مقایسهٔ روشهای ابوالوفای بوزجانی و ابوریحان بیرونی در ترسیم نه‌ضلعی منتظم

جعفر آقایانی چاوشی
پژوهشگر تاریخ و فلسفه ریاضیات
و عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی شریف
jchavoshi @ hotmail.com

تقدیم به همکار گرامی آقای جمشید کیان‌فر

چکیده نه‌ضلعی منتظم را نمی‌توان بوسیله خطکش و پرگار ترسیم نمود زیرا تعیین ضلع آن به یک معادله درجه سوم منجر می‌گردد. این شکل بااینحال مورد توجه معماران و هنرمندان اسلامی بوده و این گروه از آن برای نقوش تزئینی بهره می‌برده‌اند.
شاید به‌همین دلیل است که ریاضیدانان اسلامی روشهایی برای رسم این شکل ارائه داده‌اند.
در این مقاله روشهای ابوالوفای بوزجانی و ابوریحان بیرونی را برای رسم نه‌ضلعی منتظم مقایسه کرده و نقاط ضعف و قوت هر یک از آنها را بازگو می‌کنیم.

کلید واژه‌ها: نه‌ضلعی منتظم؛ ابوریحان بیرونی، ابوالوفای بوزجانی، تثلیث زاویه، شمسهٔ نه

۱- نُه‌ضلعی منتظم

چنانکه می‌دانیم هر یک از اضلاع نه‌ضلعی منتظم روبه‌روی زاویه ۴۰ درجه است. بنابراین رسم نه‌ضلعی منتظم منجر به تثلیث زاویه ۱۲۰ درجه می‌شود. امّا می‌دانیم که تثلیث زاویه با خطکش و پرگار عموماً امکان‌پذیر نیست و زاویه ۱۲۰ درجه نیز جزوی زوایای تثلیث‌ناپذیر با خطکش و پرگار است، زیرا زاویه ۶۰ درجه تثلیث‌ناپذیر است.

این شکل هندسی علی‌رغم ترسیم‌ناپذیری با خط‌کش و پرگار مورد توجه ریاضیدانان اسلامی همچون بیرونی و بوزجانی بوده است. ریاضیدانان دیگر اسلامی نیز به این شکل توجه کرده‌اند. زیرا پروفسور برگرن چند سال پیش رساله‌ای از یک ریاضیدان ناشناس مسلمان را در ترسیم نه‌ضلعی منتظم به زبان انگلیسی ترجمه کرده و آن را به چاپ رسانده است.[1]

علت توجه ریاضیدانان اسلامی به این شکل شاید این بوده باشد که این شکل در نقوش تزئینی اسلامی به‌کار می‌رفته است.

یکی از نقوش تزئینی را که مبتنی بر نه‌ضلعی منتظم است و شمسهٔ نه نام دارد را در شکل ۱ نمایش می‌دهیم.[2]

روش معماران اسلامی برای رسیدن به نه‌ضلعی منتظم چگونه بوده است؟

از آنجائیکه معماران و صنعتگران روش‌ها و یا ترفندها خود را برای نقوش تزئینی به روی کاغذ نمی‌آوردند بلکه آنها را سینه به سینه به شاگردان خود انتقال می‌دادند. ما آگاهی چندانی از روش این معماران برای کارهایشان نداریم و بنابراین برای دانستن این روشها باید به نوشته و یا گفته یکی از معماران معاصر مراجعه نمائیم.

آقای ماهرالنقش روش نه‌ضلعی منتظم و درنتیجه روش ترسیم شمسهٔ نه را چنین برای ما توضیح داده‌اند.[3]

«مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را مطابق شکل ۲ در نظر می‌گیریم. زوایای A و B آن را به سه قسمت متساوی و زاویهٔ C را به چهار قسمت متساوی تقسیم می‌کنیم. خطوط قاعده را می‌کشیم. پایه پرگار را روی نقطهٔ C قرار داده و با شعاع BD (D محل تلاقی خط اول قاعده زاویهٔ A با خط AB می‌باشد.) کمانی رسم می‌کنیم.

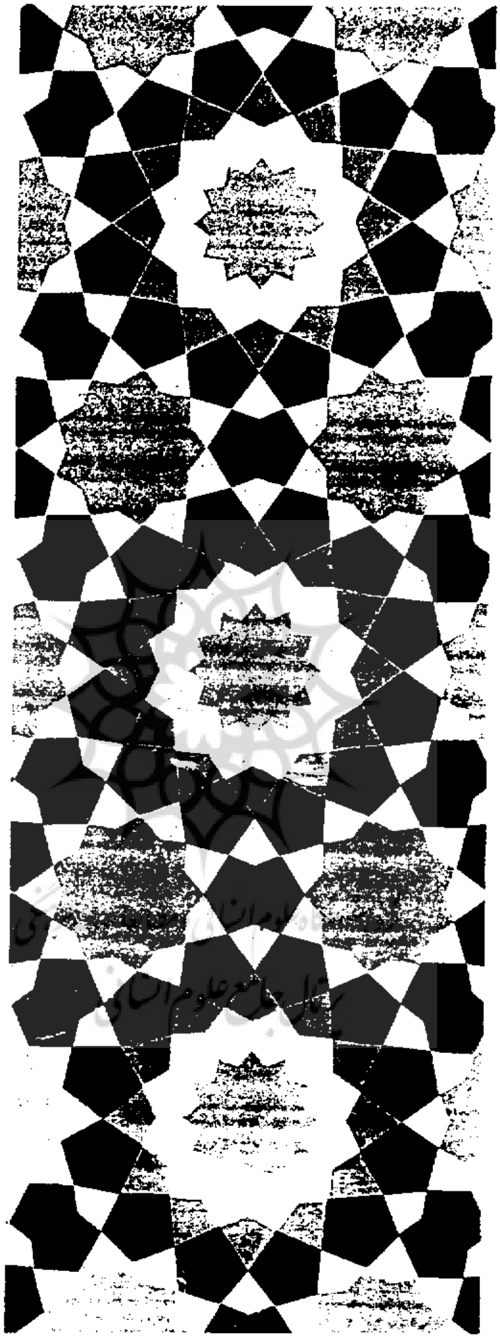
پایهٔ پرگار را روی نقطهٔ A قرار داده با همین شعاع کمان دیگری رسم می‌کنیم. از F به G وصل کرده پاره‌خط FG را امتداد می‌دهیم تا در نقطهٔ E پاره‌خط AB را قطع کند. پایهٔ پرگار را روی نقطهٔ C قرار داده کمانی با همان شعاع قبلی رسم می‌کنیم. EF را رسم می‌کنیم و با همین شعاع به مراکز A و C کمانهایی رسم می‌کنیم. از E به K و از M به P وصل کرده و خطوط EK و MP را رسم می‌کنیم. پایهٔ پرگار را روی نقطهٔ C قرار داده و به‌اندازه CD روی دو ضلع مثلث نشانه‌گذاری می‌کنیم از G به H و از H به L و از F به G وصل می‌کنیم و این خطوط را امتداد

1. J. L. Berggren, "An Anonymous treatise on the Regular Nonagon, *Journal for History of Arabic Science*, Damascus, vol. 1 & 2 (1981) pp. 36-41.

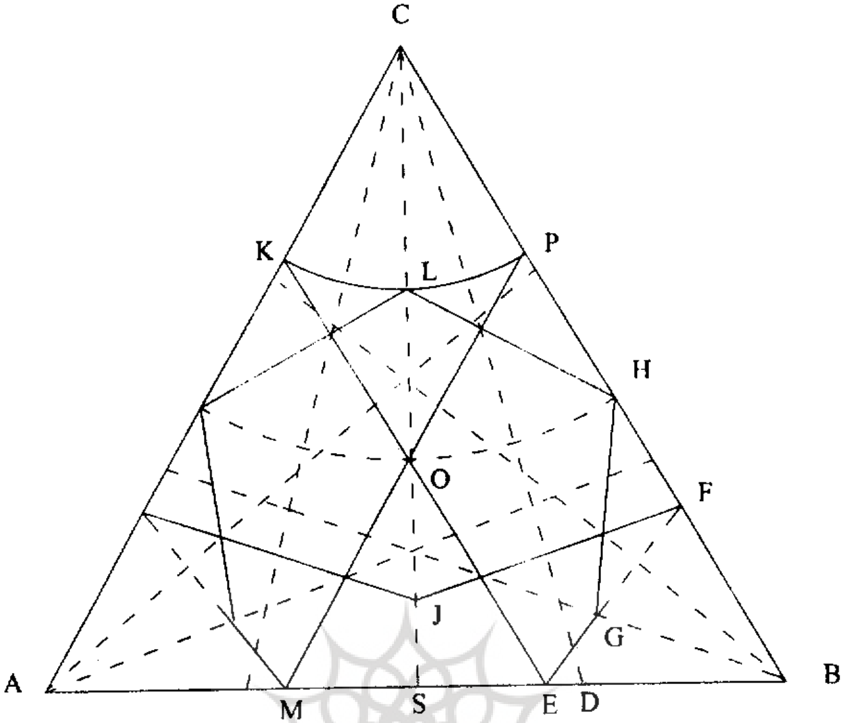
۲. این شکل از مأخذ زیر اقتباس شده است:

محمود ماهر النقش، طرح و اجرای نقش در کاشیکاری ایران دوره اسلامی، ج۱ تهران ۱۳۶۱ ص ۸۰

۳. آقای ماهرالنقش این توضیحات را به درخواست ما نوشته‌اند و تاکنون در جایی به چاپ نرسیده است.



شکل ۱. نقش تزئینی شمسهٔ نه میتنی بر نه ضلعی منتظم



شکل۲

می‌دهیم تا در نقطهٔ J خط قاعده شماره دوازده زاویه C را قطع کند.

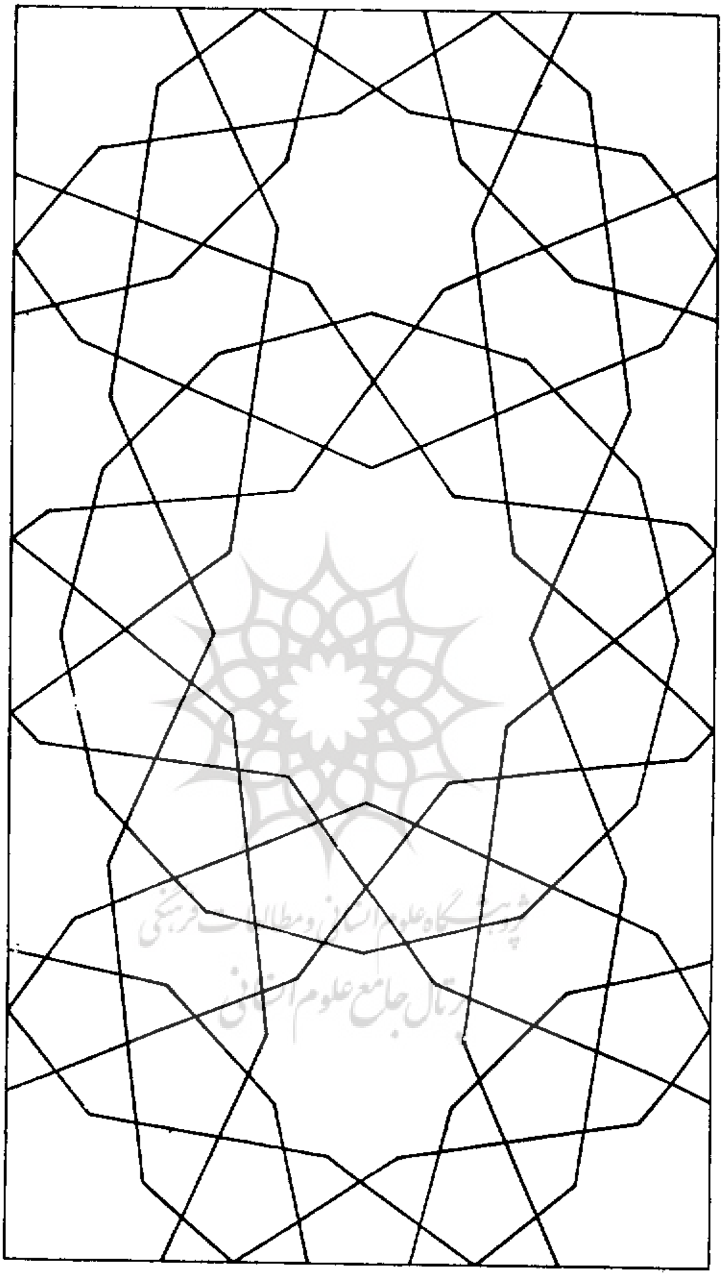
خطوطی را که در مثلث CSC کشیده‌ایم در مثلث CSA نیز می‌کشیم تا شکل کامل شود.

خطوط ممتد مثلث را روی ضلع AB به شکل لولائی حرکت می‌دهیم تا با این حرکت یک لوزی به‌دست آید. لوزی را روی اضلاع آن به شکل لولائی حرکت می‌دهیم تا نقش گسترش پیدا کند و گره نُه و دوازده مطابق شکل ۳ به‌دست آید.

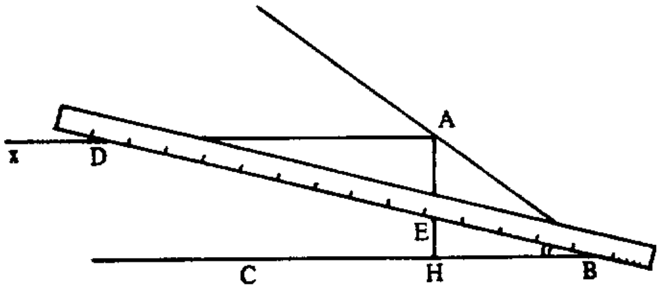
۲- روش ابوالوفای بوزجانی در ترسیم نه‌ضلعی منتظم

چنانکه در بخش اول دیدیم برای رسم نه‌ضلعی به روش صنعتگران ما به تثلیث زاویه ۶۰ درجه نیاز داشتیم-زاویه‌ای که تثلیث آن با خط‌کش غیرمدرج و پرگار امکان‌پذیر نیست.

بی‌جهت نیست که ابوالوفای بوزجانی نیز به‌هنگام ترسیم نه‌ضلعی منتظم درکتاب نجارت خود که آن را برای راهنمایی معماران و صنعتگران تألیف کرده، نخست، روش تثلیث زاویه را به آنها می‌آموزد و سپس بر اساس این تثلیث طریقه رسم نه‌ضلعی منتظم را تشریح می‌کند. که ما مرحله به مرحله روش بوزجانی را در زیر می‌آوریم:



شکل۳



شکل۴

۲ـ۱ تثلیت زاویه:

بوزجانی سه روش برای تقسیم یک زاویهٔ به سه قسمت متساوی می‌دهد که ما تنها یکی از آنها را ذکر می‌کنیم.

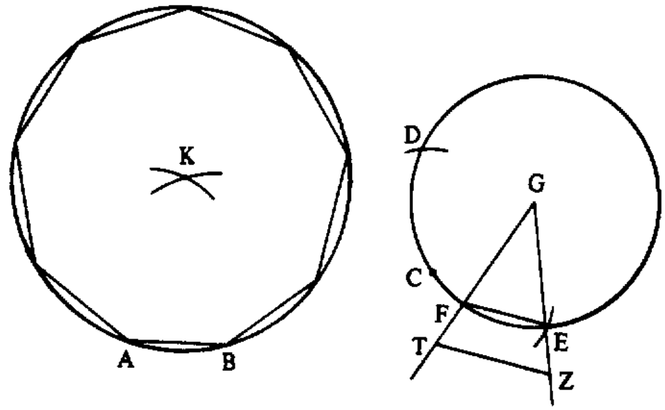
می‌خواهیم زاویه حادهٔ ABC را به سه قسمت متساوی تقسیم کنیم. از نقطهٔ A واقع بر AB عمود AH را بر ضلع BC فرود می‌آوریم و از همان نقطهٔ A نیم‌خط Ax را به‌موازات BC و در جهت BC رسم می‌کنیم سپس خط‌کشی را، درحالی که لبه‌اش همواره از نقطهٔ B می‌گذرد، در حول نقطهٔ B دوران می‌دهیم تا قسمتی از آن که بین عمود AH و نیم‌خط Ax واقع می‌شود مساوی با دوبرابر طول AB گردد. (یعنی $DE = ۲AB$) در این صورت زاویه DBC مساوی $\frac{1}{3}$ زاویه ABC خواهد بود.[1] (شکل ۴)

همانطور که ملاحظه می‌کنیم این ترسیم با استفاده از خط‌کش مدرج صورت گرفته بنابراین هندسی نیست. اثبات درستی این ترسیم را به‌عهده خواننده واگذار می‌کنیم.

۲ـ۲ ساختن نه‌ضلعی منتظم با ضلع معلوم AB

دایره‌ای به مرکز G و به شعاع دلخواه r رسم می‌کنیم و نقطهٔ دلخواه C را روی آن می‌گیریم، و به مرکز C و با همان شعاع r دو قوس رسم می‌کنیم تا دایرهٔ مرسوم را در دو نقطهٔ D و E قطع

۱. ابوالقاسم قربانی و محمدعلی شیخان، بوزجانی‌نامه، تهران ۱۳۷۱ هـ.س. ص ۳۸



شکل۵

کند. آنگاه قوس DE یعنی زاویه DGE را به سه قسمت متساوی (مرحله ۱) تقسیم می‌کنیم و یکی از این تقسیمات را قوس EF می‌نامیم.
آنگاه بین دو خط GE و GF پاره‌خط TZ را مساوی با AB و موازی با EF رسم می‌کنیم. اینک به مراکز A و B (یعنی دو سر ضلع معلوم) دو قوس با شعاع GZ رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ K قطع کنند. دایرهٔ به مرکز K و به شعاع AK را رسم کرده، روی آن ابتدا از A هشت قوس متساوی و برابر با قوس AB جدا می‌کنیم. آخرین نقطه، نقطه B خواهد بود.[۱]

۳- روش ابوریحان بیرونی برای ترسیم نه‌ضلعی منتظم

بیرونی با روش کاملاً هندسی در کتاب قانون المسعودی، خود ضلع نه‌ضلعی منتظم را به حل معادله درجهٔ سوم $x^۳ = ۳x + ۱$ منجر می‌کند. او جواب این معادله یعنی ضلع نه‌ضلعی منتظم را به‌صورت زیر تعیین می‌کند.

$$x = ۱٫۸۷۹۳۸۵۲۴۱۸$$

متأسفانه بیرونی قید نکرده که چگونه به این نتیجه رسیده است، تنها نوشته است که راه‌حلی جز از راه تقریبات متوالی ندارد. با این‌حال آقای رشدی راشد بر آن است که بیرونی حل این معادله و

۱. همان مأخذ ص ۲۶

معادلات مشابه با آن را در رساله استخراج‌الکعاب و الاضلاع ماوراء من مراتب‌الحساب، که درصد ورق تدوین کرده بوده احتمالاً آورده است که متأسفانه از آن اثری در دست نیست.[1]

شرف‌الدین طوسی ریاضیدان ایرانی متوفی به سال ۶۰۹ هجری، در اثر جبری خود تحت عنوان فی‌المعادلات، بدون اینکه از بیرونی نام ببرد حل معادلات درجه سوم و درجات بالاتر را از طریق تقریبات متوالی تشریح کرده است که به احتمال قوی مشابه کاری است که بیرونی پیش از وی برای حل معادله $x^۳ = ۱ + ۳x$ آن را بکار برده است.

ما ضمن نشان دادن راه هندسی بیرونی برای تعیین ضلع نُه‌ضلعی منتظم معادله وی را نخست با روشی جدید و کاملاً جبری حل کرده و سپس راه‌حل دیگری با استفاده از تقاطع مقاطع مخروطی ارائه می‌دهیم.

۳ـ۱ تعیین ضلع نه‌ضلعی منتظم

ابوریحان برای تعیین ضلع نه‌ضلعی منتظم از دو قضیه مقدماتی بهره می‌جوید.[2]

قضیه۱ هرگاه در یک قوس دایره، خط شکسته‌ای رسم کنیم مانند خط ACD و از وسط این قوس یعنی B بر ضلع بزرگتر این خط شکسته عمود BH را فرود آوریم نقطهٔ H وسط خط شکسته خواهد بود. (شکل ۶)

برهان. کافی است ثابت کنیم که $AH = HC + CD$

از B عمود BF را بر خط CD اخراج کرده و خطوط AB، BC و BD را رسم می‌کنیم خواهیم داشت:

$$\angle BCD = \frac{۱}{۲} \text{کمان } BAD$$

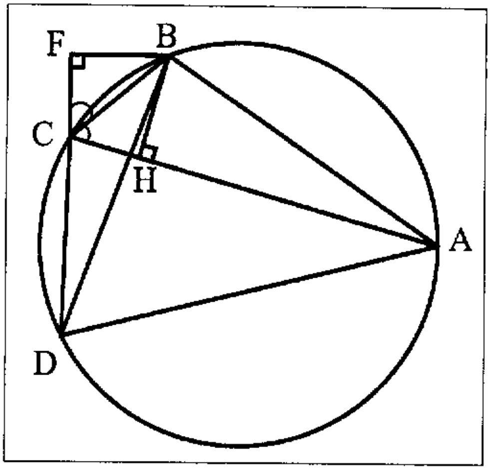
و چون

$$\angle BCD + \angle BCF = ۱۸۰^\circ$$

$$\angle BCD + \angle BAD = ۱۸۰^\circ$$

1. R. Rashed, "Al-Biruni algebriste" in *The Commenoration Volume of Biruni International Congress in Teheran*, Tehran 1976, pp. 63-74

۲. دو قضیه بیرونی و نتایج آن از مأخذ زیر اقتباس شده است: ابوالقاسم قربانی، بیرونی‌نامه، تهران ص ۲۸۷ـ۲۹۲



شکل۶

خواهیم داشت:

$$\angle BCF + \angle BAD = \frac{1}{2}\,\text{کمان}\ BCD \qquad (1)$$

اما $\angle BCA = \frac{1}{2}$ کمان BA

از طرف دیگر طبق فرض قضیه داریم:

$$\text{کمان}\ BA = \text{کمان}\ BCD$$

از اینجا نتیجه می‌شود که مثلث‌های قائم‌الزاویه BCH و BCF مساوی بوده و داریم: $FB = BH$ و $CH = CF$

همچنین دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH و DBF مساوی هستند زیرا:

$$AB = BD \quad \text{و} \quad BH = BF$$

بنابراین: $AH = DF$ و چون $CH = CF$ است می‌توان نتیجه گرفت:

$$AH = FC + CD = CH + CD$$

قضیه۲ هرگاه خط شکستهٔ ACD درکمان ACD ازیک دایره محاط باشد بطوریکه $AC > CD$ باشد و نقطهٔ B در وسط کمان ACD واقع شود، آنگاه خواهیم داشت:

$$\overline{AC} \cdot \overline{DC} + \overline{BC}^{۲} = \overline{AB}^{۲}$$

اثبات این قضیه را به‌عهده خوانندگان واگذار می‌کنیم.

رسم نه‌ضلعی منتظم

فرض می‌کنیم که دایره‌ای به نُه قسمت متساوی تقسیم شده است که نقاط این تقسیم به‌ترتیب A، B، C، D، E، V، R، H، T می‌باشند. وتر AE را رسم می‌کنیم، این وتر مقابل کمانی است که $\frac{۴}{۹}$ دایره می‌باشد.

همچنین ER را رسم می‌کنیم. ER مقابل کمانی است که برابر با $\frac{۲}{۹}$ دایره است.

چنانکه در شکل ۷ می‌بینیم خط شکستهٔ AER در کمان AER محاط می‌باشد. حال اگر از نقطه D واقع بر وسط این کمان عمود DL را بر AE رسم کنیم طبق قضیه اول داریم:

$$AL = LE + ER$$

واضح است که:

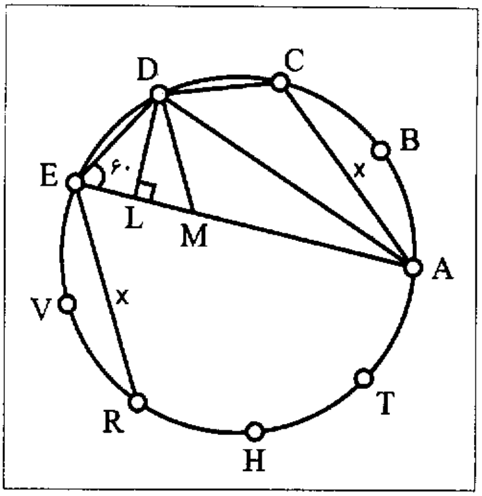
$$LE = \frac{AE - ER}{۲}$$

از نقطهٔ L روی LA طول LM را برابر با EL جدا می‌کنیم، در این صورت خواهیم داشت:

$$DE = DM \quad \text{و} \quad AM = ER$$

و از آنجائیکه زاویه DEL مقابل کمان ۶۰ درجه است، داریم:

$$\angle DEL = ۶۰^{\circ}$$



شکل۷

و مثلث EDM متساوی‌الاضلاع بوده و $DE = EM$ می‌باشد.
از سوی دیگر خط شکستهٔ AER درکمان ADR محاط است و D وسط این کمان می‌باشد.
پس طبق قضیه (۲) داریم:

$$\overline{AE} \cdot \overline{ER} + \overline{ED}^{۲} = \overline{AD}^{۲} \qquad (۲)$$

هرگاه ED را برابر با واحد و ER را برابر با x بگیریم خواهیم داشت:

$$AE = EM + MA = ED + ER = ۱ + x$$

بنابراین رابطه (۲) را می‌توان چنین نوشت:

$$(۱ + x)x + ۱ = \overline{AD}^{۲}$$

و یا

$$\overline{AD}^{۲} = x^{۲} + x + ۱ \qquad (۳)$$

خط شکسته ADE نیز در کمان ACE محاط است و C وسط این کمان می‌باشد، پس طبق قضیه (۲) می‌توان نوشت:

$$AC \cdot DE + \overline{DC}^{۲} = \overline{AC}^{۲} \qquad (۴)$$

اما وتر AC برابر با x و وتر DC برابر با ED یعنی واحد است پس:

$$AD \cdot ۱ + ۱ = x^{۲} \Rightarrow \overline{AD}^{۲} = (x^{۲} - ۱)^{۲} \qquad (۵)$$

از مقایسه (۳) و (۵) نتیجه می‌شود $۳x^{۲} + x = x^{۴}$
این معادله را می‌توانیم به شکل زیر بنویسیم:

$$x^{۳} - ۳x - ۱ = ۰$$

۳ـ۲ حل معادله بیرونی با روش جدید جبری

معادلهٔ درجهٔ سوم

$$f(x) = x^{۳} + ax^{۲} + bx = N$$

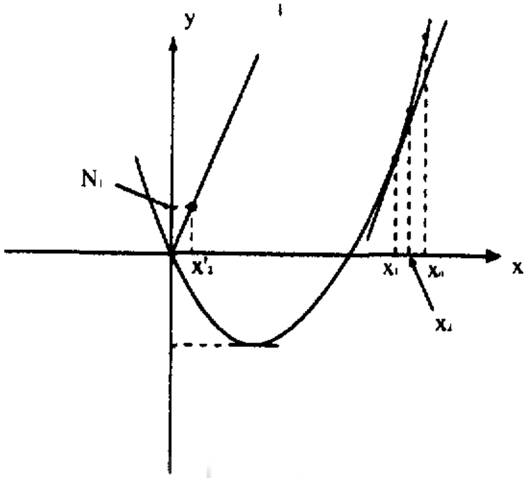
را در نظر می‌گیریم: حل این معادله منجر به تقاطع خط $y = N$ و منحنی $y = f(x)$ خواهد شد. منحنی نمایش تغییرات تابع $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم (شکل ۸)

فرض می‌کنیم $x_۰$ یک ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = N$ باشد ابتدا تقریبی مانند $x_۱$ را به‌دست می‌آوریم به‌طوری که $x_۱ < x_۰$ باشد

هرگاه خط $Y = [f'(x_۱)]x$ را در نظر بگیریم، ملاحظه می‌شود که این خط با خط مماس بر منحنی در نقطه‌ای به‌طول $x_۱$ موازی می‌باشد.

روی خط $Y = [f'(x_۱)]x$ نقطه‌ای به‌دست می‌آوریم که عرض آن برابر با $N_۱$ باشد. طول این نقطه را $x'_۲$ می‌نامیم. خواهیم داشت:

$$x_۰ = x_۱ + x'_۲ + \cdots$$



شکل۸

که در آن $x_1 + x'_2 = x_2$ می‌باشد
این عمل را با x_2 تکرار می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$x_3 = x_2 + x'_3$$

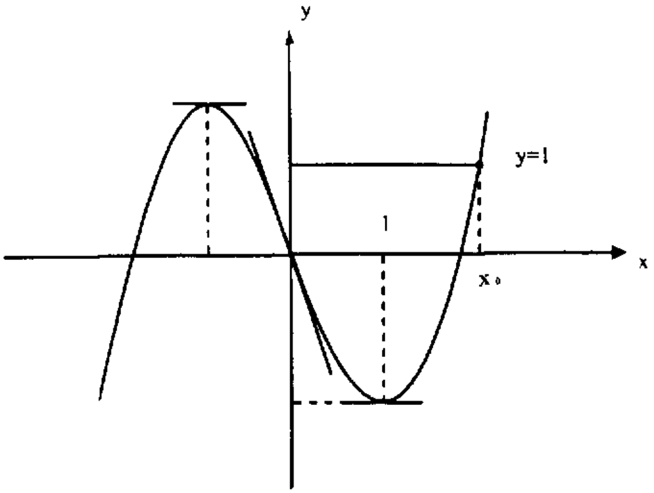
به‌این ترتیب به عدهٔ اعشار x_0 اضافه می‌شود. و می‌توان x_0 را تا هر تقریبی به‌دست آورد.

مثلاً در حالت خاص معادلهٔ مورد بحث بیرونی یعنی $x^3 - 3x = 1$ را در نظر می‌گیریم. برای حل این معادله به‌روش تقریبات متوالی منحنی نمایش تغییرات تابع

$$Y = f(x) = x^3 - 3x$$

را رسم کرده و با خط $Y = 1$ تقاطع می‌دهیم.

$$f(x) = x^3 - 3x \;\Rightarrow\; f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$$



شکل۹

x	-۱	۰		۰		$+۱$
$f'(x)$	$+$	۰	$-$	-۳	$-$	۰
$f(x)$	$\nearrow$	۲	$\searrow$	۰	$\searrow$	-۲

$f(x) = ۰ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۳}$ جواب منفی x را کنار می‌گذاریم بنابراین جواب معادلهٔ مفروض در فاصله $۲ > x > ۱$ قرار دارد. مقادیر مابین ۱ و ۲ را در معادله $f(x)$ امتحان می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$f(۱/۹) > ۱ = N$$

بنابراین ۱/۸ را در معادله امتحان می‌کنیم

$$f(۱٫۸) = (۱٫۸)^۳ - ۵٫۴ = ۰٫۴۳۲ < ۱ = N$$

$$f'(x) = ۳(x^۲ - ۱) \Rightarrow f'(۱٫۸) = ۳(۲٫۲۴) = ۶٫۷۲$$

$$x'_۲ = \frac{N_۱}{f'(x_۱)} = \frac{۰٫۴۳۲}{۶٫۷۲} = ٪۶۴۲۸۶$$

$$x_۲ = x_۱ + x'_۲ = ۱٫۸ + ٪۶۴۲۸۶ = ۱٫۸۶۴۲۸۶$$

$$N_۲ = ۱ - f(x_۲) = ۱ - ۰٫۸۸۶۵۸۴ = ۰٫۱۱۳۴۱۶$$

$$x'_۳ = \frac{N_۲}{f'(x_۲)} = \frac{۰٫۱۱۳۴۱۶}{۷٫۴۲۶۶۸۶} = ٪۱۵۲۷۱$$

به‌همین ترتیب داریم:

$$x_۳ = x_۲ + x'_۳ = ۱٫۸۶۴۲۸۶ + ٪۱۵۲۷۱ = ۱٫۸۷۹۵۵۷$$

همین‌طور می‌توان این عمل را تکرارکرد و x را تا هشت رقم اعشار به شکل زیر به‌دست آورد.

$$x_۸ = x_۷ + x'_۸ = ۱٫۸۷۹۳۸۵۲۴۱۸$$

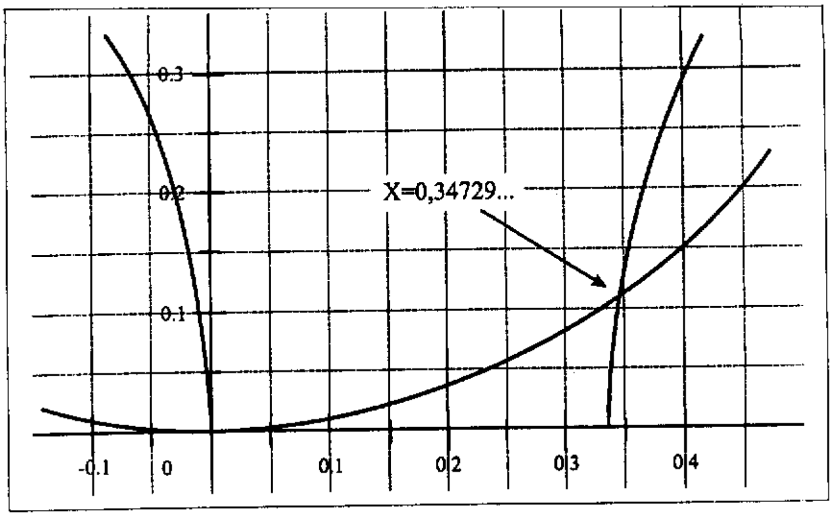
۳ـ۳ حل معادله بیرونی با استفاده از تقاطع یک سهمی و یک هذلولی

معادله بیرونی را می‌توان به شکل زیر نیز نمایش داد:

$$\frac{x}{۱} = \frac{y}{x} = \frac{۳x - ۱}{y}$$

که در آن $y = x^۲$ است.

بنابراین حل مسئله منجر به تقاطع سهمی $y = x^۲$ و هذلولی $y^۲ = ۳x^۲ - x$ می‌گردد (شکل ۱۰).



شکل ۱۰

۳ـ۴ حل معادله بیرونی با تقاطع یک دایره و یک سهمی

طرفین معادلهٔ $x^3 - 3x - 1 = 0$ را در x ضرب می‌کنیم خواهیم داشت:

$$x^4 - 3x^2 - x = 0 \qquad (1)$$

فرض می‌کنیم:

$$x^2 = y \qquad (2)$$

این مقدار را در معادلهٔ (۱) قرار می‌دهیم خواهیم داشت:

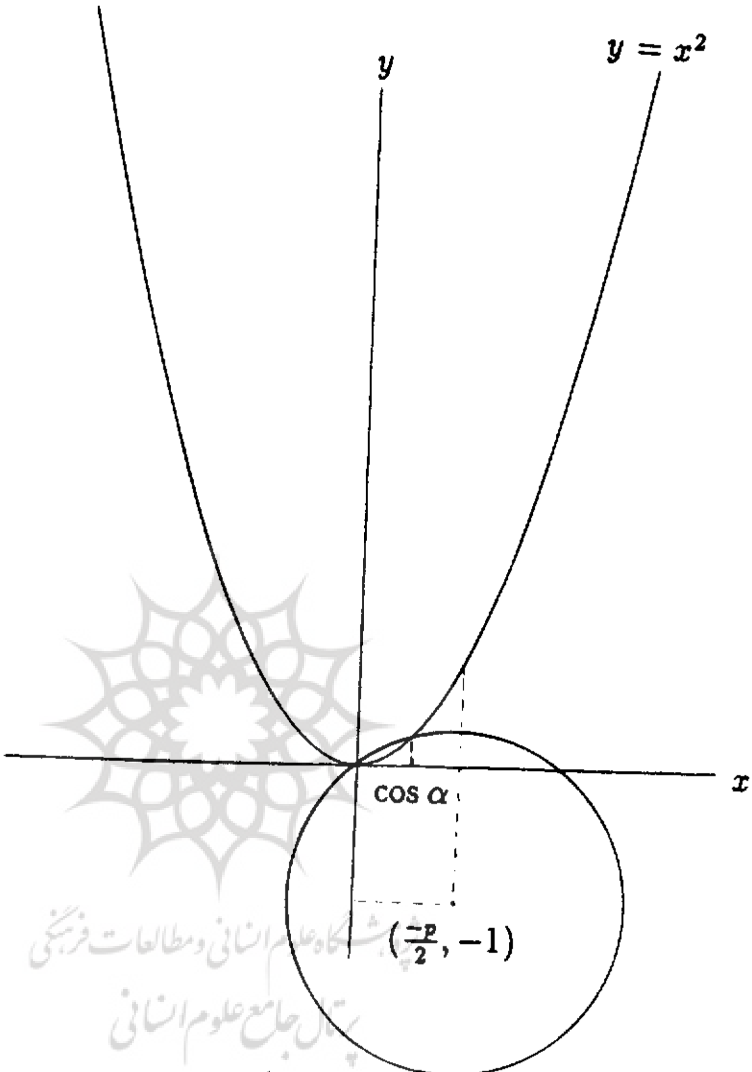
$$y^2 - 3y - x = 0 \qquad (3)$$

طرفین معادلات (۲) و (۳) را عضو به عضو با هم جمع می‌کنیم نتیجه می‌شود:

$$x^2 + y^2 - 4y - x = 0 \qquad (4)$$

معادله (۴) معادله دایره‌ای است که از مرکز مختصات می‌گذرد و آن را به شکل زیر نیز می‌توان نمایش داد:

$$(x - \frac{1}{2})^2 + (y - 2)^2 = \frac{17}{4}$$

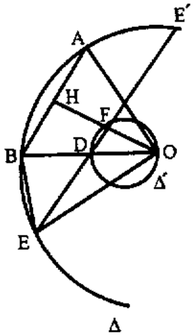


شکل ۱۱

این دایره سهمی $y = x^۲$ را در نقطه‌ای به‌طول $x \approx$ ۱٫۸۷۹۳۸۵۲۴۶۸ قطع می‌کند که طول نُه‌ضلعی منتظم به‌صوت تقریبی است.

۴- مقایسه روشهای بیرونی و بوزجانی

بین روشهای بوزجانی و بیرونی برای رسم نُه‌ضلعی منتظم باید گفت که روش بوزجانی برای صنعتگران ساده‌تر می‌باشد. با وجود این هم روش بوزجانی و هم روش بیرونی امروزه کارائی خود را از دست داده‌اند.



شکل۱۲

درباره روش بیرونی باید اشاره کرد، که بوسیله روش هندسی طولانی معادله مسئله را بدست می‌آوریم؛ درصورتی که امروزه یک فرمول ساده مثلثاتی ما را به این معادله راهبر می‌شود. در واقع کافی است که فرمول مثلثاتی:

$$۴\cos^{۳}\alpha = \cos ۳\alpha + ۳\cos\alpha$$

را برای $\alpha = ۲۰^\circ$ بکار بریم خواهیم داشت:

$$۴\cos^{۳} ۲۰^\circ = \cos ۶۰^\circ + ۳\cos ۲۰^\circ$$

ضلع نُه‌ضلعی منتظم برابر است با $۲\cos ۲۰^\circ$ هرگاه این مقدار را x فرض کنیم خواهیم داشت $x^{۳} = ۳x + ۱$ که همان معادلهٔ مسئله است.

در روش ابوالوفا نیز باید یک زاویه را به شکل مکانیکی و نه هندسی به سه قسمت متساوی تقسیم کرد. تقسیمی که ما را از یک روش زیبا دور می‌کند. در روش زیر ترسیمی ارائه گردیده است که ما را از اینگونه ترسیمات مکانیکی بی‌نیاز می‌گرداند:

فرض می‌کنیم Δ دایره‌ای به مرکز O باشد. زاویهٔ AOB را مساوی ۴۵° انتخاب می‌کنیم و فرض می‌کنیم D وسط OB باشد. به قطر OD دایرهٔ Δ' را رسم می‌کنیم. عمود OH بر روی خط AB دایرهٔ Δ' را در نقطهٔ F قطع می‌کند. FD را کشیده و آن را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ Δ را در نقطه E قطع نماید. BE با تقریب خوبی ضلع نُه‌ضلعی منتظم خواهد بود.

اثبات: فرض می‌کنیم $\angle BOE = ۲\theta$

در این صورت خواهیم داشت: $\angle OBE = \angle OEB = \frac{\pi}{۲} - \theta$ از طرف دیگر

$$\angle BED = \frac{۳}{۸}\pi$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\angle DEO = \frac{۳}{۸}\pi - ۲\theta, \quad \angle BED = \frac{۱}{۸}\pi + \theta$$

از مثلث‌های BED و DOE نتیجه می‌شود:

$$\frac{BD}{\sin\left(\frac{\pi}{۸} + \theta\right)} = \frac{DE}{\sin\left(\frac{\pi}{۲} - \theta\right)}$$

$$\frac{DO}{\sin\left(\frac{۳\pi}{۸} - ۲\theta\right)} = \frac{DE}{\sin ۲\theta}$$

با توجه به اینکه BD برابر با DO است از تساوی‌های فوق نتیجه می‌شود:

$$\sin\left(\frac{\pi}{۸} + \theta\right)\sin ۲\theta = \sin\left(\frac{۳\pi}{۸} + ۲\theta\right)\cos\theta$$

با بسط طرفین این تساوی و با در نظر گرفتن اینکه:

$$\sin\frac{\pi}{۸} = \cos\frac{۳\pi}{۸}$$

به معادله زیر خواهیم رسید:

$$۳\tan^۲\theta + ۴\tan\theta\tan\frac{\pi}{۸} - ۱ = ۰$$

از آنجائیکه $\tan\frac{\pi}{۸} = \sqrt{۲} - ۱$ می‌باشد پس جواب معادله چنین می‌شود:

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{۱۵ - ۸\sqrt{۲}} - ۲(\sqrt{۲} - ۱)}{۳}$$

با محاسبه این کسر سرانجام خواهیم داشت:

$$\theta = ۱۹^\circ ۵۹,۶' \# ۲۰^\circ$$