2- Coolidge, J., *The mathematics of Great Amateurs,* Oxford 1950, Chapter II (Omar Khayyam), pp. 19-20.

3- Eves, H. "Omar Khayyam's solution of cubic equation", *The Mathematics Teacher* LVI (April 1958), pp. 285-286.

4- Lumpkin, B. "A mathematics club project from Omar Khayyam", *The Mathematics Teacher*, December 1978, pp. 740-743.

5- Rizivi, V. A. "Umar Khayyam as a Geometrician, A survey", *Islamic Studies,* vol. 24 N° 2(1985), pp. 193-204.

6- Ballieu, M., "Les rapports entre l'agèbre et la géométrie dans l'œuvre d'Omar Khayyam et Sharaf ad-Din al-Tusi (cinq siècles avant Descartes et Newton)", *Mathématiques & Pédagogie*, n° 91(1993), p. 7-21.

7- Woepcke F., "Notice sur un manuscrit Arabe d'un traité d'algèbre par Aboul Fath Omar Ben Ibrahim Álkhayami, contenant la construction géométrique des équations cubiques." *J. Für die reine aund angew. Math.* 40 (1850), pp. 160-172.

8- Woepcke F., "Les constructions des équations du quatrième degré par les géomètres arabes", *Journal de Mathèmatiques Pures et Appliquées,* 8(1863).

9- Yeschekevitch A. P., *Les mathématiques arabes (VIII-XV siècles)*, traduction française par K. Jaouich et M. Cazenay, Paris 1976, pp. 94-99.

BIBLIOGRAPHIE

Le traité algébrique de Khayyam a été publié pour la première fois par F. Woepcke avec sa traduction française et un commentaire important du texte:

F. Woepcke, *L'Agèbre d'Omar Khayyam,* Paris 1851.

Une deuxième édition de ce texte accompagnée de sa traduction française a été faite par R. Rashed et A. Djebbar:
R. Rashed et A.Djebbar, *L'œuvre algébrique d'al-Khayyam,* University of Aleppo 1981.
Une troisième édition de celle-ci se trouve dans:
R. RASHED et B.
VAHABZADEH, *Al-Khayyam Mathématicien,* Paris 1999.

La traduction française de Woepcke a servi de base à la traduction anglaise de D. S. Kasir: D. S. Kasir, *The Algebra of Omar Khayyam,* New York 1931.

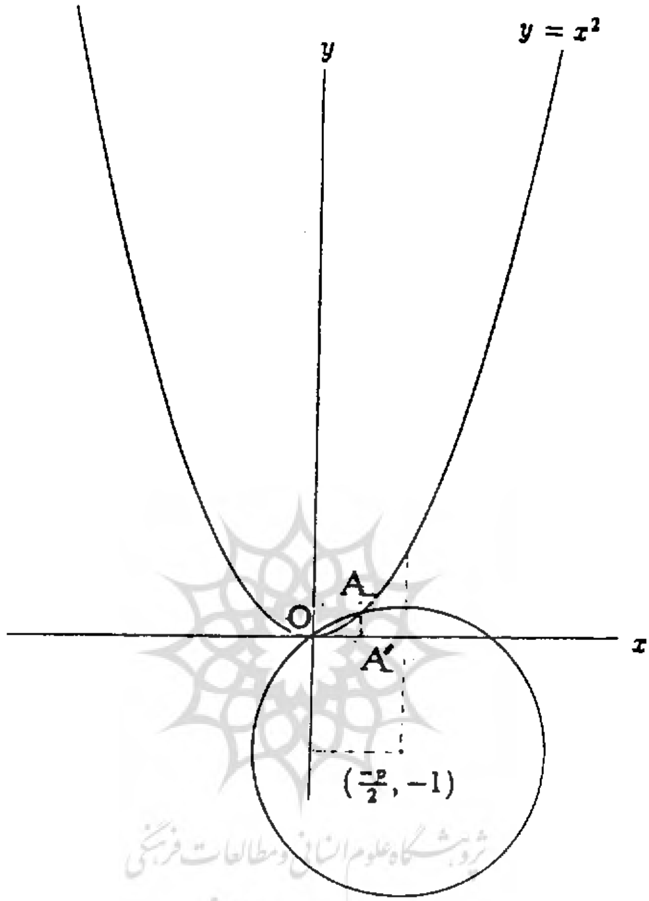
Une deuxième traductin anglaise de H. J. J. Winter et W. 'Arafat a bénéficié du manuscrit d'India Office:
H. J. J. Winter et W. 'Arafat ≪The algebra of Umar Khayyam≫ *Journal of the Royal Asiatic society of Bengal,* vol. XVI (1950), n° 1, pp. 27-78.

La traductin persane a été effectuée par G.H. Mosaheb et publiée avec le texte arabe en 1938 à Téhéran. Monsieur Mosaheb a révisé sa première traduction en 1961, publiée sous le titre de *Omar Khayyam algébriste,* avec une analyse de grande valeur.

Une traductin russe a été faite par B. A. Rosenfeld et A. P. Juškevich et publiée en 1961 à Mocou.

Le traité algébrique de Khayyam fut aussi l'objet de nombreuses recherches dont en particulier:

1- Amir Moez, A. "Khayyam's solution of cubic equation", *Mathematics Magazine* No 35 (1962), pp. 270-273.



Conclusion Epistémologique

Comme nous l'avons vu, le célèbre problème d'Archimède a conduit les mathématiciens islamiques à la résolution d'une équation cubique. Ils l'ont résolue finalement par les sectins coniques. Cependant, ils se contentaient de succès partiels, c'est-à-dire de la solution d'un problème géométrique. Omar Khayyam contrairement à ceux-ci, tout en abandonnant le problème en qestion s'attache aux équations cubiques pour elles-mêmes afin d'en donner une théorie consistante. Cette théorie se résume en représentation canonique des équations cubiques, arrangement homogénéisé des termes, résolutin géométrique à l'aide des sections coniques et discussion pour l'existence des racines.

$$v_1 = \frac{\pi a^3}{3}(2 + 2\cos\alpha + \cos\alpha\sin^2\alpha)$$

problème d'Archimède demande $\frac{v_2}{v_1} = k$, nous avons:

$$\frac{2 + 2\cos\alpha + \cos\alpha\sin^2\alpha}{2 - 2\cos\alpha - \cos\alpha\sin^2\alpha} = k$$

Après avoir simplifié, cette relation se transforme à l'équation suivante:
$(1 + k)\cos\alpha\sin^2\alpha + 2(1 + k)\cos\alpha + 2(1 - k) = 0$
dans cette équation si l'on pose $x = \cos\alpha$, on obtient l'équation:

$$x^3 + 3x + \frac{2(1-k)}{1+k} = 0 \qquad (1)$$

Supposons $\frac{2(1-k)}{1+k} = p$, l'équation (1) se transforme donc sous la forme:

$$x^3 + 3x + p = 0 \qquad (2)$$

En multipliant cette équation par x nous avons:

$$x^4 + 3x^2 + px = 4 \qquad (3)$$

Soit $y = x^2$ l'équation (3) se transforme donc au système suivant:

$$\begin{cases} y^2 + 3y + px = 0 \\ x^2 - y = 0 \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + y^2 + 2y + px = 0 \end{cases}$$

Pour résoluton géométrique de ce systèm, il faut tracer le cercle
$x^2 + y^2 + 2y + px = 0$ avec le centre $\left(\frac{-p}{2}, -1\right)$ et la parabole $y = x^2$.

Ces deux section coniques se coupent en un point A. l'absciesse $OA = x$ est la solution de notre problème comme on peut l'observer dans la figure. L'équation a également une racine parasite $x = 0$ et deux racines imaginaires.

Soit l'application $\lambda : R^3 \to R^3$ qui, à tout (ρ, φ, θ) fait correspondre (x, y, z) tel que

$$\lambda : \begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

Avec $0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \alpha$

L'application λ est de classe C^∞ sur R^3 et son jacobien est

$$\Delta_\lambda(\rho, \varphi, \theta) = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \left|\rho^2 \sin\varphi\right|$$

Alors pour toute fonction continue f on a
$\iiint f(x, y, z) dx\, dy\, dz = \iiint \left|\Delta_\lambda(\rho, \varphi, \theta)\right| d\rho\, d\varphi\, d\theta$
On a donc:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^a \ |\rho^2 \sin\varphi| d\rho\, d\varphi\, d\theta = \int_0^a \ \rho d\rho^2 . \int_0^\alpha \ \sin\varphi d\varphi \int_0^{2\pi} \ \theta d\theta$$

$$V = \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^a \cdot [-\cos\varphi]_0^\alpha \cdot [\theta]_0^{2\pi} = \frac{a^3}{3}(1 - \cos\alpha)2\pi$$

Donc:

$$V = \frac{2\pi a^3}{3}(1 - \cos\alpha)$$

Maintenant, pour déterminer le volume du segment sphérique v_1, il suffit de retrancher de v le volume du cône $\varphi = \alpha$. Le volume du cône est égal à:
$$\frac{\pi r h^2}{3} = \frac{\pi a^3 \sin^2\alpha \cos\alpha}{3}.$$

Donc: $v_1 = \dfrac{4\pi a^3}{3}(1 - \cos\alpha)\dfrac{\pi a^3}{3} \sin^2\alpha \cos\alpha$

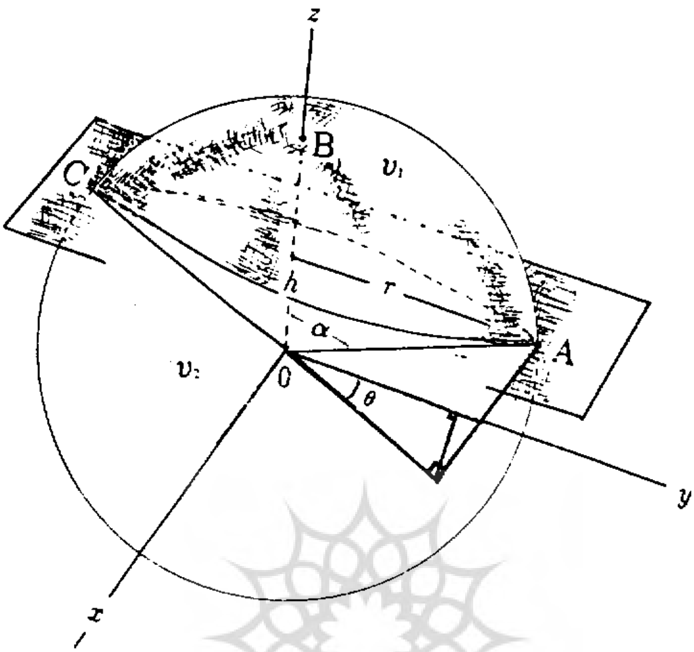


fig 5:

faite par monsieur A. R. Amir Moez[9] et nous allons la détailler de la manière suivante:

Supposons que la sphère de l'équation $\rho = a$, a été divisé par un plan $z = h$ de telle sorte que le rapport de deux segments sphériques ainsi obtenu, c'est-à-dire v_1 et v_2 soit égal à k. Afin de déterminer les volumes de v_1 et v_2 nous calculons le volume du morceau de cette sphère interceptée par le cône $\varphi = \alpha$. Ce morceau a été présenté dans la figure par OABC et nous désignons son volume par V.

$$V = \iiint f(x, y, z) dx\, dy\, dz$$

Le changement de variable en coordonnées sphériques nous permet plus facilement de calculer cet intégrale triple.

(9 A. R. Amir Moez, ≪Khayyam, al-Biruni, Gauss, Archimedes and quadric equations≫, *The Texas Journal of Science*, 46 (1994) no. 3, pp. 255-257.

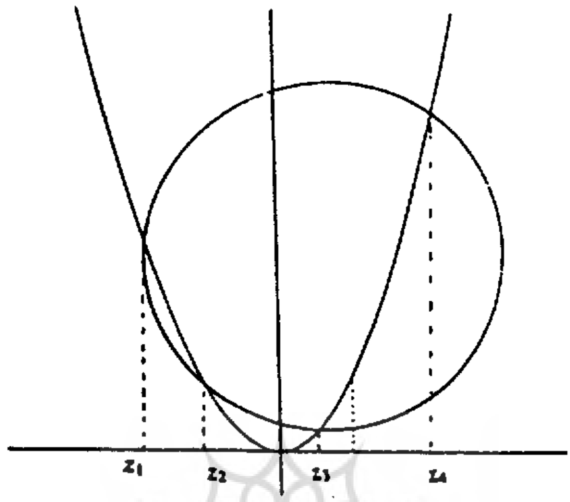


fig 4:

$$z^2 + y^2 + (p-1)y + qz + r = 0 \qquad (4)$$

Equation qui représente un cercle dont les coordonnées du centre sont: $z_0 = \frac{q}{2}, y_0 = \frac{p-1}{2}$ et le rayon: $R = \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + (p-1) - 4r}$. Les racines cherchées sont les abscisses des points communs à la parabole (2) et au cercle (4). Bien entendu, l'une de ces quatre solutions est une solution parasite puisque notre équation initiale est une équation cubique. Après avoir ainsi déterminé z_i (i= 1, 2, 3) en substituant sa valeur en fonction de x, nous obtenons les racines de notre équation cubique.

5- La résolution du problème d'Archimède par la méthode de Khayyam

Nous avons expliqué la méthode de Khayyam telle que l'on peut voir dans les mathématiques modernes. Nous essayons maintenant d'appliquer celle-ci à la résolution du problème d'Archimède. Cette résolution a été

découvert une équation cubique avec trois racines positives il aurait pu decouvrir la relation entre le degré d'une équation et ses racines. La deuxième erreur de Khayyam correspond à la résolution de l'équation: $x^3 + c = ax^2$. Khayyam n'a pas fait attention à la deuxième racine positive de cette équation. Cette erreur provient du fait que celui-ci, pour la résolution géométrique, traçait toujours une partie des sections coniques c'est-à-dire qu'au lieu de cercle, parabole et hyperbole il traçait respectivement un demi-cercle, la moitié d'une parabole et une branch d'hyperbole. A cause de cette habitude regrettable l'une des grandes découvertes mathématiques, c'est-à-dire celles des racines n
'egatives lui a échappé.

Khayyam ne discute pas du nombre des racines des équations en fonction de leurs coefficients, sauf pour les équations $x^3 + bx + c = ax^2$ et $x^3 + c = ax^2$.

4- La théorie de Khayyam dans les mathématiques d'aujourd'hui

De la théorie d'Omar Khayyam c'est surtout sa méthode de la résolution géométrique des équations cubiques à l'aide des sections coniques qui subsiste dans les mathématiques d'aujourd'hui. Mais pour sa méthode nous l'avons déjà signalé, Khayyam avait utilisé la géométrie synthétique des Anciens alors que la géométrie analytique nous permet aujourd'hui d'obtenir le même résultat avec plus de facilité. Autrement dit, grâce à cette géométrie nous pouvons résoudre toutes les équations cubiques uniquement à l'aide d'un cercle et d'une parabole. En effet, pour résoudre l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ l'on multiplie par x, ce qui introduit la racine $x = 0$ dont on ne tiendra pas compte, on obtient l'équation du quatrième degré $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx = 0$. On effectue ensuite le changement de variable $z = x - \frac{A}{4}$ afin de supprimer x^3, on obtient alors:

$z^4 + pz^2 + qz + r = 0$ (1)
Posons $z^2 = y$ (2)
D'où $y^2 + py + qz + r = 0$ (3)

Et, en additionnant (2) et (3) membre à membre:

la solution. Pour justifier cette solution Khayyam part de la figure 3 puisque le point ≪E≫ appartient à la parabole EBD, il écrit $EI^2 = AB \cdot BI$ (équation de la parabole) et comme $EI = HB$ on a: $\frac{BI}{HB} = \frac{HB}{AB}$.

De même puisque ≪E≫ appartient à l'hyperbole EBG, Khayyam écrit: $EH^2 = CH \cdot BH$ (équation de l'hyperbole) et comme $EH = BI$, on a: $\frac{CH}{BI} = \frac{BI}{HB}$.

En comparant ces deux relations on a: $\frac{HB}{AB} = \frac{BI}{HB} = \frac{CH}{HI}$ qui nous donne:

(1) $AB \cdot BI = \overline{HB}^2$
(2) $AB \cdot CH = HB \cdot BI$

En multipliant ces deux relations membre par membre on a:
$\frac{HB}{AB} = \frac{BI}{HB} = \frac{CH}{HI}$.

Par ailleurs, $CH = HB + BC$
Donc : $\overline{HB}^3 = \overline{AB}^2 \cdot HB + \overline{AB}^2 \cdot BC$
$\overline{HB}^3 = bHB + c$

Donc HB est la grandeur recherchée.

3.5. Discussion sur l'existence des racines

Khayyam après la résolution de chaque équation discute sur les nombres de ses racines positives. Il montre que pour certaines équations il y a plusieurs cas de figure, de sorte qu'elles peuvent ne pas avoir de racine, ou alors une ou deux racines. A l'exception de deux cas, sa discussion est correcte. Le premier cas correspond à la résolution de l'équation $x^3 + bx = ax^2 + c$. On sait que celle-ci pour $\frac{c}{b} < a$ possèd trois racines positives et réelles mais la discussion de Khayyam n'est pas suffisamment aboutie. C'est pour cette raison qu'il n'obtient qu'une seule racine. L'erreur de Khayyam est vraiment regrettable car il savait très bien qu'une équation du second degré a toujours deux racines. Et s'il avait

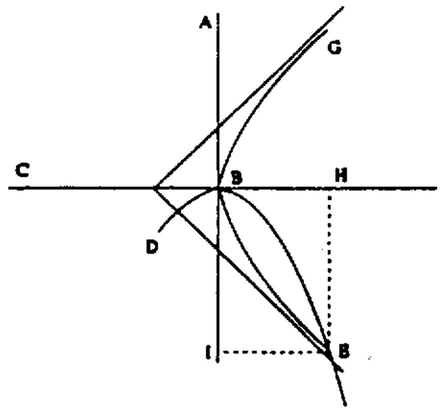


fig 3:

par $\left(x \pm \frac{c}{b}\right)$ on a une équation à quatre termes du troisième degré de type $x^3 + uax^2 + vbx + wc = 0$ où u, v, w sont égaux, soit à (+1), soit à (−1). Celle-ci correspond aux équations (8), (9), (10), (11), (12), (13), (14) et (15) de Khayyam. Par exemple, pour résoudre l'équation $x^3 = bx + c$ le systèm I nous conduit à l'intersection de la parabole $y = \frac{x^2}{\sqrt{b}}$ et l'hyperbole $y^2 = x^2 + \frac{c}{b}x$.

Il construit alors la parabole EBD de sommet B, d'axe AB et de paramètre AB, en se référant aux *Coniques* d'Apollonius, il construit aussi l'hyperbole équilatère EBG de sommet B, d'axe BC et de paramètre BC. Ces deux courbes, comme on peut le voir dans la figure 3, se coupent au point E, l'abscisse HB = x est la solution de l'équation. Bien entendu Khyayyam ne donne pas une autre solution négative.

3.4. Justification géométrique de la solution

Après avoir ainsi trouvé les racines de chaque équation, Khayyam justifie cette solution à l'aide de la géométrie-une science à la fois exacte et intuitive-pour mettre en évidence la valeur scientifique de sa théorie. Prenons encore l'équation $x^3 = bx + c$ dont nous venons d'expliquer tion géométrique à l'aide des sections coniques. Dans son choix de sections coniques servant à la construction des 15 types d'équations cubiques, Khayyam s'en tient à un système précis. Le schéma ci-dessous proposé par F. Woepcke[8] grand spécialiste de l'histoire des sciences, caractérise ce choix. En désignant p, q, r, s, t des quantités qui peuvent prendre uniquement des valeur +1 et −1. Alors les paires de sections coniques prises par Khayyam pour construire des équations du troisième degré relèvent des trois systèmes suivants:

$$\mathrm{I}\begin{cases} x^2 - \sqrt{b}.y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{parabole} \\ y^2 + px^2 + q\frac{a}{b}x = 0 \begin{cases} p = 0 \ldots\ldots \text{parabole} \\ p = +1 \ldots\ldots\ldots \text{cercle} \\ p = -1 \ldots \text{hyperbole} \end{cases} \end{cases}$$

Ce systèm sert à résoudre des équations du type $x^3 + pbx + qa = 0$ et comme nous l'avons déjà signalé, celle-ci correspond aux équations (2), (3) et (4) de Khayyam.

$$\mathrm{II}\begin{cases} yx - \sqrt{c}.m = 0 \ldots \text{hyperbole} \\ y^2 + pmx + qm = 0 .. \text{parabole} \end{cases}$$

Ce système sert pour les équations du type $x^3 + pqax^2 + pc = 0$ m étant égal soit à $\sqrt[3]{a}$ soit à p. Celle-ci correspond aux équations (5), (6) et (7) de Khayyam.

$$\mathrm{III}\begin{cases} y^2 + px^2 + q\left\{\frac{c}{b} \pm a\right\}x + r\frac{ac}{b} = 0 \begin{cases} p = +1 \ldots\ldots\ldots \text{cercle} \\ p = -1 \ldots \text{hyperbole} \end{cases} \\ yx + s\sqrt{b}.x + t\frac{a}{\sqrt{b}} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Hyperbole} \end{cases}$$

Le dernier système conduit à l'équation:
$x^4 + pq\left\{\frac{c}{b} \pm a\right\}x^3 + r\left\{b + p\frac{ac}{b}\right\}x^2 + 2pstcx + p\frac{c^2}{b} = 0$ et après division

(8 F. WOEPCKE, ≪Notice sur un manuscrit Arabe d'un traité d'algèbre par Aboul Fath Omar Ben Ibrahim Alkhayami, contenant la constructiond géométrique des équations cubiques.≫ *J. Für die reine aund angew. Math.* 40 (1850), pp. 169-170.

$$(HB)^3 \quad = \quad b \cdot HB \quad + \quad c$$

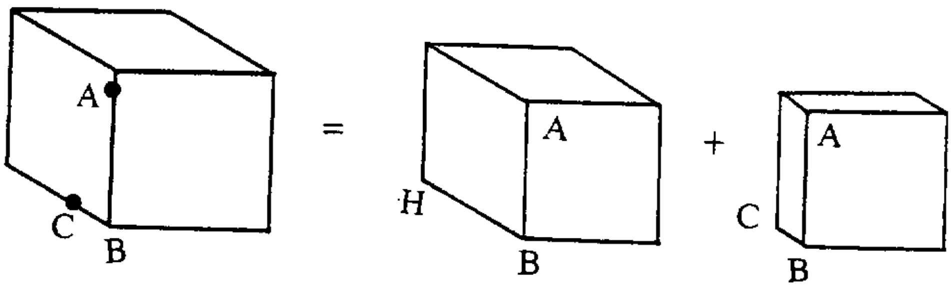


fig 2:

venir son unité de mesure par exemple, quand il parle de l'égalité d'un nombre et d'une surface, il entend par nombre un ≪quadrilatère à angles droits, dont l'un des deux côtés est un et l'autre une droite égale en mesure au nombre donné, et tel que chacune des parties de sa mesure soit égale au deuxième côté.≫[7]

Avant la résolution d'une équation il l'écrit sous sa forme homogène. L'équation $x^3 = bx + c$ se transforme donc en $x^3 = p^2x + q^2p$. Pour mettre en évidence cette homogénéité, supposons $AB = \sqrt{b}$, on construit la droite BC perpendiculaire à AB de telle sorte que $BC = \frac{c}{b}$. Nous construisons ensuite le solide qui a pour la face le carré $\overline{AB} \times \overline{AB}$ et pour profondeur BC. Le volume de celui-ci est égal à ≪c≫. Nous avons donc $\overline{BH}^3 = AB^2 \cdot HB + \overline{AB}^2 \cdot BC$:

3.3 Résolution géométrique

Khayyam propose pour les équations qu'il avait déjà classifiées, la résolu-

(7 Khayyam, *Traité algèbrque,* op. cit p. 130.

voici:

1) $x^3 = c$
2) $x^3 + bx = c$
3) $x^3 + c = bx$
4) $x^3 = bx + c$
5) $x^3 + ax^2 = c$
6) $x^3 + c = ax^2$
7) $x^3 = ax^2 + c$
8) $x^3 + ax^2 + bx = c$
9) $x^3 + ax^2 + c = bx$
10) $x^3 = ax^2 + bx - c$
11) $x^3 + bx + c = ax^2$
12) $x^3 = ax^2 + bx + c$
13) $x^3 + ax^2 = bx + c$
14) $x^3 + bx = ax^2 + c$
15) $x^3 + c = ax^2 + bx$

Il aboutit ainsi à 15 formes canoniques. Les équations n'ayant pas de racines positives ne sont pas du tout envisagées. C'est pourquoi nous ne trouvons pas chez lui les équations du type $x^3 + ax^2 + c = 0$.

Dans les mathématiques d'aujourd'hui on peut rassembler les équations (2), (3) et (4) sous la forme de:
$x^3 + Bx + C = 0$
et (5), (6) et (7) sous la forme de:
$x^3 + Ax^2 + C = 0$
Enfin les équations 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, et 15 sous la forme de:
$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0$

3.2. Le problème de l'homogénéité

Dans les mathématiques modernes, on est habitué aux équations purement numériques, c'est pourquoi le problème de l'homogénéité nous échappe. Par contre, chez Khayyam, on est dans le contexte d'une géométrie qui distingue ses objets surtout en termes de dimensions. On ne peut pas additionner une ligne avec une surface ou celle-ci avec une figure solide. Le problème d'homogénéité impose alors ses contraintes. Les quantités dans une équation doivent être comparables, c'est-à-dire homogènes. Pour surmonter cet obstacle logique Khayyam fait interdu troisième degré en radicaux cubiques par les Italiens del Fero et Tartaglia. Viennent ensuite la classification des équations déjà mentionnées, puis la construction fondée sur l'algèbre géométrique et la résolution numérique correspondante des équations du second degré.

La construction des racines de chaque type s'accompagne de l'analyse des «cas». En considérant les conditions d'intersection ou de tangence des sections coniques convenablement choisies, Khayyam, au fond, développe la théorie gémétrique de la répartition des racines positives des équations du troisième degré. En accord avec cela, il ne fait figurer que les parties des sections coniques qui se trouvent-comme nous le disons maintenant-dans le premiere quadrant.

Après une longue discussion sur les équations cubiques, Khayyam s'arrête brièvement sur les équations comprenant des degrés de grandeur inverse de l'inconnue («portion de chose», «portion de carré», etc...) du genre: $\frac{1}{x^3}+3\frac{1}{x^2}+5\frac{1}{x} = 3\frac{3}{8}$ en les ramenant par la substitution $z = \frac{1}{x}$ aux équations déjà étudiées. En considérant les cas du genre $x^2+2x = 2+2\frac{1}{x^2}$ qui conduisent à des équations du guatrième degré,[6] Khayyam approche de la limite de ses découvertes. Il n'existe pas, déclare-t-il, de méthode pour résoudre ces problèmes.

3. Théorie des Equations Cubiques de Khayyam

Une théorie est définie comme scientifique lorsqu'elle présente un phénomène ou une règle dans son aspect universel, c'est-à-dire général. Elle doit être de plus justifiable par une science exacte afin qu'elle-même devienne une science exacte. Tous ces caractères se trouvent réunis dans la théorie des équations cubiques de Khayyam que nous allons exposer de la manière suivante:

3.1. Représentation des équations cubiqueds sous leurs formes canoniques

L'un des aspects de l'universalité de la théorie de Khayyam est que celle-ci présente les équations cubiques sous leurs formes canoniques que

(6 Cette équation se transforme en: $x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 2 = 0$.

un chef d'œuvre scientifique qui mérite d'être présenté en détail.

2. Présentation du traité de Khayyam

Khayyam, pour son traité a suivi le plan suivant:

1) Introduction
2) Equations linéaires et du second degré
3) Equations du troisième degré
4) Equation contenant une grandeur inverse de l'inconnue
5) Un supplément où est analysée une erreur d'Abou'l-Djoud, dont l'ouvrage vint à la connaissance de Khayyam plusieurs années après l'achèvement de l'essentiel du traité.

L'introduction comporte une définition de l'algèbre-la première à notre connaissance, -comme science de la résolution des équations qui à l'époque moderne furent appelées algébriques: ≪l'art de l'algèbre et d'al-Muqābala est un art scientifique dont l'objet est le nombre absolu et les grandeurs mesurables, en tant qu'inconnus mais rapportés à une chose connue par laquelle on peut les déterminer-et cette chose est soit une quantité, soit un rapport...≫[3] un nombre absolu, c'est pour Khayyam un nombre entier naturel, et les grandeurs mesurables: les lignes, les surfaces, les corps et le temps. De la sorte, l'objet de l'agèbre, ce sont les quantités continues et discontinues, Et plus loin: ≪les solutions en algèbre ne s'effectuent que par l'équation, je veux dire en égalant ces degrés les uns aux autres, comme on le sait bien.≫[4]

A ces explications s'ajoutent des considérations relatives aux degrés d'une inconnue, avec cette indication que les degrés au-delà du troisième doivent être compris métaphoriquement, puisqu'ils n'appartiennent pas à des grandeurs réelles. Vient ensuite l'indication, déjà connue de nous que pour résoudre des équations du troisième degré ne se ramenant pas à des équations du second degré, il importe d'utiliser des sections coniques et que leur solution arithmétique, c'est-à-dire par une résolution en radicaux n'est pas connue. ≪Peut-être, écrivait Khayyam avec perspicacité, d'autres qui nous succéderont, sauront-ils le faire≫[5] Ce n'est qu'après plus de quatre cents ans que sera trouvée la résolution de l'èquation

(3 Khayyam, *Traité de l'algèbre*, troduction française par R. Rashed dans R. RASHED et B. VAHABZADEH *Al-Khayyam Mathématicien*, Paris 1999, p. 120.

(4 *Ibid*, p. 122.

(5 Ibid, p. 124

en fonction de sa hauteur, c'est-à-dire x est le suivant:

$$v_2 = \pi x^2 \left(a - \frac{1}{3}x\right)$$

Par consèquent, le volume de v_1 sera: $v_1 = \frac{4}{3}\pi a^3 - \pi x^2 \left(a - \frac{1}{3}x\right)$

On a donc: $\frac{v_1}{v_2} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{4a^3 - 3ax^2 + x^3}{3ax - x^3} = \frac{m}{n}$

Ou encore: $\frac{4a^2}{x^2} = \frac{(3a - x)(m - n)}{na}$

En développant et simplifiant cette équation on obtient l'équation de Mâhānī. Même si celui-ci n'a pas réussi à la résoudre, l'on peut voir dans cette démarche un progrès notable dans l'histoire des mathématiques. On s'y reconnaît plus facilement en équation algébrique que sur les figures compliquées de la géométrie. Surtout, oubliant le caractère toujours particulier de la situation géométrique initiale, la formulation algébrique plus générale et plus abstraite nous permet d'identifier des parentés non évidentes entre différentes problèmes. Ce progrès ne s'arrête pas ici, car Abu Jafar al-Khazin, contemporain de Mâhānī a réussi à résoudre cette équation par les sections coniques, tout en ouvrant un débat sur les équations cubiques.

Ainsi les mathématiciens islamiques ≪ne cherchèrent donc plus à construire une certaine division d'une ligne, mais ils tâchèrent de résoudre une équation du troisième degré. Ils ne tardèrent pas à s'occuper ensuite d'autres équations du troisième degré ...≫.[2] Cependant, ni al-Khazin, ni les autres mathématiciens qui ont travaillé sur ce sujet n'ont réussi à élaborer une theorie scientifique des équations cubiques. Une telle théorie a été donnée pour la première fois par Omar Khayyam, grand géomètre et algébriste iranien du XIIème siècle.

La théorie de Khayyam qui est le sujet de notre article se trouve dans son traité intitulé: رسالةفي الجبر والمقابلة (*Traité sur l'Algèbre et le Mugabala*)

(2 F. WOEPCKE ≪Les constructions des équations du quatrième degré par les géomètres arabes≫, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. 8(1863), p. 59.

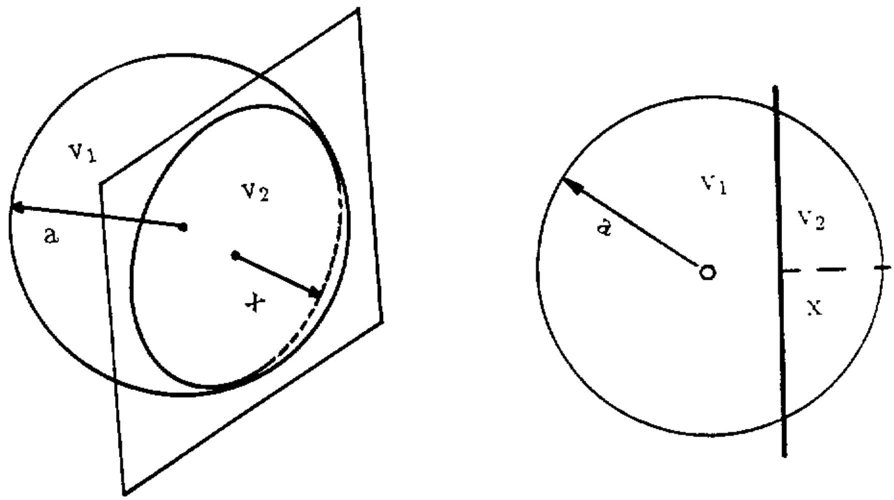


fig 1:

manuscrit dont il a restitué le contenu. C'est l'une des plus intéressant travail historique réalisé par un géomètre grec[1]. Le problème a été également résolu par d'autres géomètres grecs par diverses méthodes géométriques.

Au Moyen-âge, lors de la transmission des sciences grecques dans la civilisation islamique, ce même problème fut à nouveau l'objet de recherche. Mâhānī, grand géomètre iranien du Xème siècle formula pour la première fois ce problème géométrique en termes d'équation algébrique du troisième degré de la forme: $x^3 + C = Ax^2$. Le traité de Mâhānī sur ce sujet ne nous a pas été transmis, mais on peut facilement savoir comment il est parvenu à cette équation.

En effet, comme on peut l'observer dans la figure (1), si l'on divise une sphère de rayon a en deux segments v_1 et v_2 et si x est la hauteur de v_2 le problème demande l'égalité suivante:
$\frac{v_1}{v_2} = \frac{m}{n}$ où m et n sont des nombres entiers donnés. Le volume de v_2

(1 Sur ce problème voir: R. Netz, ≪Archimedes' Transformed: The Case of a Result Stating a Maximum for a Cubic Equation≫, *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 54, (1999) pp. 1-48.

Omar Khayyam théoricien des équations cubiques*

Jafar Aghayani-Chavoshi
Épistémologue et historien des sciences
Université technologique de Sharif
Teheran Iran

1. Introduction

La Théorie des équations cubiques d'Omar Khayyam marque une étape importante dans l'histoire de l'algèbre. Khayyam avec celle-ci a surmonté une difficulté qui pendant longtemps était restée insoluble. Afin de mieux percevoir cette originalité, nous devons la replacer dans son contexte historique. En effect, la théorie de Khayyam est historiquement liée au célèbre problème d'Archimède: ≪Diviser une sphère par un plan en deux segments qui aient un rapport donné≫. Archimède dans son livre *Sur la Sphère et le Cylindre* a transformé ce problème en la construction suivante:

Etant donné quatre points P_1, P_2, P_3, P_4 sur une ligne droite, il s'agit de déterminer un point X sur cette ligne tel que l'on ait:

$$\overline{XP_1}^2 : \overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_3P_4} : \overline{P_4X}$$

Bien qu'Archimède ait promis de donner cette construction à la fin de sa proposition, elle ne s'y trouve pas. Il semble qu'elle ait été perdue dès l'antiquité. Cependant, Eutocius croit l'avoir retrouvée dans un ancien

(* Texte de conférence à la *5th International Conference on Ancient Mathematics, Delphi August 17-20, 2000.* Je saisi cette occasion pour remercier Monsieur le Professeur Vassilis Karasmanis pour son invitation et son accueil chaleureux.