de ses homologues de $\overline{E}$ parmi les homologues de $\overline{G}$. Ou bien le nombre de certains restes de $\overline{G}$ parmi les restes $\overline{E}$ est plus grand que le nombre de ses homologues de $\overline{AB}$ parmi <ceux de> $\overline{E}$, car ceci est une des propriétés de la <notion> de plus grand ou plus petit raport, ou bien une réflexion, surtout si tu te convaincs de ce que nous disons ici.



Et nous supposons, ici, $\overline{E}$ plus petite que chacune des deux, car si elle était plus grande qu'elle, ou égale à l'une des deux et plus petite ou plus grande que l'autre, la démonstration est la même et, dans certains

Après que nous ayons évoqué les propriétés de la *proportionnalité véritable* et montré que la *proportionnalité connue*-selon ce qu'a indiqué Euclide-est une de ses conséquences, je veux dire que tout ce qui est proportionnel selon la *<proportionnalité> connue* est proportionnel selon la *<proportionnalité> véritable,* et tout ce qui est proportionnel selon la *<proportionnalité> véritable* est proportionnel selon la *<proportionnalité> connue,* évoquons maintenant les propriétés du plus grand et du plus petit *rapport véritable.*

Si le rapport de la première à la seconde est comme le rapport de la troisième à la quatrième selon la *<proportionnalité> véritable,* alors cette proportionnalité-là est cette proportionnalité-ci, elle-même. Et <la proposition disant que si> le rapport de la troisième à la quatrième est plus grand ou plus petit que le rapport de la cinquièm à la sixième, alors le rapport de la première à la seconde est, selon la *<proportionnalité> véritable,* plus grand <ou plus petit> que le rapport de la cinquième à la sixièm, n'a pas besoin de démonstration. Et si Euclide l'a démontrée c'est parce qu'il a éloigné la notion de la vérité et qu'il s'est écarté de la réalité de l'essence de la chose au profi de <ce qui> en est une nécessité et qui est non apparente mais qui a un moyen terme qui a besoin d'une démonstration pour la connaissance de la nécessité.

De même, <la proposition disant> ≪*si deux grandeurs sont en excès <l'une par rapport à l'autre>, alors le rapport d'une autre grandeur à la plus grande, selon la* <proportionnalité> véritable, *est plus petit que le rapport de cete même grandeur à la plus petite grandeur, et de même, le rapport de la plus grand <grandeur> à cette grandeur donnée selon la* <proportionnalité> véritable, *est plus grand que le rapport de la plus petite grandeur à cette même grandeur*≫, n'a pas du tout besoin d'une démonstration. Euclide l'a démontrée parce qu'il s'est éloigné du *plus grand rapport véritable* au profit de celui qui est connu.

<Proposition 6>

Si le rapport d'une grandeur suposée à l'une des deux grandeurs supposées est plus grand que le rapport de cette même grandeur à l'autre grandeur parmi les deux grandeurs supposées, selon la <proportionnalité> véritable, alors [la première grandeur est plus petite que la seconde grandeur].

<Cette propostion> a besoin d'une démonstration. Et, de même, sa réciproque a besoin aussi d'une démonstration.

plus grande que sa moitié, et ce indéfiniment. Il restera une grandeur plus petite que l'excès de $\overline{BG}$ sur $\overline{D}$.

Et nous avons montré que les restes de l'excès, je veux dire tout reste, et c'est ce qui rest du reste indiqué, sera plus grand que le reste précédent, et il sera plus grand que le reste $\overline{BG}$ de beaucoup, à chaque fois, si $\overline{BG}$ est plus grand que $\overline{D}$, et ce indéfiniment. Et ceci est impossible.

$\overline{BG}$ n'est donc pas plus grand que $\overline{D}$, ni plus petit.

Et c'est ce que nous voulions démontrer.

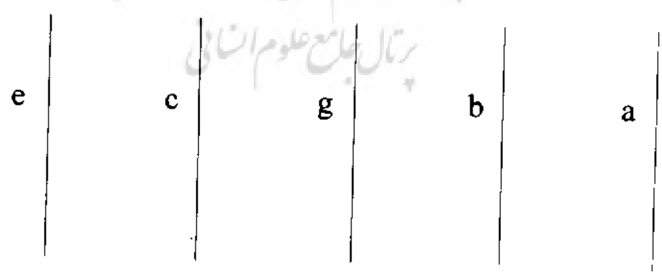
Et sa réciproque <s'établit> à l'aide de la même démonstration: si leurs rapports à lui sont les mêmes, ils sont nécessairement égaux.

<Proposition 5>

<Si> le rapport de a à b selon la <proportionnalité> véritable, *est comme le rapport de g à d et <que> le raport n'est pas numérique, je dis que le rapport de a à b est alors comme le rapport de g à d, selon la* <proportionnalité> connue.

Preuve

Le rapport de *a* à *b* est comme le rapport de *g* à *e*, selon la *<proportionnalité> connue.* Nous avons montré que cette affirmation est valable pour toute grandeur, même si elle ne s'obtenait pas, concrètement, à l'aide d'un procédé de l'art.



Le rapport de *a* à *b* est comme le rapport de *g* à *e* selon la *<proportionnalité> véritable.*

Le rapport de *g* à eest donc comme le rapport de *g* à *d*, selon la *<proportionnalité> véritable.* Ils sont donc égaux. Les grandeurs sont donc proportionnelles selon la *<proportionnalité> connue.* Et c'est ce qui était demandé.

selon la <*proportionnalité*> *véritable*, je dis que $\overline{BG}$ et $\overline{D}$ sont égales.

Si elles n'étaient pas égales, l'une des deux serait plus grande, et c'est $\overline{BG}$. Supposons que $\overline{A}$ soit plus petite que chacune des deux.Si elle était plus grande, la démonstration serait la même. Et il en est ainsi pour toutes les propositions précédentes.

Nous séparons de $\overline{D}$ tous les multiples de $\overline{A}$, et c'est $\overline{HE}$. De même, nous séparons tous les multiples de $\overline{A}$ de $\overline{BG}$, et c'est $\overline{TG}$.

$\overline{HE}$ sera alors égale à $\overline{TG}$; $\overline{B}$ sera plus grande que $\overline{D}$ et son excès par rapport à elle <sera> comme l'excès de $\overline{BG}$ sur $\overline{D}$.

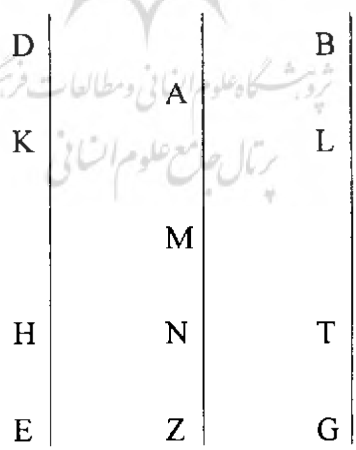
Nous séparons de $\overline{A}$ tous les multiples de $\overline{D}$, et c'est $\overline{NZ}$; et nous séparons également de $\overline{A}$ tous les multiples de $\overline{B}$, et c'est $\overline{M}$.

$\overline{M}$ sera alors égale à $\overline{NZ}$, car les nombres des multiples sont égaux.

Et nous séparons de $\overline{B}$ tous les multiples de $\overline{A}$; il reste $\overline{BL}$. Et nous séparons de $\overline{D}$ tous les multiples de $\overline{A}$; il reste $\overline{D}$.

BL sera alors plus grande que $\overline{D}$ et son excès sur elle plus grand que l'excès de $\overline{BG}$ sur $\overline{D}$, car l'excès de $\overline{B}$ sur $\overline{D}$ est égal à l'excès de $\overline{BG}$ <sur $\overline{D}$>. Et AM est plus petite que AN. TL est donc plus petite que KH. Il reste l'excès de BL sur DK plus grand que le premier excès.

Et de même, dans les restes suivants, le reste de $\overline{BG}$ est plus grand que le reste de DK et plus grand que le reste précédent. Et ainsi chaque reste sera plus grand que celui qui le précède, <et cela> indéfiniment.



Mais, $\overline{BG}$ est une grandeur et son excès sur $\overline{D}$ est une grandeur plus petite que lui. Et on sépare de $\overline{BG}$ <une partie> plus grande que sa moitié, et c'est $\overline{TG}$, et de même de $\overline{B}$ <une partie> plus grande que sa moitié, et c'est $\overline{T}$. Et ainsi de suite, on sépare du reste <une partie>

Le rapport de $\overline{AB}$ à $\overline{E}$ est alors comme le rapport de $\overline{HT}$ à $\overline{SL}$. Il reste donc le rapport de $\overline{AB}$ à $\overline{GE}$ comme le rapport de $\overline{HT}$ à $\overline{KS}$; et $\overline{AB}$ est plus grand que $\overline{GE}$, et $\overline{HT}$ est plus petit que $\overline{KS}$. Cela est impossible.

Le séparons tous les multiples $\overline{GE}$ de $\overline{AB}$, et c'est $\overline{BN}$. Et nous séparons tous les multiples $\overline{ZK}$ de $\overline{HT}$, et c'est $\overline{M}$.

ou bien le nombre BN est égal au nombre $\overline{M}$, sinon, BN est plus grand, car le rapport le plus grand est du côté de $\overline{AB}$, $\overline{G}$. Et nous avons montré ces règles dans l'introduction de *l'Epître.*

Si le nombre $\overline{BN}$ est plus grand, l'impossibilité précédents s'en déduit. Il faut donc que le nombre $\overline{BN}$ soit égal au nombre $\overline{M}$. Et il en est de même pour le nombre de tous les restes.

Mais, nous avons supposé que le rapport de $\overline{AB}$ à $\overline{G}$ est plus grand que le rapport de $\overline{HT}$ à $\overline{KL}$. Il est donc nécessaire qu'il en résulte quelque chose relatif aux propriétés du plus grand rapport, et qui est que le nombre des restes de $\overline{G}$ est inférieur au nombre des restes de $\overline{KL}$; et c'est impossible. Ou bien le nombre des restes de $\overline{AB}$ est plus grand que le nombre des restes de $\overline{HT}$, et c'est également impossible.

Le rapport de $\overline{AB}$ à $\overline{G}$ n'est donc ni plus grand que le rapport de $\overline{HT}$ à $\overline{KL}$, ni plus petit. Le rapport de $\overline{AB}$ à $\overline{G}$ est donc, selon *<la proportionnalité> véritable,* comme le rapport de $\overline{HT}$ à $\overline{KL}$. Et c'est ce que nous voulions démontrer.

Et sache que <la propostion disant que> ≪*le rapport d'une grandeur à deux grandeurs égales est un même rapport*≫, et <celle disant que> ≪*le rapport de chacune de deux grandeurs égales à une même grandeur est un même rapport*≫, n'ont pas besoin de démonstration. Mais <celle disant que> ≪*si le rapport de chacun de deux nombres à une même grandeur est un même rapport, les deux grandeurs sont égales*≫, a besoin d'une démonstration.

<Proposition 4>

De même <la proposition disant que> si le rapport d'une même grandeur à deux grandeurs est un même rapport, les deux grandeurs sont égales, a besoin d'une démonstration.

Preuve

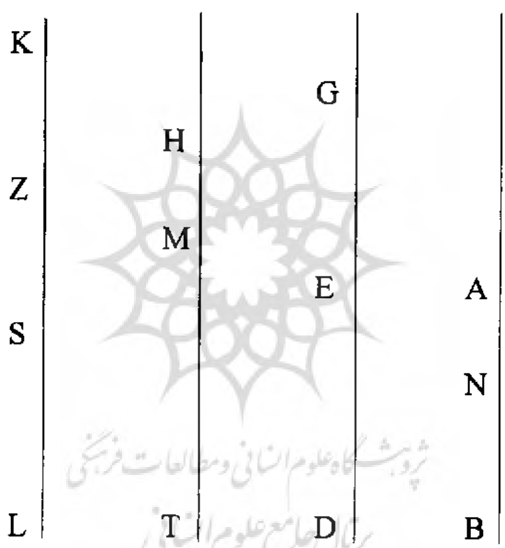
<Si> le rapport de la grandeur $\overline{A}$ à $\overline{D}$ est comme son rapport à $\overline{BG}$,

s'installât au sujet de cette <chose>nécessaire.

Mais cela n'est pas possible dans la *proportionnalité véritable.*

<Proposition 3>

Si le rapport de la grandeur $\overline{AB}$ *à la grandeur* $\overline{G}$ *est comme le rapport de la grandeur* $\overline{HT}$ *à la grandeur* $\overline{KL}$, *selon la* <proportionnalité> connue, *et que le rapport de* $\overline{AB}$ *à* $\overline{G}$ *n'est pas un rapport numérique, je dis qu'elles sont proportionnelles selon la* <proportionnalité> véritable.



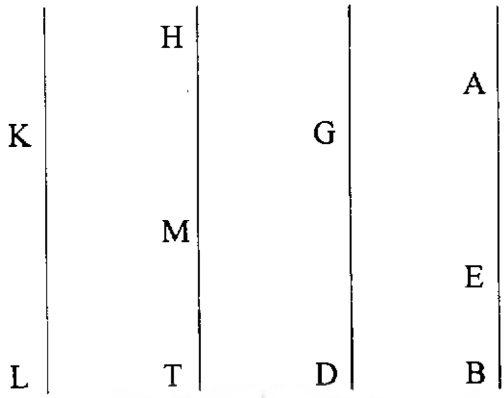
Preuve

Si elles n'étaient pas proportionnelles, le rapport de l'un des deux <couples> serait alors plus grand que l'autre. Que le rapport de $\overline{AB}$ à $\overline{G}$ soit plus grand que le rapport de $\overline{HT}$ à $\overline{KL}$ Nous séparons alors, de $\overline{G}$, tous les multiples de $\overline{AB}$, et c'est $\overline{E}$; et nous séparons, de $\overline{KL}$, tous les multiples de $\overline{HT}$, et c'est $\overline{Z}$.

Si leurs nombres sont en excès <l'un par rapport à l'autre>, que $\overline{Z}$ soit le plus grand, parce que le rapport de la plus petite est du côté de $\overline{HT}$, $\overline{KL}$.

Nous séparons de $\overline{Z}$, des multiples de $\overline{HT}$ égaux <en nombre> au nombre ED, et c'est $\overline{SL}$.

port de $\overline{G}$ à $\overline{A}$ est comme le rapport de $\overline{KL}$ à $\overline{H}$. Alors, dans le rapport à égalité de rang, le rapport de $\overline{AB}$ à $\overline{A}$ est, selon la <*proportionnalité*> *connue,* comme le rapport de $\overline{HT}$ à $\overline{H}$.



Le rapport de $\overline{AB}$ à $\overline{E}$ est comme le rapport de $\overline{H}$ à $\overline{M}$, selonl a <*proportionnalité*> *connue.*

Inversement, le rapport de $\overline{E}$ à $\overline{AB}$ est comme le rapport de $\overline{M}$ à $\overline{KL}$, et le rapport de $\overline{AB}$ à $\overline{G}$ est comme le rapport de $\overline{HT}$ à $\overline{KL}$. Dans le rapport à égalité de rang, le rapport de $\overline{M}$ à $\overline{KL}$ est donc comme le rapport de $\overline{E}$ à $\overline{G}$. Et c'est ce que nous voulions démontrer.

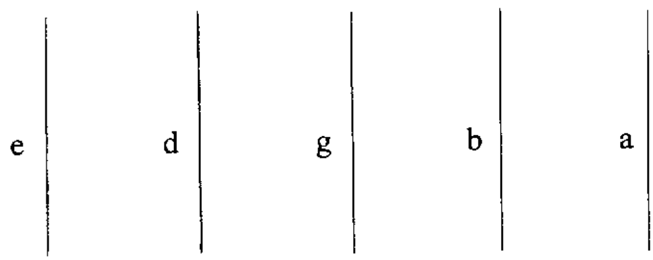
Dans le *Cinquième Livre,* Euclide a démontré de nombreuses choses qui n'avaient pas besoin d'une démonstration, <comme> lorsqu'il dit ≪*le rapport d'une même grandeur à deux grandeurs égales est le même*≫. Et nous l'avons <déjà> montré.

Et lorsqu'il dit ≪*si le rapport de la première à la seconde est comme le rapport de la troisème à la quatrième et le rapport de la troisième à la quatrième comme le rapport de la cinquième à la sixième, alors le rapport de la première à la seconde est comme le raport de la cinquième à la sixièm*≫. Ceci n'a pas besoin d'une démonstration, car si le rapport de la première à la seconde est lui-même le rapport de la troisièm à la quatrième, et si le rapport de la troisim̀e à la quatrième est lui-même le rapport de la cinquième à la sixième, il est alors absolument nécessaire que le rapport de la première à la seconde soit le lui-même rapport de la cinquim̀e à la sixim̀e.

Mais, comme Euclide exprimé la proportionnalité par ce qui lui est nécessaire et non par elle-même, il était devenu possible que le doute

<Proposition 2> réciproque de cette proposition

Les grandeurs a, b, g, d, sont proportionnelles selon la *proportionnalité connue*, et le rapport de a à b est un rapport numérique selon le *rapport véritable*, je dis alors qu'elles sont proportionnelles selon la *proportionnalité*[29] *véritable*.



Preuve

Si le rapport de a à b n'est pas comme le rapport de g à d, selon la *proportionnalité véritable*, qu'il soit comme le rapport de g à e.

Le rapport de a à b sera donc comme le rapport de g à e, selon la *proportionnalité connue*. Or, le rapport connu de a à b est comme le rapport de g à d. Le rapport de g à d est donc comme le rapport de g à e, selon la *<proportionnalité> connue*, comme cela a été montré dans le *Cinquième Livre*. Le rapport de g à d et à e est le même selon la *<proportionnalité> connue*. Donc, d est égal à e. Le rapport de a à b est donc comme le rapport de g à d, selon la *<proportionnalité> véritable*. Et c'est ce que nous voulions démontrer.

<Lemme>

Le rapport de la grandeur $\overline{AB}$ *à la grandeur* $\overline{G}$ *est, selon la* <proportionnalité> connue, *comme le rapport de* $\overline{HT}$ *à* $\overline{KL}$, *et le rapport de* $\overline{A}$ *à* $\overline{G}$ *est, selon la* <proportionnalité> connue, *comme le rapport de* $\overline{H}$ *à* $\overline{KL}$. *Je dis alors que le rapport de* $\overline{E}$ *à* $\overline{G}$ *est comme le rapport de* $\overline{M}$ *à* $\overline{KL}$, *selon la* <proportionnalité> connue.

Sa preuve

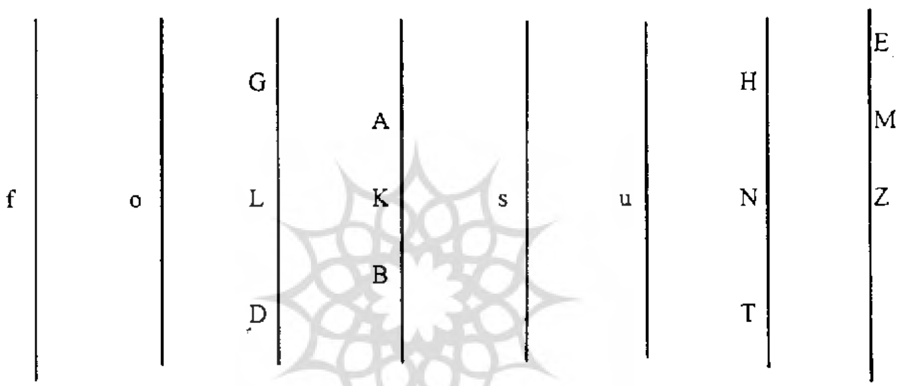
Le rapport de $\overline{AB}$ à $\overline{G}$ est comme le rapport de $\overline{HT}$ à $\overline{KL}$, et le rap-

(29 Khayyām a utilisé le mot *tanāsub* pour désigner la *proportionnalité*. Quant au mot *nisba*, il est utilisé par lui tantôt dans le sens de *rapport* tantôt dans le sens de *proportionnalité*. Nous avons donc traduit ce mot en tenant compte du contexte.

proportionnalité véritable, et le rapport est numérique. Alors, $\overline{AB}$ est soit égal à $\overline{G}$ soit en est une partie ou des parties. Que AB soit égal à GD et $\overline{E}$ <égal> à $\overline{HT}$.

Nous prenons du premier et du troisiéme des multiples quelconques <en nombre> égal et qui sont o et u [et, du second et du quatrième, les multiples <en nombre> égal et qui sont s et f].

Et $\overline{AB}$ est égal à $\overline{G}$. Or, les multiples o de $\overline{AB}$ sont égaux aux multiples u de $\overline{E}$. Donc s, f, sont ou bien tous les deux plus grands que o, u, ou bien tous les deux égaux à eux, ou bien inférieurs tous les deux à eux.



Le rapport de $\overline{AB}$ à $\overline{G}$ est donc comme le rapport de $\overline{E}$ à HT, selon la *proportionnalité connue.*

Et si $\overline{AB}$ est une partie de $\overline{G}$, on divise $\overline{G}$ selon des <parties> égales à $\overline{AB}$, et qui sont $\overline{GL}$, $\overline{L}$. De même, les parties de $\overline{HT}$ sont $\overline{HN}$, $\overline{NT}$.

Les multiples o de $\overline{G}$ sont égaux aux multiples u de HT. Et les multiples $\overline{G}$ de $\overline{AB}$, je veux dire $\overline{GL}$, sont comme les multiples $\overline{HT}$ de $\overline{E}$, je veux dire $\overline{HN}$. Les multiples o de $\overline{AB}$ sont come les multiples u de $\overline{E}$. Et l'on aboutit au premier cas. Les grandeurs sont donc proportionnelles selon la *<proportionnalité> connue.*

Et si $\overline{AB}$ est des parties de $\overline{G}$, on divise $\overline{AB}$ selon les parties de $\overline{G}$, et qui sont $\overline{A}$, $\overline{KB}$. De même, les parties de $\overline{E}$ sont $\overline{E}$, $\overline{M}$.

D'après la preuve précédente, les multiples s de $\overline{A}$ sont égaux aux multiples f de EM. De même, les multiples o de $\overline{A}$ sont égaux aux multiples u de $\overline{E}$. Et l'on aboutit au premier <cas>. Les grandeurs sont donc proportionnelles selon la *proportionnalité connue.* Et c'est ce que nous voulions démontrer.

Preuve

Nous doublons a jusqu'à ce que son multiple soit plus grand que $\overline{BG}$. Soit $\overline{Z}$ <ce multiple>. Et il contient comme <grandeurs> égales à a: $\overline{ZH}$, $\overline{HT}$, $\overline{T}$, et c'est trois <fois a>. Nous séparons $\overline{G}$ de $\overline{BG}$; qui est sa moitié ou plus; et $\overline{E}$ de $\overline{D}$ qui est sa moitié ou plus. Et nous prenons des multiples de $\overline{E}$ égaux aux multiplez $\overline{Z}$ de a, et c'est $\overline{KN}$ dont les multiples sont $\overline{KL}$, $\overline{L}$, $\overline{M}$.

La grandeur $\overline{B}$ n'est pas plus grande que $\overline{D}$, et $\overline{D}$ n'est pas plus grand que $\overline{E}$, mais plus petit que lui de beaucoup.

La grandeur $\overline{BG}$ est donc plus grande que trois fois $\overline{B}$ et trois fois <$\overline{B}$ égalent> $\overline{KN}$. $\overline{KN}$ est donc plus petit que $\overline{BG}$.

Et $\overline{Z}$ est plus grand que $\overline{BG}$. Donc $\overline{Z}$ est plus grand que $\overline{KN}$.

Et le rapport de $\overline{Z}$ à oKN est, par la *proportionnalité connue*, comme le rapport de a à $\overline{B}$. La grandeur a est donc plus grande que $\overline{B}$.

Et c'est ce que nous voulions démontrer.

Et c'est là première proposition du *Dixiéme Livre* des *Éléments*. Et on n'a besoin, dans sa démonstration, que du *Cinquième Livre*. Nous l'avons déplacé à cet endroit parce que nous en avons besoin dans ces démonstrations-ci.

Mais Euclide a indiqué qu'il séparait du plus grand <quelque chose de> plus grand que sa moitié, et il n'a pas dit pas qu'il en séparait <quelque chose> comme sa moitié ou plus grand qu'elle, afin que la proposition soit générale.

Il est étonnant qu'il ait utilisé cette proposition dans la proposition 13 du *Livre XII*[28] et qu'il ait dit: "*si on sépare du plus grand <ce qui est> égal à sa moitié et du reste <ce qui est>égal à sa moitié*". Si sa proposition était là comme celle-ci, cela aurait été plus utile à cet endroit-là. Réfléchis-y.

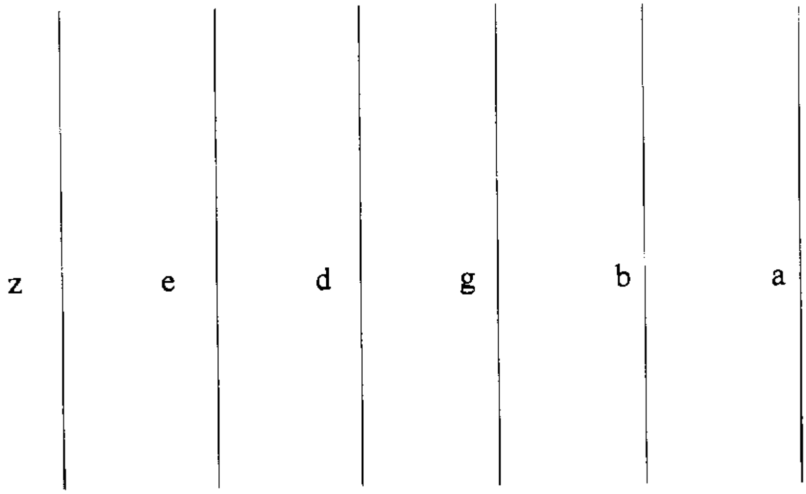
<Proposition 1>

Si quatre grandeurs sont proportionnelles selon la proportionnalité véritable *et si le rapport du premier au second est un rapport numérique, je dis <alors> qu'elles sont proportionnelles selon la* proportionnalité connue.

Example:

Le rapport de $\overline{AB}$ à $\overline{D}$ est comme le rapport de $\overline{E}$ à $\overline{HT}$, selonla

(28 *Proposition XII; 16* selon la numérotation de Heiberg.

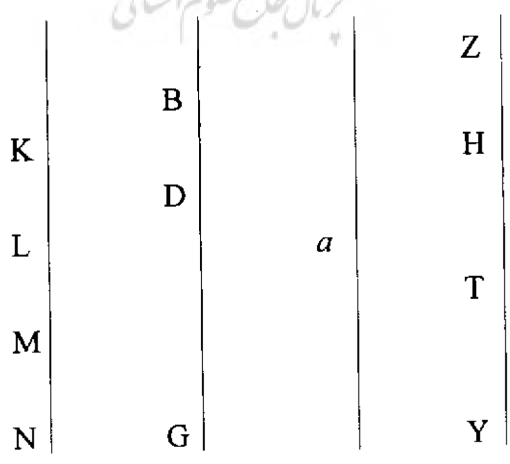


<Prémisse 2>

Si deux grandeurs sont en excès <l'une par rapport à l'autre>, et que l'on retranche de la plus grande sa moitié ou <une partie> plus grande <que sa moitié>, que <l'on fasse> la même chose pour le reste et que l'on procède ainsi avec les <autres> restes, il restera alors une grandeur plus petite que la plus petite <des deux> grandeurs données.

Exemple

Les grandeurs a et $\overline{BG}$ sont données. Je dis que l'affirmation à leur <sujet> est selon ce que nous avons dit.



<Prémisse 1: existence de la quatrième proportionnelle>

> *<Pour> toute grandeur donnée, et pour tout rapport <donné>, il est possible qu'il y ait dans l'esprit une autre grandeur <telle que> le rapport de la première à elle soit égal au rapport donné*[26]

Cette prémisse est philosophique et nous allons l'expliciter 'a d'aide d'un exemple.

Exemple

Le rapport de a à b est donné et g est donné. Je dis qu'il est nécessaire que le rapport de g à une autre grandeur soit comme le rapport de a à b, et ce dans l'esprit non dans l'existence, car <il importe peu> qu'il existe ou qu'il n'existe pas dans le réalité, puisqu'on n'a besoin de lui <que> dans les démonstrations.

Il n'y a pas de limite finie dans le doublement et le dédoublement[27] des gradeurs. Au contraire, il est possible de les doubler indéfiniment et, de même, il est possible de les dédoubler indéfiniment. Et, si c'est ainsi, il existe nécessairement une grandeur très grande telle que le rapport de g à elle soit plus petit que le rapport de a à b. Soit e cette grandeur. Et il existe nécessairement une grandeur très petite telle que le rapport de g à elle soit plus grand que le rapport de a à b. Soit z cette grandeur.

Or la division des grandeurs n'a pas de fin. <Donc,> entre e et z, il existe nécessairement une grandeur telle que le rapport de g à elle soit comme le rapport de a à b. Il n'y a là aucun empêchement car tout ce qui est en excédent peut être dissocié de e et tout ce qui est en excédent peut être ajouté à z. Que cela soit d.

(26 La traduction de cet énoncé s'est quelque peu éloignée de la formulation exacte d'al Khayyām, mais elle reste fidéle au sens, comme le confirme l'exemple et la démonstration de l'auteur.

(27 Nous utilisons ici les termes ≪*dédoublement*≫ et ≪*dédoubler*≫ dans le sens de divisions successives par 2.

inférieur au nombre de multiples de la troisième; ou bien si ce nombre-là est égal à celui-ci, mais que, lorsqu'on retranche <de la première> tous les multiples du <premier> résidu de la seconde par rapport à la première jusqu'à ce qu'il reste un <second> résidu et que l'on retranche <de la troisième> tous les multiples du <premier> résidcu de la quatrième par rapport à la troisième, jusqu'à ce qu'il reste un résidu, et que le nombre des multiples du <premier> résidu de la seconde est supérieur au nombre de multiples du <premier> résidu de la quatrième; ou bien si ce nombre-ci est égal à ce nombre-là, mais que, lorsqu'on retranche tous les multiples du <second> résidu de la première par rapport au <premier> résidu de la seconde et tous les multiples du <second> résidu de la troisième par rapport au <premier> résidu de la quatrième et que le nombre des multiples du <second>résidu de la première est inférieur [au nombre des multiples du second résidu de la troisième][24], ou qu'il ne reste pas de résidu de la seconde ou rien du résidu de la seconde et qu'il reste un résidu de la quatrième ou <un résidu> du résidu de la quatrième; alors, <dans tous ces cas>, et d'une manière véritable, le rapport de la première à la seconde est, nécessairement, supérieur au rapport de la troisième à la quatrième.

D'une manière générale, pour ce type <de grandeurs>, s'il ne reste aucun résidu de la seconde ni de ses résidus <successifs de même ordre>[25], ou si ses résidus sont inférieurs en nombre <à leurs homologues d'ordre impair>, ou s'il reste, de la première et de ses résidus, un résidu et qu'il ne reste pas de résidu de la troisime et de ses résidus; ou bien si les résidus <d'ordre impair> de la première sont <en nombre> supérieurs aux résidus de la troisime, alors, <dans tous ces cas>, on aura nécessairement le rapport de la première à la seconde supérieur au rapport de la troisième à la quatrième.

Cette idée possède des développements plus longs que ceux-là qu'il t'est possible de connaître à l'aide de cette règle que tu as apprise. Comprends-le.

Il nous reste à démontrer que ce qu'a dit Euclide est une des conséquences de cela.

Parmi les prémisses que nous avons besin de postuler <il y a celle-ci>:

(24 Les phrases entre crochets droits sont des omissions des copistes. Nous les avons rétablies en nous aidant du contexte.

(25 C'est à dire les résidus des étapes d'ordre pair.

même <manire>, du résidu de la seconde, tous les multiples du second résidu de la seconde et, du résidu de la troisème, tous les multiples du second résidu de la troisièm, et que leur nombre est le même; et si, lorsque de la même <manière>, on retranche tous les multiples des résidus, successivement les uns des autres, comme nous l'avons montré, le nombre des résidus de la première et de la seconde est égal au nombre des résidus correspondants de la troisième et de la quatrième, <et ce> indéfiniment, alors le rapport de la première à la seconde sera, nécessairement, comme le rapport de la troisième à la quatrième.Et c'est cela la *proportionnalité véritable* pour le type géométrique <des grandeurs>.

<Définition du plus grand et du plus petit rapport selon Khayyām>[23]

Quant aux plus petits et aux plus grands rapports véritables, c'est comme lorsque tu dis: si étant <donné> quatre grandeurs, la première est égale à la seconde et la troisième est inférieure à la quatrième; ou bien la première est supérieure à la seconde et la troisième n'est pas supérieure à la quatrime; ou bien la première est une partie de la seconde et la troisième est une autre partie de la quatrième, plus petite que cette partie là, ou des parties <de la quatrième> qui sónt, dans leur ensemble, inférieures à cette partie; ou bien la première est des parties de la seconde et la troisième une autre partie de la quatrième inférieure à ces parties; ou bien des parties qui sont toutes inférieures à ces parties là. Alors, <dans tous ces cas>, le rapport de la première à la seconde est plus grand que le rapport de la troisième à la quatrième.

Si nous nous sommes cantonnés à la partie et aux parties et nous avons abandonné les multiples, c'est par <souci> d'allégement, les unes se substituant aux autres. Et leur propriété dans le cas de la réciproque est la même sans aucun changement. Je veux dire que si le premier est multiple du second et que le troisième est multiple du quatrième, tu as appris que le jugement des multiples homologues à ces parties, dans ceci et dans la *proportionnalité véritable,* est le même. Et ce rapport est numérique.

Quant au <cas> géométrique, si on retranche de la seconde tous les multiples de la première et qu'il reste un résidu <inférieur à la première> et, de la quatrième, tous les multiples de la troisième et qu'il reste un <premier> résidu et que le nombre des multiples de la première est

(23 Ce paragraphe correspond à la définition 7 du *Livre des 'Eléments.*

Livre et adjoignons-lui, à sa fin, ce que nous dirons sur la *proportionnalité véritable*. Nous allons bientôt démontrer que cette *proportionnalité connue* est une conséquence de la proportionnalité véritable. Les conséquences de la *proportionnalité connue* seront donc des conséquences de la *proportionnalité véritable*, comme la composition, la séparation, la permutation, l'inversion et d'autres choses qu'a évoquées Euclide ou qui sont potentiellement dans son propos.

Je dis que je me suis représenté la réalité du véritable rapport de grandeur qui est que, <étant donné> deux grandeurs, ou bien l'une d'elles est égale à l'autre ou bien elle ne l'est pas. Et, pour <deux grandeurs> inégales, ou bien <l'une d'elles> est une partie de l'autre ou bien des parties - ces trois <formes> étant le rapport numérique-; ou bien le <rapport> est selon un autre type, particulier à la géométrie, comme nous l'avons montré dans ce qui précède.

<Définition de la proportionnalité selon Khayyām>

Etant <données> quatre grandeurs <telles que> la première soit égale à la seconde et la troisièmeégale à la quatrième, ou bien <tell que> la première soit une partie de la seconde et la troisième cette même partie de la quatrième, ou bien <telle que> la première soit des parties de la seconde et la troisième ces mêmes parties de la quatrième, alors le rapport de la première à la seconde est, nécessairement, comme le rapport de la troisièm à la quatrime; et ce rapport est numérique.

Si les <grandeurs> ne sont pas selon ces trois formes et si, lorsqu'on retranche de la seconde tous les multiples de la premire <contenus dans la seconde> jusqu'à ce qu'il rest un résidu inférieure à la première, et que, de la même manière, on retranche de la quatrième tous les multiples de la troisième jusqu'à ce qu'il reste un résidu inférieur au troisième et qu'alors le nombre de multiples de la première <contenu> dans la seconde est égal au nombre de multiples de la troisième <contenu> dans la quatrième; et si, après <cela>, on retranche <de la première> tous les multiples du résidu de la seconde par rapport à la premire, de telle sorte qu'il reste un résidu inférieur au résidu de la seconde et que, de la même <manière>, on retranceh <de la troisième> tous les multiples du résidu de la quatrième par rapport à la troisième, jusqu'à ce qu'il reste un résidu inférieur au résidu de la quartrième, et qu'alors le nombre des multiples du résidu de la seconde est égal au nombre de multiples du résidu de la quatrième; et si, <après cela>, lorsqu'on retranceh, de la expression, sauf que, dans l'explication de ce terme, il s'est écarté, d'une manière nette, de la véritable <signification> de la proportionnalité, et ceci en disant ≪*étant donné quatre grandeurs homogènes, on prend pour la première et la troisième des multiples égaux, et pour la seconde et la quatrième des multiples égaux, quels que soient ces multiples et ce indéfiniment, et on les compare. Si <lorsque> les multiples de la première les multiples de la seconde, les multiples de la troisième excédent les multiples de la quatrièm; et si, <lorsque> les <deux premiers>sont égaux, les <deux autres> le sont aussi, et si, <lorsque> les <premiers multiples> sont inférieurs <aux seconds>, les <troisièmes> sont inférieurs <aux quatrièmes> -lorsqu'ils sont comparés respectivement <deux à deux>-, alors on dira que le rapport de la première à la seconde est comme le rapport de la troisième à la quatrième*≫. Qu'elles soient dites alors *proportionnelles.*

Ceci n'est pas basée sur la *proportionnalité véritable.* Ne vois-tu pas que si quelqu'un <nous interrogeait> en disant: quatre grandeurs étant proportionnelles selon la *proportionnalité euclidienne* et la première étant la moitié de la seconde, la troisième est-elle, <oui> ou non, la moitié de la quatrième? Comment peut-on démontrer, à l'aide du procédé d'Euclide, que la troisième est aussi la moitié de la quatrième? Si on répondait en disant: il faut que la troisième soit la moitié de la quatrième, lorsque la première est la moitié de la seconde, à cause de la proportionnalité, en quoi est-ce une preuve que ce qu'a dit Euclide est une des conséquences de la *proportionnalité véritable?*

<Définition du plus grand et du plus petit rapport selon Euclide>

Il a dit <aussi> ≪*si on a quatre grandeurs et que l'on prenne les multiples de cette maniére et si les multiples de la première excèdent les multiples de la seconde, et que les multiples de la troisième n'excèdent pas les multiples de la quatrième, on dira que le rapport de la premiře à la seconde est plus grand que le rapport de la troisième à la quatrième*≫.

C'était là le propos de notre homme sur la proportionnalité. Mais nous, nous appellerons cette proportionnalité la <*proportionnalité*> *connue,* et nous allons parler de la *proportionnalité véritable.*

Le Cinquième Livre est tout entier <consacré> à la *proportionnalité connue.* Et il est juste selon cette proportionnalité. Postulons donc ce multiples du plus petit et qu'il reste un reste plus petit que le plus petit nombre, puis qu'on ôte du plus petit tous les multiples du reste et qu'il en teste un reste plus petit que le second reste, et qu'on ne cesse de faire cela, on atteindra nécessairement un reste qui nombre le reste qui le précède, ou bien l'unité, et ce parce que les deux nombres sont finis et donnés et parce qu'ils sont composés d'unités indivisibles.

Lorsque nous disons "*composé*" pour décrire le nombre, c'est par nécessité du langange, car les notions de compostion, de pluralité, d'ensemble,de nombre correspondent toutes à la même <idée>.Et <Euclide> a donné une prémisse à propos de cela au début du *Septième <Livre>* de son ouvrage. Tu pourras la saisir après un minimum de réflexion.

Quant aux grandeurs, elles ne sont pas composées de parties indivisibles et leur division n'a pas de limite. Cette idée ne leur est donc pas nécessaire dans tous les cas. Et il n'est pas nécessaire que l'on atteigne obligatoirement l'unité, puisque il n'y a pas d'unité en elles, ni <que l'on atteigne> un reste mesurant celui qui le précède. Et si il y a <en elles> cette idée et la relation <qui y est associée>, cela n'est connu que par la démonstration.

Euclide l'a longuement évoquée dans le *Dixième <Livre>* de son Traité, et elle ne nous est absolument pas nécessaire dans cette explicitation, Et si cela est ainsi, tout couple de grandeurs n'est pas nécessairement tel que la plus petite soit ou bien une partie de la plus grande ou bien des parties. Il est plutôt possible qu'elles soient d'un autre type non numérique mais particulier aux grandeurs.

Si quelqu'un disait que ce troisième type ne peut absolument pas avoir lieu, mais qu'il fait partie des deux types numériques, nous lui répondrions en disant: nous ne perdons rien à considérer les propriétés du rapport et de la proportionnalité dans les grandeurs comme étant de ces trois formes. Puis, si la subdivision venait à être supprimée par la preuve, il n'y aurait rien à nous reprocher. Mais, si elle n'était pas supprimée, nous aurions avancé et nous aurions <ainsi> donné toutes les subdivisions. Ceci est un secret à l'aide duquel on entrevoit des secrets rationnels très profonds. Comprends-le.

<Définition de la proportionnalité selon Euclide>[22]

Puis, il a évoqué la proportionnalité et il a dit que c'est la *similitude des rapports.* Du point de vue de la langue, ceci est une bonne

(22 Ce paragraphe correspond aux définitions 3bis, *5* et *6* du *Livre V des Éléments.*

c'est à dire qu'elle la nombre et l'épuise lorsqu'elle est rapportée <à elle>, ou bien elle est des parties, ou bien elle est selon une autre forme.

Et l'une des particularités de la quantité est que <l'on peut> y considérer l'égalité et la non-égalité. Le rapport est <à la fois> cette même considération lorsqu'on rapporte deux <grandeurs> homogènes <l'une à l'autre>, ainsi qu'une autre considération qui lui est associée, et qui est la mesure de ce rapport, en tant qu'il est un rapport pour mesurer. Et ceci est plus évident dans les <choses> numériques.

Cette notion, c'est à dire le rapport, a été découverte en premier lieu dans les <choses> numériques; et ce, parce que <les Anciens> ont considéré les nombres rapportés les uns aux autres. Ils ont alors constaté qu'ils étaient égaux ou inégaux; ce qui fait partie des propriétés de la quantité. Puis, ils ont considéré les inégaux. Ils ont constaté que le plus petit mesure le plus grand, comme trois <le fait> pour neuf. Puis, ils ont cherché la quantité qui permet à trois de mesurer neuf et ils ont trouvé trois. Trois mesurait donc neuf trois fois. Ils ont alors dérivé de cette notion un nom selon les langues. Ils ont dit ≪*c'est le tiers*≫. Le rapport entre trois et neuf est donc la tiercité et elle est <le résultat de> la considération de l'égalité et de l'inégalité associeée à une autre considération, comme nous l'avons montré. Quant au rapport de neuf à trois, c'est la *trimultiplicité*. Et ils n'ont pas dérivé de nom pour cela, se contentant du premier. Cela est du ressort de celui qui a créé la langue.

Ou bien le <plus petit> ne nombre pas le plus grand, comme le rapport de deux à sept. Ils les ont alors décomposés à l'aide des parties qui nombrent à la fois sept et deux. Ils ne rencontrèrent pas un autre nombre, mais ils trouvèrent un. Ils ont alors dit ≪*le rapport de deux à sept est deux septièmes*≫. Puis, ils ont montré que les nombres les plus petits sont par rapport aux plus grands ou bien une partie ou bien des parties.

Puis, comme ils ont constaté que le nombre est du même genre que la grandeur parce qu'ils sont tous rapportés au genre de la quantité, ils ont également cherché cette idée <de rapport> dans les grandeurs. Ils ont alors trouvé, en plus de ces deux types, un autre type, car les grandeurs ne sont pas composées de parties indivisibles et leur division n'a pas de fin déterminée comme pour le nombre. Le nombre est <en effet> composé de parties non divisibles qui sont les unités; et pour tout couple de nombres différents, lorsqu'on ôte du plus grand tous les

Le Second Chapitre Sur L'evocation du Rapport,

De La Proportionnalite et De Leur <sens> Veritable

<La notion de rapport>[19]

L'auterur des *Éléments* a dit, à propos du sens véritable du rapport, qu'il est la $\pi\eta\lambda\iota\kappa o\tau\eta\zeta$[20] de la mesure de grandeurs homogènes, l'une par l'autre. Et on entend ici, par <grandeurs> homogènes, celles qui, si on multipliait l'une d'elles, elle pourrait dépasser l'autre, dans le cas où elles étaient inégales; comme, deux lignes, deux surfaces, deux solides et deux temps. Et, d'une manière générale, ce sont celles entre lesquelles a lieu la différence. En effet, la ligne et la surface n'ont pas entre elles de différences car la ligne correspond à une seule dimension, la surface à deux dimensions, le solide à trois dimensions et le temps est la mesure du mouvement. Ces genres sont sous le genre de la quantité. Et ces notions font partie de l'Art du Premier Sage[21]

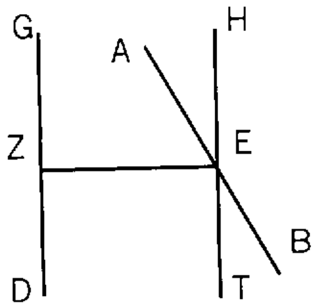
Cette définition ou cette description qu'a donnée Euclide est proche de la vérité, à condition que l'on prenne ses termes et qu'on les explicite.

En disant ≪*c'est une* $\pi\eta\lambda\iota\kappa o\tau\eta\zeta$ *de la mesure de deux grandeurs*≫, il a voulu dire, en fait, la relation existant entre les deux grandeurs, en tant qu'elle est une mesure; car, <étant données> deux grandeurs homogènes quelconques, elles sont soit égales soit ayant <entre elles> une différence. Puis, la différence a <différentes> définitions et subdivisions, et ce parce que la plus petite <grandeur> est, ou bien une partie de la plus grand,

(19 Ce paragraphe correspond à la définition 3 du Livre V des *Éléments.*

(20 Nous préférons ce terme grec à une expression française qui serait plus lourde et moins fidèle à l'idée exprimée par le mot arabe *ayiyya* qui signifie ≪la réponse à la question '*quel?*'≫.

(21 C'est à dire Aristote.



Et la droite EA coupe HT. Elle coupe donc la droite GD du côté de A.

Et c'est ce que nous voulions démontrer.

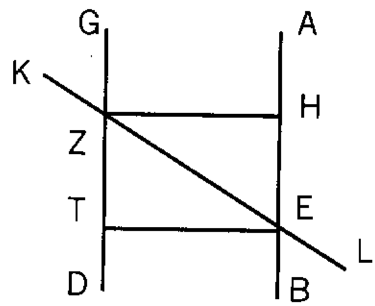
Telle est la démonstration véritable des principes des parallèles et des notions qui les concernet. A dire vrai, on devrait ajouter ces propositions au *livre des Eléments* dans l'ordre où elles ont été mentionnées et supprimer de ce livre ce qui entre dans les principes et qui se ramène à la Philosophie Premiře. Mais nous l'avons rapporté ici -bien qu'il soit étranger à l'art <de la Géométrie> proprement dit- parce que nous ne pouvions éviter de mentionner ces sections à cause de la difficulté du problème et du grand nombre de propos des gens à son sujet.

Il faut ajouter au début <de l'ouvrage> des principes dont nous avons dit que l'art en avait besoin, et ce afin que l'art soit précis et philosophique, et pour que celui qui l'étudie n'ait aucun doute et qu'il ne soit pas troublé.

Il est temps, pour nous, de conclure le premier *Livre* en glorifiant Dieu le très Haut et en priant sur le Prophète Muḥammad et sur l'ensemble de sa famille.

diculaire à AB, et c'est ZH.

La surface (ETZH) est à angles droits. Ses droites opposées sont donc égales. L'angle $\widehat{HE}$ est donc égal à $\widehat{EZ}$, et ils sont alternes. Et $\widehat{EZ}$ est égal à $\widehat{GZK}$.



$\widehat{GZK}$ est donc égal à $\widehat{AE}$, l'interne étant égal à l'externe.

Et $\widehat{EZ}$ avec $\widehat{EZ}$ sont égaux à deux droits. L'angle $\widehat{AE}$ avec $\widehat{EZ}$ sont donc égaux à deux droits.

Et c'est ce que nous voulions démontrer.

Nous avons donc exposé les propriétés des <droites> parallèles sans avoir eu besoin de la prémisse dont on demandait la démonstration et que <Euclide> avait postulée.

Et voici sa démonstration.

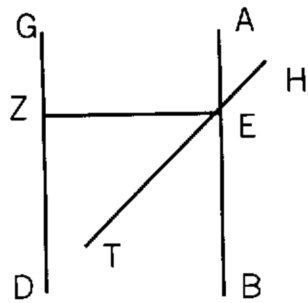
Proposition 8

C'est la <proposition> 36 des Éléments.

EZ est une ligne droite d'où sont menées les deux droites EA et ZG. Les angles $\widehat{AEZ}$ et $\widehat{GZE}$ sont plus petits que deux droits. Je dis qu'elles se rencontrent du côté de A.

Preuve

Nous prolongeons les deux droites d'une manière rectiligne. L'angle $\widehat{AE}$ sera alors plus petit que $\widehat{EZ}$. Nous prenons l'angle $\widehat{HE}$ égal à $\widehat{EZ}$. Les deux droites HET et GZD sont alors parallèles, comme l'a montré Euclide dans la proposition 28 du *Livre I*.



La droite EA coupe donc GZ alors que nous les avons supposées parallèles. Cela est impossible.

L'angle $\widehat{AE}$ n'est donc ni plus grand ni plus petit qu'un droit; il est donc droit.

Les droites AB et GD sont donc équidistantes.

Et c'est ce que nous voulions démontrer.

Proposition 7

C'est la <proposition> 35 <des Éléments>. Cette proposition se substitue aux deux propositons 29 et 30 du Livre I.

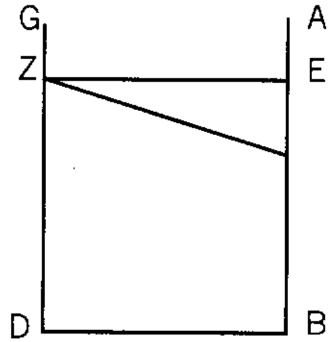
Si une ligne droite tombe sur deux droites parallèles, alors les deux angles alternes sont égaux, l'angle externe est égal à l'<angle> interne et les deux angles internes sont égaux à deux droits.

Exemple

Les droites AB et GD sont parallèles et la droite KZEL tombe sur elles. Je dis que les angles alternes $\widehat{LZ}$ et $\widehat{AE}$ sont égaux, les angles internes $\widehat{AE}$ et $\widehat{GZ}$ sont égaux à deux droits et l'angle externe $\widehat{GZK}$ est égal à l'angle interne $\widehat{AE}$.

Preuve

Nous menons du point E la perpendiculaire ET à GD. Elle est perpendiculaire à AB, car ils sont équidistants. Menons de Z une perpen-



Et si l'un des deux est plus grand que l'autre, nous séparons du plus grand un <segment> égal au plus petit et c'est BH, que nous avons séparé de BE. l'angle droit $\widehat{H}$ est alors égal à $\widehat{HB}$, qui est plus petit qu'un droit. Cela est impossible.

Donc le segment $\overline{B}$ est égal à $\overline{Z}$ et l'angle $\widehat{E}$ est droit.

Et c'est ce que nous voulions démontrer.

Proposition 6

C'est la <proposition> 34 des Eléments.

Toute parie de droites parallèles telles que les a définies Euclide- c'est à dire celles qui ne se rencontrent pas. sans autre condition- sont équidistantes.

Exemple: AB et GD sont parallèles. Je dis qu'elles sont équidistantes.

Preuve

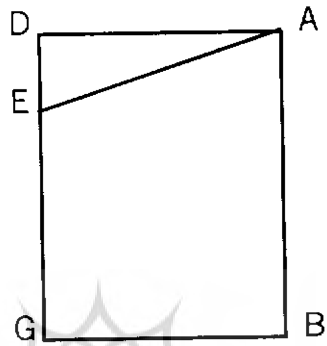
Nous repérons un point E et nous menons EZ perpendiculaire à DG. Si l'angle $\widehat{E}$ est droit, les deux droites sont équidistantes.

S'il n'est pas droit, nous menons EH perpendiculaire à EZ. Alors HET et GZD sont équidistantes, les deux droites BEA et TH sont concourants, et la distance entre EH et EA s'accroît jusqu'à l'infini, La distance entre EH et GZ est la même jusqu'à l'infini, elle n'augmente ni ne diminue. Alors la distance entre EA et EH finira par devenir plus grande que $\overline{E}$, qui est la distance entre les deux <droites> équidistantes.

$\overline{G}$ et $\overline{AD}$ égal à $\overline{BG}$.

Preuve

Si $\overline{A}$ n'était pas égal à $\overline{G}$, l'un des deux <segments> serait plus grand. Soit $\overline{d}$ le plus grand des deux. Nous séparons $\overline{GE}$ égal à $\overline{A}$ et nous joignons A à E.



L'angle $\widehat{BA}$ est alors égal à l'angle $\widehat{GE}$. $\widehat{BA}$ est plus petit qu'un droit, et $\widehat{GE}$ est plus grand qu'un droit parce qu'il est extérieur au triangle (AED); il est alors plus grand que l'angle $\widehat{D}$ qui est droit. Cela est impossible.

Le segment $\overline{A}$ est donc égal à $\overline{G}$. Et c'est ce que nous voulions démontrer.

Proposition 5

C'est la <proposition> 33 des Eléments.
Les deux droites AB et GL sont équidistantes. Je dis que toute droite perpendiculaire à l'une des deux est perpendiculaire à l'autre.
Preuve: nous menons du point E une perpendiculaire à GD, et c'est EZ. Je dis que l'angle $\widehat{E}$ est droit.

Preuve

Les deux droites AB et DG résultent nécessairement d'une perpendiculaire <commune> aux deux, comme nous l'avons montré, et c'est BD.

Si $\overline{B}$ est égal à $\overline{D}$, alors l'angle $\widehat{E}$ est droit.

Et si $\overline{HT}$ est plus petite que $\overline{E}$, alors les deux droites se rapprochent <l'une de l'autre>.

Par cette démonstration, $\overline{KL}$ doit être plus petite que $\overline{HT}$, sinon il en résulterait nécessairement une impossibilité première.

On a donc montré que si deux droites situées sur une surface plane se rapprochaient <l'une de l'autre> d'un côté, elles ne pourraient absolument pas s'écarter <l'une de l'autre> de ce côté, et il en serait de même si elles s'écartaient <l'une de l'autre>.

Sauf que cette démonstration n'est pas géométrique. C'est en fait une démonstration philosophique. Mais, on s'y est aidé d'exemples afin qu'elle soit plus évidente et plus claire pour celui qui n'a pas une bonne intuition.

Parmi les gens, certains disent que la distance entre un point sur une ligne <droite> et une autre ligne <droite> est la perpendiculaire menée de ce point vers la ligne <droite>. Mais la vérité n'est pas comme cela, car il peut arriver que la perpendiculaire menée du pied de la première perpendiculaire à la première droite ne soit pas égale à la première perpendiculaire. Alors la distance d'un point à son homologue ne serait pas la distance de son homologue à lui-même, et c'est impossible. Mais si les deux angles intérieurs sont égaux, l'inclinaison des deux droites ensemble par rapport à cette droite qui les joint est une même inclinaison. C'est, en vérité, elle et aucune autre qui sera la distance entre les deux <droites>.

Ces idées ont venues à l'esprit des anciens géomètres et c'est pourquoi ils ont postulé la proposition pour laquelle nous cherchons une démonstration.

Et puisqu'il a été démontré que si on suppose <donnée> une ligne droite et que l'on mène de ses deux extrémités deux perpendiculaires, elles seront telles que si l'on sépare d'elles deux segments égaux quelconques, la distance entre ces deux droites sera une perpendiculaire sur les deux. Les distances seront alors égales et les deux droites ne se rapprocheront ni ne s'écarteront <l'une de l'autre>. Appelons alors ces perpendiculaires des <droites> équidistantes.[18]

Proposition 4

C'est la <proposition> 32 des Eléments.

La surface (ABGD), a ses angles droits. Je dis que $\overline{AB}$ *est égal à*

(18 littéralement: "*en vis-à-vis*".

prenons sur AB un point E. Alors la distance entre E et la droite DG est le segment $\overline{E}$ et l'angle $\widehat{E}$ est égal à $\widehat{Z}$.

<Proposition β>

Quant <à savoir> comment on peut mener du point E à GD un segment tel que les deux angles intérieurs soient ègaux, cela incombe au géomètre et non au sage qui est chargé de la validation des principes de la Géométrie.

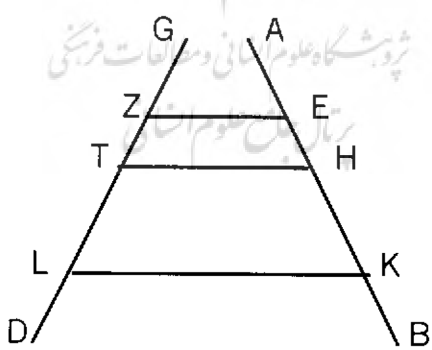
Quant <à savoir> s'il est possible de mener un segment ayant cette caractéristique, cela incombe à celui qui s'ccupe des principes.

<Preuve>

Sa démonstration est qu'il est possible de mener de E à GD une infinité de segments selon une infinité d'angles des deux côtés des deux droites, qui sont tous différents, <en étant> plus petits et plus grands. Et tout ce qui est mesurable contient cette notion, je veux dire la différence, des deux côtés, en petitesse et grandeur. Comme les grandeurs sont divisibles à l'infini, l'égalité devra donc avoir lieu nécessairement.

Nous séparons <de $\overline{AB}$ et $\overline{G}$ > $\overline{EH}$ et $\overline{ZT}$ égaux. Nous joignons H, T. L'angle $\widehat{H}$ est comme $\widehat{T}$, comme cela a été montré dans la première proposition. $\overline{HT}$ est donc la distance.

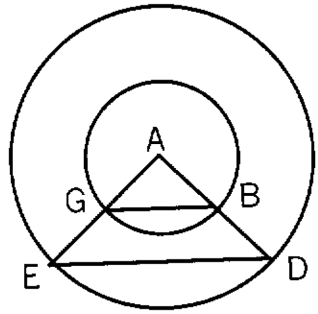
Si $\overline{HT}$ est plus grand que $\overline{E}$, alors les deux lignes <droites> s'écartent <l'une de l'autre>.



Nous séparons <de $\overline{A}$ et $\overline{G}$ > $\overline{HK}$ et $\overline{T}$ égaux, et nous joignons K à L. C'est la distance. Si $\overline{KL}$ était plus petite que $\overline{HT}$, les deux lignes <droites> se rapprocheraient <L'une de l'autre>. Or, elles s'écartent <l'une de l'autre>. Cela est une impossibilité première. Si elles étaient égales, il en serait de même.

<Proposition α>[17]

Les droites AB et AG se coupent au point A. Je dis qu'elles s'écartent et s'éloignent <l'une de l'autre> jusqu'à l'infini.



Nous considérons A un centre et, à la distance $\overline{A}$, le cercle (ABG). La distance entre les deux droites à leurs points de rencontre avec le cercle est le segment $\overline{BG}$.

Nous prolongeons d'une manière rectiligne AB jusqu'à D et nous traçons le cercle (ADE). Nous prolongeons AG d'une manière rectiligne jusqu'à ce qu'il coupe le cercle au point E. Nous menons DE. $\overline{D}$ est la distance entre les deux droites.

<Le fait que> le segment $\overline{D}$ est plus grand que $\overline{BG}$ <est une chose> première qui ne fait aucun doute lorsque on se représente les notions de cercle, d'angle et de ligne droite. Celui qui désire y apporter une démonstration aura nécessairement à recourir, au cours de cette démonstration, à une proposition qui se démontre à l'aide de ces notions. Ce sera alors une démonstration <selon un> cercle vicieux.

L'auteur des *Eléments* a bien fait de mettre au début de son ouvrage, parmi les propositions premières, celle qui dit que deux lignes droites ne peuvent entourer une surface, car celui qui connaît ses termes connaît nécessairement leur connexion. C'est donc une <proposition> première.

<Définition>

La distance entre deux lignes <droites> est le segment qui les joint et qui est tel que les deux angles intérieurs soient égaux.

Exemple

Deux lignes droites AB et GD sont sur une surface plane, et nous

---

(17 Nous utilisons une numérotation alphabétique pour les propositions non numérotées par Khayyām.

sont donc égaux. Et s'ils sont égaux, les deux angles sont égaux. Ils sont donc droits. Cela se voit grâce à un minimum de réflexion. Nous renonçons à <sa preuve> pour éviter des longueurs. Mais, cela n'empêche pas celui qui veut établir cela ici de le faire selon les critères mathématiques.

La négligence des Modernes dans la démonstration de cette prémisse est due à leur inattention au sujet de cette proposition lorsque son prédicat et son sujet sont sous leur véritable aspect. De nombreuses propositions premières ont échappé à ceux qui ont une intuition puissante et un esprit pénétrant, parce que la représentation du sujet et du prédicat est éloignée de leur esprit. En effet, le caractère premier de la proposition et sa vérité ne sont pas dans la représentation de son sujet et de son prédicat, car sa vérité et sa fausseté ne sont pas liées à sont sujet et à son prédicat mais à la relation entre le sujet et le prédicat et à rien d'autre. Si c'est ainsi, il n'est pas impossible que ce soit une proposition première que l'on a négligée pour cette raison. Comprends donc cela.

Ne vois-tu pas que celui qui se représente la réalité du cercle, la réalité de l'angle, la réalité du rapport des grandeurs sait, après un minimum de réflexion, que le rapport des angles au centre est égal au rapport des arcs qui les sous-tendent? C'est ce qu'a montré Euclide dans la proposition 36 du *Livre VI*, qui est la dernière proposition de ce livre[16].

Parmi les propositions premières, il y a également celles qui s'éclaircissent après que l'on se soit représenté ses parties par une forme de preuve visant à rappeler et à attirer l'attention et non à rechercher le moyen terme; car ce qui a besoin du moyen terme s'acquiert <par un raisonnement>. Comprends donc <cela>.

* * *

Et voici des propositions qui, bien qu'éloignées de ce que nous proposions <de fair> dans cette épître, renferment une grande richesse et sont d'une utilité considérable. C'est pour cela que nous les avons mentionnées ici. J'expliquerai encore davantage cette notion afin que le plus grand nombre de gens la comprenne.

(16 C'est à dire la proposition 33 dans la numérotation de Heiberg. Cf. B. Vitrac: *Euclide, les Eléments, Volume 2, Livres V à IX*, Paris, Presses Universitaires de France, 1994, pp. 240-244.

Nous joignons G, K et D, K. Le segment GZ est égal à ZD et ZK est commun et il est perpendiculaire. Les deux bases GK et KD sont donc égales et les deux angles $\widehat{ZGK}$ et $\widehat{ZD}$ sont égaux. Il reste l'angle $\widehat{HGK}$ égal à $\widehat{KD}$. Or les deux angles $\widehat{GKZ}$ et $\widehat{KD}$ sont égaux. Il rest deux angles $\widehat{GKH}$ et $\widehat{DK}$ égaux. Et le segment $\overline{GK}$ est égal à $\overline{D}$. Donc $\overline{GH}$ sera égal à $\overline{D}$ et $\overline{HK}$ sera égal à $\overline{KT}$.

Si les deux angles $\widehat{AG}$ et $\widehat{BD}$ sont droits alors la proposition est vraie. S'ils ne sont pas droits, alors chacun d'eux est ou bien plus petit qu'un droit ou bien plus grand.

Supposons d'abord qu'ils soient, <chacun>, plus petits qu'un droit.

La surface (HD) se superpose à la surface (GB). ZK se superpose alors à ZE et HT à AB. Alors $\overline{HT}$ sera égal au segment $\overline{NS}$, car l'angle $\widehat{HGZ}$ est plus grand que l'angle $\widehat{AG}$. Le segment $\overline{HT}$ est donc plus grand que $\overline{A}$.

De même, si les deux droites sont prolongées de cette manière, à l'infini, chacun des segments qui <les> relie sera plus grand que l'autre, et ainsi de suite.

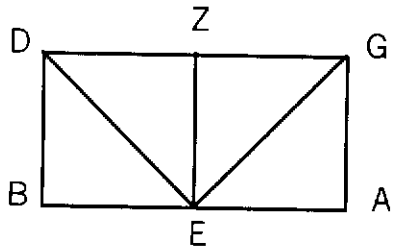
Les deux droites AG et BD s'éloignent donc <l'une de l'autre>.

De même, si AG et BD sont prolongées, de l'autre côté, d'une manière rectiligne, leur éloignement sera étabi par une démonstration semblable à celle-ci. Et la situation des deux côtés est nécessairement semblable lors de la superposition.

Il y aurait alors deux lignes droites coupant une droite selon deux angles droits et dont la distance entre elles augmenterait ensuite des deux côtés de cette droite; ce qui est une impossibilité première lorsqu'on se représente la <propriété d'être> rectiligne et que l'on appréhende ce qu'est la distance entre deux droites. Et c'est ce dont s'est préoccupé le philosophe.

Et si chacun des deux <angles> était plus grand qu'un droit, alors le segment $\overline{HT}$ serait, lors de la superposition, égal à L, qui est plus petit que $\overline{A}$. Il en est ainsi pour tous les segments qui font la jonction de cette manière. Les deux droites se rapprochent donc <l'une de l'autre>. Et si on les avait prolongées de l'autre côté, elles se seraient également rapprochées <l'une de l'autre> à cause de la similitude des cas des deux côtés lors de la superposition. C'est ce que tu peux comprendre avec un minimum d'observation et d'investigation. Et cela est impossible d'après ce que nous avons dit.

Mais s'il n'est pas possible que deux degments soient différents, ils



Le triangle est donc égal au triangle et tous les angles et les côtés homologues sont <respectivement> égaux. $\overline{GZ}$ sera alors égal à $\overline{Z}$, et l'angle $\widehat{GZ}$ égal à $\widehat{DZ}$. Ils sont donc droits.

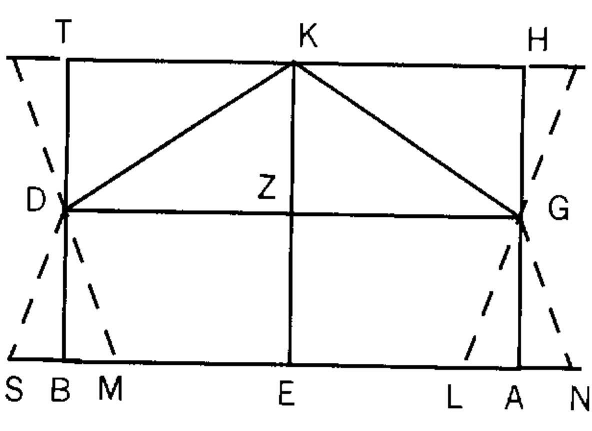
Et c'est ce que nous voulions démontrer.

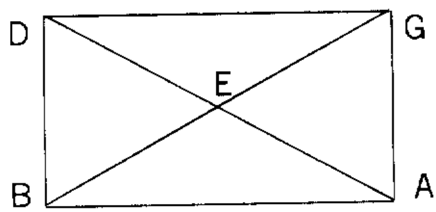
Proposition 3

C'est la <proposition> 31 des Eléments.
Nous reproduisons la figure (ABGD).
Je dis que les deux angles $\widehat{AGD}$, $\widehat{BDG}$ sont droits.

Preuve

Nous divisons $\overline{A}$ en deux moitiés en E, nous menons la perpendiculaire EZ, nous la prolongeons d'une manière rectiligne et nous considérons ZK égal à ZE. Nous menons HKT perpendiculaire à EK, et nous prolongeons $\overline{A}$ et $\overline{B}$, qui couperont HKT en H et T parce que AG et EK sont parallèles et HK et ZG sont également parallèles. Or la distance entre deux parallèles quelconques ne varie pas. Donc $\overline{A}$ se prolonge à l'infini parallèlement à EK, et HK se prolonge à l'infini parallèlement à ZG. Elles se rencontreront donc par nécessité première.





Les angles $\widehat{EA}$, $\widehat{EB}$ sont alors égaux. Les segments $\overline{A}$ et $\overline{E}$ sont donc égaux[14].

Il reste $\overline{GE}$ et $\overline{E}$ égaux. Les angles $\widehat{EG}$ et $\widehat{ED}$ et sont alors égaux. D'où $\widehat{AG}$ égal à $\widehat{AD}$.

Donc les deux angles $\widehat{AG}$ et $\widehat{GD}$ sont égaux.

C'est ce que nous voulions démontrer.

De là, il apparaît que si deux angles $\widehat{GA}$ et $\widehat{DB}$ guelconques sont égaux, et si les deux segments $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont égaux, les deux angles $\widehat{BD}$ et $\widehat{AG}$ doivent être égaux.

Proposition 2

G'est la <proposition> 30 des Eléments[15].
Nous reproduisons la figure (ABGD), et nous divisons AB en deux moitiés en E et nous menons EZ perpendiculaire à AB.

Je dis que $\overline{GZ}$ est égal à $\overline{ZD}$ et EZ est perpendiculaire à GD.

Preuve

nous menons GE et ED. Le segment $\overline{A}$ est égal à $\overline{B}$, $\overline{A}$ est égal à $\overline{E}$ et les angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ sont droits. Les deux bases $\overline{GE}$ et $\overline{E}$ sont donc égales, et les deux angles $\widehat{AE}$ et $\widehat{BE}$ sont égaux. Il reste les <angles> $\widehat{GE}$ et $\widehat{ZE}$ égaux. Le segment $\overline{GE}$ est égal à $\overline{E}$, EZ est commune et les deux angles sont égaux.

(14 Littéralement: "*les deux droites*". Le mot "*droite*" sera remplacé par "*segment*" chaque fois qu'il s'agira de "*segment de droite*".

(15 Il s'agit ici, et dans la suite du texte, des *Eléments* d'Euclide.

bien qu'il ait mentionné des <notions> premières dont on peut trés bien se passer, alors qu'il ne fallait aboslument pas les mentionner ou les mentionner toutes sans en excepter aucune, fussè-t-elle évidente.

Nous avons déjà fait état précédemment de la cause de l'erreur d'Abū ᶜAlī[11]; il n'est donc pas nécessaire de la mentionner une seconde fois.

Et nous devons admettre vingt-huit propositions du *Livre des Eléments* car elles n'ont pas besoin de cette prémisse. Celle qui en a besoin est en fait la vingt-neuvième dans laquelle nous voulons présenter les principes des lignes parallèles.

Que celui qui le veut adopte la première proposition de ce chapitre à la place de la vingtneuvième du *Premier Livre* afin qu'elle puisse s'intégrer à l'ensemble du livre si Dieu le veut.

C'est le moment de commencer la démonstration véritable et causale de cette proposition avec l'aide de Dieu et la réussite <qu'il assure>, car il guide et comble celui qui s'en remet à lui.

* * *

Proposition 1

C'est la <proposition> 29 du Livre I[12]
La droite $\overline{AB}$ est donnée. Nous menons $\overline{AG}$ une perpendiculaire à $\overline{AB}$ et $\overline{BD}$ une perpendiculaire à $\overline{AB}$ égale à la droite $\overline{AG}$. Elles sont parallèles, comme l'a montré Euclide dans la proposition 28.
Menons $\overline{G}$.
Je dis que l'angle $\widehat{AGD}$ est égal à l'angle $\widehat{BDG}$.

Preuve[13]

Nous joignons G, B et A, D. Le segment $\overline{A}$ est égal à $\overline{B}$, et $\overline{A}$ est commune, et les deux angles $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$ sont droits. Les deux bases $\overline{A}$ et $\overline{GB}$ sont donc égales et tous les angles sont égaux à tous les angles.

(11 C'est à dire Ibn al-Haytham.

(12 Littéralement ≪ *La première proposition et c'est la kt du Livre a*≫. Pour faciliter la lecture, nous avons transcrit la numérotation alphabétique en chiffres arabes. Nous avons introduit les mêmes transcriptions dans les autres propositions, sans le signaler.

(13 Littéralement: "*Sa preuve*".

siper les doutes, il incombait de démontrer de semblables propositions et de les étudier attentivement, et non pas de transformer la <preuve> directe en une <preuve> par l'absurde et la <preuve> par l'absurde en une <preuve> directe. Celui qui connaît véritablement la preuve d'une chose s'en contente, qu'elle soit directe ou par l'absurde, car, que signifie la transformation d'une preuve directe en une preuve par l'absurde alors qu'on laisse de semblables <propositions> sans démonstration?

Quant à la cause de l'erreur des Modernes dans la démonstration de cette prémisse, elle est dans leur négligence des principes empruntés au Sage et dans le fait qu'il se sont appuyés sur la part qu'en a donné Euclide au début du *Premier Livre.* Or cette part est insuffisante, car les propositions dont on a besoin comme prémisses pour la Géométrie sont nombreuses et parmi elles, <celles-ci>: ≪*Les grandeurs se divisent à l'infini et ne sont pas composées d'indivisibles*≫. C'est là une propositions philosophique dont a besoin le géométre dans son Art. Parmi les géomètres, il y en a qui ont tenté de démontrer cela du point de vue de leur art, sans se rendre compte que c'étail <là> une démonstration en <forme de> cercle vicieux. Mais, il est possible de démontrer cette proposition par une démonstration du *que* et non par une démonstration du *pourquoi.* En vérité, cette proposition est une des prémisses de la Géométrie et non une de ses parties.

Ou encore: il est possible de mener une droite jusqu'à l'infini. Mêmes s'il a établi que les corps étaient finis et qu'en dehors d'eux il n'y avait ni vide ni plein, Le Philosophe[10] a montré comment il est possible au géomètre de dire: ceci est infini et cela se prolonge jusqu'à l'infini.

Ou encore: deux lignes droites qui se coupent s'écartent <l'une de l'autre> au fur et à mesure qu'elles s'éloignent de l'angle d'intersection.

Ou encore: deux lignes droites qui se rapprochent <L'une de l'autre> se coupent et deux droites qui se rapprochent ne peuvent s'écarter pendant leur rapprochement.

Ces dernières propositions peuvent être établies par une démonstration du *que*, selon la méthode géométrique, comme vous l'apprendrez bientôt. Ou encore: <étant donné> deux grandeurs finies dont l'une excède l'autre, la plus petite peut-être multipliée jusqu'à devenir plus grande que la plus grande. C'est probablement là une proposition première du genre de celles qu'on ne peut appréhender qu'après réflexion.

Il dxiste des prémisses premières plus évidentes que celles-ci, mais Euclide n'a pas mentionné la plupart d'entre elles au début de l'ouvrage

(10 C'est à dire Aristote.

d'autres éclaircissements. C'est cela qui a amené Euclide à postuler cette prémisse et à fonder sur elle <d'autres choses>.

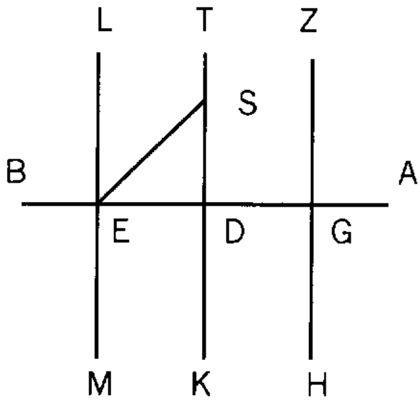
Par ma vie, ce sont là des propositions qui relèvent de l'imagination et la raison y trouve une aide car elles sont vraies et peuvent avoir une quelconque démonstration, même si c'est une pseudo justification, comme nous l'avons indiqué. Mais, c'est une démonstration non satisfaisante et qui, à tous égards, n'emporte l'adhésion car elle postule un certain nombre de choses qui ne sont pas premières et qui n'ont pas été démontrées.

Et puis, comment Euclide peut-il justifier le fait de postuler cette proposition, à partir de cette croyance, alors qu'il a démontré de nombreuses choses bien plus simples que celle-ci, comme sa démonstration, dans le *Troisième Livre*, du fait que, dans des cercles égaux, des angles au centre égaux déterminent sur les circonférences des arcs égaux? Cette notion est très bien connue du point de vue des principes, car les cercles égaux s'appliquent les uns sur les autres et il en est de même des angles égaux; ce qui <entraîne> que les arcs coïncident nécessairement les uns avec les autres et sont donc égaux. Celui qui a eu à démontrer des choses semblables se trouve dans l'obligation de démontrer celle-là.

Et, par exemple, sa démonstration, dans le *Cinquième Livre*, du fait que les rapports d'une même grandeur à deux grandeurs égales sont les mêmes. Car si le rapport a lieu dans la grandeur en ce qu'elle est une grandeur, comment cela a-t-il besoin d'une démonstration puisque deux grandeurs égales sont les mêmes du point de vue de la notion de grandeur, sans aucune différence entre elles? Selon ce point de vue, elles sont exactement une <même chose> sans aucune altérité entre elles que l'altérité du nombre.

Il a également omis, dans les livres sur les solides, plusieurs choses qui avaient besoin de démonstrations, mais sans qu'elles soient des prémisses importantes, auquel cas nous les aurions démontrées. Peut-être aurons-nous l'occasion, par la suite, de nous y intéresser et de corriger ces livres avec l'aide de Dieu.

<Parmi> ceux qui ont examiné son ouvrage, il y a al-Hajjāj qui était un traducteur à qui il n'appartenait pas de le corriger. Quant à Thābit, même s'il a porté quelques améliorations, son jugement est celui d'un traducteur. A ceux qui, comme Héron le Mécanicien, Eutocius et d'autres parmi les Anciens ou Abū al-^{c}Abbās an-Nayrīzī et d'autres parmi les Modernes, voulaient expliquer son ouvrage et dis-



La droit DT ne rencontre donc pas la droite ZG car si elle la rencontrait l'une des deux ou toutes les deux pencheraient vers l'un des côtés de la droite AB. Il en est de même de HG, KD et ME.

On suppose $\overline{G}$ et $\overline{D}$ égaux.

Donc la surface (ZGDT), c'est à dire cette portion de plan séparée par ces deux droites, se superpose à la surface (TDEL).

Si les deux droites ZG et TD se rencontraient, alors les deux droites TD et EL se rencontreraient en ce même point, Il en serait de même pour l'ensemble des droites perpendiculaires si leurs bases sont égales.

Il en serait de même aussi de l'autre côté, c'est à dire pour GH, DK et pour leurs semblables. De cela découle une impossibilité première.

Pour cette même raison, les droitex ZG et TD ne se rapprochent pas et ne s'écartent pas <l'une de l'autre>, car le rapprochement et l'écartement impliquent aussi cette impossibilité.

Ces lignes <droites> perpendiculaires à AB sont donc parallèles et les distances entre elles sont égales, c'est à dire qu'elles ne diminuent pas et qu'elles n'augmentent pas.

Alors, si nous menons une ligne inclinée sur l'un des deux côtés, comme la droite ES, sur le côté AE, elle rencontrera nécessairement TD, car ES et EL s'éloignent <l'une de l'autre> et la distance entre elles peut atteindre <toute> limite supposée. Et l'angle $\widehat{SE}$ est inférieur à un droit. Les angles $\widehat{SE}$ et $\widehat{SD}$ sont donc inférieurs à deux droits.

C'est à partir de cela qu'Euclide a cru que la raison de la rencontre des deux droites ES et SD provenait du fait que les deux angles étaient inférieurs à deux droits. Cette croyance est exacte, mais on ne peut fonder <quelque chose> sur elle qu'après <avoir fourni>

Le Premier Chapitre
Sur Le Sens Veritable Des Paralleles
Et <sur> L'evocation Du Doute Bien Connu

Au nom de Dieu, Clément et Miséricordieux. Le succès et la préservation <de l'erreur> sont aux mains de Dieu.

Nous devons nous assurer que la raison pour laquelle Euclide a omis la démonstration de cette prémisse et qu'il l'a postulée, est qu'il se basait sur les principes empruntés au Sage[9] à propos de la notion de ligne droite et d'angle à côtés rectilignes, lorsqu'il pensa que la cause de la rencontre des deux lignes droites étail cette notion qu'il avait postulée.

Exemple de cela

La ligne AB est droite et la ligne <droite> ZGH lui est perpendiculaire au point G. Il en est de même de TDK au point D et de LEM au point E.

L'angle droit est égal à ses semblables. La droite ZG ne penche donc vers AB d'aucun côté et elle s'étend à l'infini dans les deux directions. Il en est de même de DT.

(9 C'est à dire Aristote.

la proportionnalité et ses <différents> états.

Comme nous l'évoquerons dans le second chapitre de cette épître, la proportionnalité n'a pas de réalité connue sous une forme géométrique, et nous n'avons trouvé personne, parmi les Anciens et les Modernes, qui ait dit, sur la notion de proportionnalité et sur sa réalisation, des paroles convaincates et philosophiques. J'avais trouvé quelque chose attribué à Abū l-^{c}Abbās an-Nayrīzī <dans lequel> il a parlé des notions de rapport et de proportionnalité en s'y étendant; et j'avais cru que cela était suffisant. Mais lorsque je l'ai parcouru et que j'y ai réfléchi, il s'est avéré qu'il avait eu besoin d'un certain nombre de prémisses qu'il avait supprimées sans les mentionner. Il étail également tronqué, à moins que le défaut ne provienne du relieur. Nous en indiquerons les <omissions>, si Dieu veut.

Il a également postulé, au début de ce <*Cinquième*> *Livre,* quelque chose sur le rapport composé, sans démonstration, en disant: "<*étant donné*> *trois grandeurs quelconques, le rapport de la première à la troisième est composè du rapport de la première à la seconde et du rapport de la seconde à la troisième*".

Lorsque j'ai vu, à ces trois endroits, les défauts non corrigés comme ils doivent l'être, j'ai entepris de les corriger. A présent, je sollicite de Dieu le meilleur <des choses> et l'aplanissement des difficultés, et je lui demande le succès et la protection.

J'ai composé cette épître en trois chapitres: le premier d'entre eux sur les parallèles et la résolution de l'ambiguïté qui est en elles, le second sur la <nature> véritable du rapport entre grandeurs et de la proportionnalité des grandeurs, le troisième sur le rapport composé et ce qui s'y rattache.

Que Dieu nous accorde son aide, en tout état de cause, il est notre recours, celui qui nous comble et celui qui nous aide le mieux.

cette surface dans un corps, ou qu'elle est elle-même dans un corps sans qu'il y ait préalablement une surface. Comment alors le mouvement lui serait-elle permis si elle est abstraite de son lieu? Ou encore: comment la ligne peut-elle résulter du mouvement du point alors qu'elle est antérieure au point par l'essence et par l'existence?

A celui qui dirait qu'Euclide a défini la sphère au début du *Onzième Livre* par quelque chose de semblable, en disant "*la sphère résulte de la rotation d'un demi cercle jusqu'à ce qu'il revienne au point de départ*", nous répondons en disant <ceci>: la définition véritable et claire de la sphère est connue, à savoir que ≪*c'est une figure solide entourée par une seule surface avec, en son intérieur, un point tel que toutes les lignes droites qui en sortent, vers la surface qui l'entoure, sont égales*≫.

Euclide s'est écarté de cette description pour ce qu'il a dit par une démarche globale et simplificatrice car, dans ces livres où il évoque les corps, il s'est permis beaucoup de simplifications en comptant sur l'entraînement de l'apprenant au moment où il les aborderait. <D'ailleurs>, si cette description avait un sens, on aurait défini le cercle en disant: le cercle est une figure plane résultant de la rotation d'une ligne droite dans une surface plane de sorte que l'une de ses deux extrémités soit fixée en son endroit et que l'autre aboutisse <là> où commence le mouvement. Mais, comme on s'est écarté de ce type de description à cause du mouvement, et du fait que l'on a pris comme principe ce qui n'a pas à intervenir dans l'art, nous devons, <quant à nous> éliminer ces traces et ne pas contredire les fondements de la démonstration et les règles universelles énoncées dans les livres de Logique.

De plus, la définition de la sphère par Euclide n'est pas comme la définition de cet homme parce que Euclide a défini quelque chose d'une manière non satisfaisante certes, mais cette chose est connue de bien d'autres manières et sa définition blâmable ne peut pas devenir une prémisse à quelque chose d'important, puisque on peut s'écarter de sa définitaion pour une autre définition meilleure qu'elle.

Mais, cet homme a innové dans ce type de définition répréhensible afin d'en faire une prémisse pour affirmer quelque chose qui ne peut l'être que par la démonstration. Il y a donc entre les deux hommes une différence à propos des deux définitions.

Ce doute se trouve au début du *Premier Livre* <des *Eléments*>.

Quant au doute qui est au début du *Cinquième Livre*, il se situe là où il a mentionné le rapport et ses accidents et <là où> il a mentionné

Mais, aucun d'entre eux n'a fourni une démonstration limpide. Chacun d'entre eux a plutôt introduit une prémisse dont le postulat n'est pas plus simple que celui-ci. Et n'étaient le grand nombre de copies de ces livres et le grand nombre de ceux qui les utilisent et qui les étudient, je les aurais présentés ici et j'aurais montré, <à chaque fois>, le type de prémisse et l'erreur <qui en découle>. Mais c'est très facile de prendre connaissance de cela à partir de leurs écrits.

J'ai <également> vu un écrit d'Abū ^{c}Alī Ibn al-Haytham, que Dieu lui accorde sa miséricorde, intitulé "*Résolution des doutes du Premier Livre*"[8]. Je n'ai pas douté qu'il se soit occupé de cette prémisse et qu'il l'ai démontrée. Lorsque je l'ai parcouru, en m'en réjouissant, j'ai découvert que l'auteur se proposait de mettre cette prémisse au début du livre parmi l'ensemble des principes qui n'ont pas besoin de démonstration. Il s'y est alors pris d'une manière immodérée en changeant la définition des parallèles et il fit des choses surprenantes toutes étrangères à l'Art lui-même: entre autres, le fait de dire que lorsque une ligne droite se meut perpendiculairement à une autre ligne, que dans son mouvement, son orthogonalité est conservée sur cette ligne, et qu'elle engendra à l'aide de son autre extrémité, une ligne droite, alors la ligne engendrée est parallèle à la ligne immobile. Puis, il prend ces deux lignes, il les tord, il les fait mouvoir et il introduit à leur sujet plusieurs considérations toutes étrangères <à l'Art>, afin de légitimer cette prémisse au début <du livre> et ce après avoir commis ces actes pénibles et répréhensibles.

C'est là un propos qui n'a absolument aucun rapport avec la géométrie et ce pour plusieurs raisons, entre autres <celles-ci>: comment la ligne peut-elle se mouvoir sur les deux lignes en conservant sa verticalité et quelle preuve <a-t-on> que cela est possible? Ou encore: quel rapport y a-t-il entre la géométrie et le mouvement, et quelle est la signification du mouvement? Ou encore: il est évident pour les spécialistes que la ligne est une largeur qui ne peut être ailleurs que dans une surface et

---

islamiya [la théorie des parallèles dans la géométrie islamique], Tunis, Bayt al-ḥikma, 1988. Pour la traduction française et l'analyse mathématique de ces mêmes textes, voir K. Jaouiche: *La théorie des parallèles en pays d'Islam*, Paris, Vrin, 1986. Voir également Nasser Kanani: ^{c}Omar Khayyām and the parallel Postulate, *Fahrang*, Vol. 10, **29-32**, 2000, pp. 107-124.

(8 Ibn al-Haytham: *Kitāb fī ḥall shukūk Uqlīdis fī Uṣūl wa sharḥ ma ^{c}ānīh* [Livre sur la résolution des doutes <du *Livre*> *des Eléments* d'Euclide et sur l'explication de ses notions], F. Sezgin (édit), Frakfurt, Institut für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften, 1985,

et en particulier <celles> du *Livre des Eléments* sur la géométrie, car elles sont à l'origine de toutes les mathématiques et leurs principes sont ceux de l'ensemble des autres <sciences>.

Quant au point, à la ligne, à la surface, à l'angle, au cercle, à la rectitude de la ligne et de la surface, ainsi que d'autres principes, c'est au spécialiste de la science universelle de la Philosophie que revient leur établissement et leur définition véritable. Il en est de même de leurs prémisses qui ne sont pas premières, comme la division infinie des grandeurs et le fait de mener de tout point donné une ligne droite à un autre point, et toute autre prémisse mentionnée et qui n'est admise que par la démonstration, Il incombe aussi au philosophe de les établir. Quant aux prémisses telles que <celles relatives au> carré, au pentagone, au triangle et 'autres <figures>, l'auteur du livre les a mises en premier pour définir le nom et rien d'autre, puisque il les établira lui-même et il les justifiera dans son livre.

<Par contre>, il a énoncé une prémisse importante qu'il n'a pas démontrée, et c'est celle ou il dit: deux lignes droites quelconques qui coupent une ligne droite en deux points, en sortant d'un même côté selon <deux angles> plus petits que deux angles droits, se rencontrent de ce côté. Il l'a en fait postulée alors que c'est une question géométrique qu'il faut absolument démontrer. Elle est nécessaire au géomètre, qu'il le veuille ou non, et il ne peut fonder sur elle quoi que ce soit qu'aprés sa démonstration.

Puis, j'ai vu qu'un groupe <de gens>, parmi ceux qui ont étudié son livre et qui ont résolu ses doutes, n'a absolument pas abordé cette notion à cause de sa difficulté, comme Héron[4] et Eutocius[5] parmi les Anciens. Quant aux Modernes, un groupe d'entre eux en a entrepris une démonstration, comme al-Khāzin, ash-Shannī, an-Nayrīzī[6] et d'autres[7]

(4 Héron (le s. av. J. C.) est l'auteur d'un ouvrage sur les *Eléments* d'Euclide que les traducteurs arabes ont intitulé *Kitāb ḥall shukūk Uqlīdis* [Livre sur la résolution des doutes du <*Livre*> d'Euclide]. Voir F. Sezgin: *Geschichte des Arabischen Schrifttums*, Band V, Leiden, Brill, 1974, p. 153.

(5 Eutocius (Ve s) est l'auteur d'une rédactiondes *Coniques* d'Apollonius que les frères Banū Mūsā (IXe s.) ont été les premiers à avoir utilisée. Il est également l'auteur du *Sharḥ Kitāb Arshimīdis fil-kura wa l-usṭuwāna* [Commentaire sur le *Livre de la sphère et du cylindre* d'Archimède]. Voir F. Sezgin: *Geschichte des Arabischen Schrifttums*, op. cit., p. 128.

(6 F. Sezgin: *Geschichte des Arabischen Schrifttums*, op. cit., p. 352 (ash-Shannī), pp. 298-299 et pp. 305-307 (al Khaāzin), pp. 283-285 (an-Nayrīzī).

(7 Pour l'édition critique des principaux textes de mathématiciens ayant étudié le postulat des parallèles, voir K. Jaouiche: *Naẓariyat al-mutawāziyāt fī l-handasa al-*

L'établissement et l'acquisition des sciences à l'aide des preuves véritables est ce qui s'impose à celui qui est à la recherche du salut et du bonheur èternel.

<Cela est> particulièrement <vrai> pour les choses universelles et pour les lois à l'aide desquelles on accède, selon la capacité de l'homme, à la résurrection, à l'affirmation de l'âme et à sa pérennité, à l'acquisition des attributs du Maître de l'existence-que ses privilèges soient élevés- et de ceux des anges, ainsi qu'à l'organisation des gens et à l'affirmation de la prophétie et du Maître obéi par les hommes, celui qui leur ordonne et qui leur interdit, avec l'autorisation de Dieu le très haut.

Quant aux choses particulières, elles ne sont pas limitées et leurs causes sont infinies. Les esprits créés ne les appréhendent absolument pas, et on ne connaît d'elles que ce qui est saisi par la sensation, par l'imagination et par la conjecture.

La partie de la philosophie appelée *Mathématique* en est la partie la plus simple à appréhender, à la fois par représentation et par adhésion. Sa partie numérique, elle, est une chose très claire. Quant à sa partie géométrique, presque rien n'en échappe également à celui qui a une disposition naturelle saine, un esprit pénétrant et une bonne intuition, Et cette partie de la philosophie est utile comme exercice, stimulante pour l'esprit, et elle habitue l'âme à exécrer ce qui n'a pas de démonstration, et ce à cause de sa simplicité, de la facilité de ses démonstrations, de l'aide que procure l'imagination à la raison et du peu de divergence entre elle et <les résultats de> la conjecture.

Il est connu, d'après le *Livre de la démonstration*[3], de la science de la logique, que tout art démonstratif possède un sujet dans lequel on cherche ses accidents propres et les autres, ainsi que des prémisses d'où sont tirées ses démonstrations, et qui sont soit premières, comme le tout est plus grand que la partie, soit démontrées dans un autre art, soit des postulats. Et il n'incombe absolument pas à cet art d'établir l'un quelconque de ceux-ci; mais il lui incombe de définir son sujet et ces prémisses.

D'autre part, même s'il n'est pas possible à l'art de définir son sujet et ses cas, selon une définition véritable, il lui incombe de les décrire selon une description satisfaisante, Ces notions sont longuement exposées dans le *Livre de la démonstration* sur l'art de la Loqique; que l'on s'y réfère.

Je ne cesse d'être très attentif à l'exmen des prémisses de ces sciences à leur vérification et à la distinction de leurs parties, les unes des autres,

(3 Il s'agit des *Seconds Analytiques* d'Aristote.

Épître
Sur L'explication des prémisses problématiques Du Livre D'Euclide

En Trois Chapitres

Rédaction Du Maître, Du guide Le Plus Éminent, De L'autorité En Matière De vérité, Abū L-fatḥ ᶜOmar Ibn Ibrāhīm Al-Khayyāmī[1]

<Introduction>[2]:

Au nom de Dieu, le Clément, le Miséricordieux.

Gloire à Dieu, maître de la miséricorde et du bienfait. Que le salut soit sur ses serviteurs qu'il a choisis et plus particulièrement sur le seigneur des prophètes, Muḥammad, et sur sa pure famille dans son ensemble.

(1 La première version de ce travail a fait l'objet d'une prépublication qui a bénéficié des remarques et des suggestions de B. Vitrac et de M. Guillemot. Qu'ils en soient remerciés ici. Cf. A. Djebbar: *L'émergence du concept de nombre réel positif dans l'épître d'al Khayyām (1048-1131), sur l'explication des prémisses problématiques du Livre d'Euclide,* introduction et traduction française, Paris, Université Paris Sud, Prépublication Mathématiques d'Orsay, n° 97-39, 1997.

(2 Les mots ou les phrases entre <...> ne sont pas dans le texte arabe. Ils ont été ajoutés dans la traduction pour en faciliter la compréhension.

culé au Maghreb et qu'il a été étudié, en particulier par Ibn Mun^{c}im (m. 1228). Mais l'ouvrage de géométrie de ce dernier auteur n'a pas encore été retrouvé[10].

En ce qui concerne la traduction française de l'épître de Khayyām que nous allons présenter, elle a été réalisée à partir de l'édition critique faite par A. I. Sabra[11]. *Mais nous avons eu consulter les deux copies connues de cette épître pour la compréhension mathématique de certains passages*[12].

* * *

---

quiconcerne la théorie des parallèles, la découverte de l'ouvrage d'Ibn Sartāq (XIIIe-XIVes s.), *Kitāb al-ikmāl* [Livre de la complétude], qui est une rédaction de *l'Istikmāl* d'al-Mu'taman, montre que ce dernier a également étudié le fameux postulat. Voir A. Djebbar: La rédaction de l'Istikmāl d'al-Mu'taman (XIe s.) par Ibn Sartāq, un mathématicien des XIIIe-XIVe siècles, *Historia Mathematica* **24** (1997), pp. 185-192.

(10 Il s'agit d'un ouvrage intitulé *Tajrīd akhbār kutub al-handasa ^{c}alā ikhtilāfi maqāṣidihā* [Livre sur l'abstraction de matériaux des livres de géométrie sans distinction de leurs buts <respectifs>].

(11 A. I. Sabra: *Omar Khayyam, Explanation of th Difficulties in Euclid's Postulates (Risâla fi sharḥ mâ ashkala min musâdarât Kitâb 'Uqlîdis)*, édition critique, Alexandri, 1961.

(12 Ms. Paris, B. N. 4946, ff. 38b-73b; Ms. Leiden, Or 199, ff. 75b-100b.

bution de Khayyām dans ce chapitre a consisté, grâce à l'introduction de la notion *d'unité divisible*, d'associer à chaque rapport une grandeur dont la mesure (par rapport à l'unité choisie) va devenir plus tard la *valeur* de ce rapport, c'est à dire un nombre auquel peuvent s'étendre les opérations arithmétiques classiques.

Comme pour les autres chapitres, la contribution de Khayyām se rattache à une tradition déjà ancienne puisque, déjà au IXe siécle, Thābit Ibn Qurra s'était préoccupé de justifier les opérations sur les rapports qui servaient aux calculs des astronomes de son époque. On sait en effet qu'il a publié sur ce sujet deux ouvrages importants Le premier est intitulé *Kitāb fī sh-shakl al-mulaqqab bi l-qaṭṭ ā* ᶜ [Livre sur la figure appelée sécante][6] et le second *Risāla ilā ᶜallimīn fī n-nisba al-mu'allafa* [Epître à ceux qui étudient le rapport composé][7]. Dans ce même domaine, la contribution la plus importante après celle d'Omar Khayyām est celle de Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī, *Kitāb ash-shakl al-gaṭṭā ᶜ[Livre de la figure sécante] dans lequel la démarche de Khayyām est reprise et explicitée*[8].

L'épître de Khayyām ne semble pas avoir circulé en Andalus et au Maghreb. Mais la matière de ses trois chapitres a fait l'objet d'étude et d'enseignement dans ces deux régions de l'Empire musulman. Ce fait est déduit des titres de certains ouvrages perdus qui ont été consacrés aux Eléments d'Euclide, comme le Kitāb al-mudkhal ilā l-handasa fī tafsīr Kitāb uqlīdis [Livre introductif à la géométrie sur le commentaire du Livre d'Euclide] d'Ibn as Samḥ (m. 1035). Cette déduction a été confirmée par l'analyse de la partie géométrique de l'important traité du mathématicien de Saragosse, al-Mu'taman Ibn Hūd (m. 1085), Kitāb al-istikmāl [Le livre de la complétion][9]*. Nous savons que ce traité a cir-*

(6 A. Björnbo: *Thabits Werk über den Transversalenstz (liber de figura sectore) Mit Bemerkungen van H. Suter*, Erlangen, 1924. Réimpression F. Sezgin: *Thābit Ibn Qurra (d. 288/901), Texts and Studies*, I, Frankfurt, Institute for the History of Arabic-Islamic Science, Islamic Mathematics and Astronomy, Vol. 21, 1997, pp. 215-311.

(7 B. Rosenfeld & L. Karpova: *Kniga o sostavnykh otnosheniyakh, Fiziko-matem. Nauki v stranakh vostoka*, I, 1966, pp. 9-39.

(8 A. Pacha Carathéodory: *Traité du quadrilatère*, Constantinople, Typographie et lithographie Osmanié, 1891. Réimpression F. Sezgin: *At-Ṭūsī, Shakl al-qaṭṭ ā* ᶜ, Frankfurt, Institute for the History of Arabic-Islamic Science, *Islamic Mathematics and Astronomy*, Vol. 47, 1998.

(9 La théorie des rapports est étudiée par al-Mu'taman dans la 3ᵉ espèce de son traité. Voir J. P. Hogendijk: The geometrical Parts of the Istikmāl of Yūsuf al-Mu'taman Ibn Hūd (11Th. century), an analytical Table of Contents, *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, n° 127, Vol. 41 (1991), pp. 230-232. En ce

des pays d'Islam, inaugurée peut-être par Thābit Ibn Qurra (m.901) et poursuivie par des mathématiciens d'Orient antérieurs à Khayyām, comme al-Jawharī (Xe s.), an-Nayrīzī (Xe s.) et Ibn al-Haytham (m. 1041) et postérieur à lui, comme Naṣir ad-Dīn aṭ-Ṭusī (m.1274) et Muḥyī ad-Dīn al-Maghribī (XIIe s.). Beaucoup d'articles ont été écrits sur les contributions de certains de ces hommes de sciences et, en particulier sur celle d'Omar Khayyām au sujet de ce postulat. Ce qu'il faudrait peut-être retenir de toutes ces contributions, au delà des échecs des uns et des autres et au delà des polémiques entre savants, c'est d'abord le type de mathématique qui est à l'oeuvre dans les différentes tentatives de substituer au 5^{e} postulat quelque chose "d'acceptable". Il s'agit, sur le plan technique, d'une géométrie euclidienne avec, ici ou là quelques écarts significatifs, comme l'initiative d'Ibn al-Haytham qui a consisté à introduire le mouvement dans quelques unes de ses définitions. La réaction virulente de Khayyām à cette initiative montre bien d'ailleurs la place prépondérante de la vision aristotélicienne qui prévalait dans ce domaine chez certains savants des pays d'Islam.

Le second chapitre de l'épître traite des notions de rapport et de proportionnalité. Comme pour le 5^{e} postulat, et à la suite de certains de ses prédécesseurs, Khayyām a considéré que les définitions concernant le rapport de deux grandeurs et l'identité de deux rapports de grandeurs ne sont ni satisfaisantes ni opératoires. Avant lui, des mathématiciens ont, semble-t-il, exprimé les mêmes réserves. Mais, à notre connaissance, seule la contribution d'al-Māhānī(m. 888) constitue un pas en avant dans l'enrichissement du *Liver V des Eléments* d'Euclide[5]. Ce qu'il faut retenir de la contribution de Khayyām c'est son utilisation de la quatriéme proportionnella à trois grandeurs données pour affirmer l'existence d'une grandeur associée à un rapport donné. Cela lui a permis de démontrer que ses propres définitions concernant l'identité ou l'inégalité de deux rapports sont équivalentes à celles d'Euclide.

Le troisiéme et dernier chapitre traite de la composition des rapports, un outil euclidien abondamment utilisé par les mathématiciens et par les astronomes. Mais cette utilisation, en particulier dans la manipulation de rapports de grandeurs quelconques, ne reposait pas sur des définitions claires et sur des résulats rigoureusement établis. La contri-

(5 J. P. Hogendijk: *Anthyphairetic ratios in the medieval Islamic tradition*, Actes du Colloque International sur "*2000 Years Transmission of Methematical Ideas: Exchange and Influence from Late Babylonian Mathematics to early Renaissance Science*" (Bellagio, 8-12 mai 2000). Sous presse.

Épître D'Omar-Khayyām *Sur L'explication Des Prémisses Problématiques Du Livre D'Euclide*

(traduction française)

Ahmed Djebbar
Université Paris-Sud

Introduction

L'Epître de ᶜOmar Khayyām dont nous donnons, ici, la traduction française, traite de trois thèmes majeurs de la tradition mathématique médiévale: le postulat des parallèles, la théorie des rapports et la composition des rapports. Cette épître aurait été écrite en 470/1077[1], probablement à Ispahan où le grand savant s'était installé depuis 1074[2]. Il avait alors 29 ans mais il s'était déjà fait connaître par au moins deux publications mathématiques, l'une intitulée *Mushkilat al-ḥisāb* [La difficulté du calcul][3] et l'autre, sans doute le plus important de tous ses écrits scientifiques connus, la *Risāla fîl-jabr* [L'épître sur l'algèbre][4].

Le premier chapitre de l'Epître, qui traite du 5ᵉ postula du *livre I* des *Eléments* d'Euclide s'inscrit dans la longue tradition euclidienne

(1 Selon l'information donnée á la fin du manuscrit de Leiden par le copiste du XIIe-XIIIe siècle, Masᶜūd al-Jalfarī, qui avait lui-même trouvé cette information sur la copie autographe d'Omar-Khayyām. Voir Ms. Leiden Or 199, f. 100b.

(2 Sur les activités de ᶜOmar Khayyām durant son séjour à Ispahan, voir A. Djebbar: ᶜOmar Khayyām et les activités mathématiques en pays d'Islam aux XIe-XIIe siècles, *Fahrang*, Vol. 12, 29-32, 2000, p. 13.

(3 Cet écrit n'a toujours pas été retrouvé et, à notre connaissance, aucun auteur postérieur à Khayyām ne l'a évoqué.

(4 A. Djebbar & R. Rashed: *Les écrits algèbriques d'al-Khayyām* (édition, traduction française et analyse mathématique), Alep, I. H. A. S., 1981.

Farhang, **vol. 14, no. 39-40, pp. 79-136**