مجلۀ علمی ـ پژوهشی دانشکدۀ ادبیات و علوم انسانی دانشگاه اصفهان
دورۀ دوم، شماره پنجاه و یکم
زمستان ۱۳۸۶، صص۶۹-۸۴

بررسی و مقایسه دو دلالت شناسی منطق مرتبه دوم

دکتر سید محمدعلی حجتی* – علیرضا دارابی**

چکیده

منطق مرتبۀ دوم بخشی از منطق کلاسیک است که واژگان آن با اضافه کردن متغیر محمولی به واژگان منطق مرتبۀ اول (بدون اینهمانی) شکل می‌گیرد. به تبع این تغییر واژگان، قواعد ساخت، اصول موضوعه و قواعد استنتاجی آن نیز بر مبنای منطق مرتبۀ اول (بدون اینهمانی) شکل می‌گیرد. اصول موضوعۀ این منطق متشکل از قالبهای اصل موضوعی منطق مرتبۀ اول (بدون اینهمانی)، چند قالب اصل موضوعی که شباهت زیادی به اصول منطق مرتبه اول دارند و همچنین قالبهای اصل موضوعی شمول نسبت و شمول تابع است.

در منطق یاد شده می‌توان اصل موضوع اینهمانی را بر پایۀ تعریف لایب نیتسی از اینهمانی به دست آورد.

برای منطق مرتبۀ دوم دو معناشناسی مختلف ارائه شده است: معناشناسی استاندارد که مدلهای آن شباهت زیادی به مدلهای معمول در منطق مرتبه اول دارد؛ معناشناسی هنکین که تفاوت اساسی آن با مدلهای استاندارد در توانایی محدود نمودن مجموعه‌هاست. هر فرمول معتبر در معناشناسی هنکین در معناشناسی استاندارد نیز معتبر است، اما عکس آن صادق نیست. هر فرمول صدق‌پذیر در معناشناسی استاندارد، در معناشناسی هنکین نیز صدق‌پذیر است، اما عکس آن صادق نیست. اصل موضوع شمول نسبت در معناشناسی هنکین معتبر نیست. بهنجاری و سازگاری منطق مرتبۀ دوم، هم بر اساس معناشناسی مدل استاندارد و هم معناشناسی مدل هنکین قابل اثبات است، اما می‌توان اثبات کرد که منطق مرتبۀ دوم بر پایۀ معناشناسی استاندارد ناتمام است. همچنین بر پایۀ این معناشناسی فراقضیۀ نافشردگی برای منطق مرتبۀ دوم قابل اثبات است. اما بر پایۀ معناشناسی هنکین تمامیت و فشردگی منطق مرتبۀ دوم اثبات می‌شود.

در این مقاله مسأله اصلی مورد بحث ما، بررسی اهمیت تغییر دلالت‌شناسی و تبعات آن در بخشهای مختلف نحوشناسی (اعم از اصول موضوعه، روشهای استنتاجی و...) و همچنین فراقضایا با تمرکز بر بخشی از منطق کلاسیک؛ یعنی منطق مرتبۀ دوم است. در بررسیهای خود نشان داده‌ایم که تفاوت و تغییر در دلالت‌شناسی به تغییر در بخشهای فوق‌الذکر منجر خواهد شد.

---

* – استادیار گروه فلسفه و حکمت دانشگاه تربیت مدرس.

** – کارشناس ارشد گروه فلسفه و حکمت دانشگاه تربیت مدرس.

واژه‌های کلیدی

منطق مرتبهٔ دوم، معناشناسی استاندارد، معناشناسی هنکین، اصل موضوع شمول نسبت.

مقدمه

در زبان صوری منطق رایج، که تنها دارای متغیرهای فردی (متغیرهای مرتبه اول) است، دامنهٔ سخن تنها اشیا را در بر می‌گیرد، اما اگر زبان ما شامل متغیرهای مرتبه دوم باشد و به عبارتی، وارد منطق مرتبه دوم شویم، دامنهٔ سخن ما می‌تواند صفات، مجموعه‌ها، روابطی دربارهٔ اشیای دامنه و توابعی از دامنه به خود دامنه را نیز در بر بگیرد. برای مثال، گزاره «نادر همهٔ صفات یک فرمانده بزرگ را دارا بود، اما هیچ یک از صفات یک فرمانروای خوب را دارا نبود» و یا گزاره «خاصیتی وجود دارد که فقط اعداد اول آن را دارا هستند» را نمی‌توان تنها به کمک متغیرهای فردی صورتبندی نمود، چرا که عبارات «همه صفات»، «هیچ یک از صفات» و «خاصیتی وجود دارد» در این گزاره‌ها ما را نیازمند استفاده از متغیرهایی غیر از متغیرهای فردی (مرتبه اول) می‌کند. با اضافه شدن متغیرهای مرتبه سوم ما می‌توانیم از صفات صفات، مجموعه‌های مجموعه‌ها، توابع صفات و ... سخن بگوییم.

یک زبان، مرتبهٔ اول است اگر تنها شامل متغیرهای مرتبه اول باشد؛ مرتبهٔ دوم است اگر تنها شامل متغیرهای مرتبه اول و مرتبه دوم باشد و مرتبهٔ بالاتر است اگر حداقل مرتبهٔ دوم باشد.

در آموزش منطق صوری، اغلب زبان بالاتر نادیده گرفته می‌شود یا با اشاره‌ای گذرا از آن می‌گذرند. این در حالی است که تقریباً همه بنیان گذاران منطق جدید مانند فرگه(۸)، پئانو(۱۱)، راسل و وایتهد(۱۸) به آن اشاره کرده‌اند. با این همه، بعضی از نویسندگان نیز به آن به شکلی مبسوط‌تر پرداخته‌اند، از آن جمله می‌توان به کارهای هیلبرت (Hilbert) – آکرمان (Ackermann) (۱۰) و شپیرو[۱] (Shapiro) (۱۳) اشاره نمود. با وجود این، اشاره به این نکته ضروری است که تعداد زیادی از نمادهای ریاضی مدرن در هیچ زبان مرتبه اولی فرمول‌بندی نمی‌شود؛ یا هیچ توصیف مناسبی از ساختار آنها نمی‌توان ارائه داد. برعکس، زبان مرتبه بالاتر ابزار بیانی بسیار قوی ـ شاید بتوان گفت به قوت زبان معمول در ریاضی ـ را در اختیار ما قرار می‌دهد.

باروایز(Barwise) بخوبی این عدم توانایی زبان مرتبهٔ اول را در جملات زیر بیان می‌کند:

«ما منطق دانان از خلاصه کردن همه منطق به منطق مرتبهٔ اول، در حالی که اغلب مفاهیم ریاضیات مدرن در منطق مرتبهٔ اول قابل دستیابی نیست، زیان دیده‌ایم... . نمی‌توان به این نظرگاه بازگشت که منطق [تنها] منطق مرتبه اول است (12/P. 34).

با این همه نمی‌توان چندان نیز از این عدم توجه به منطق‌های مرتبهٔ بالاتر تعجب کرد، چرا که منطق‌های مرتبه بالاتر با مشکلات مهمی روبه‌رو هستند. بخشی از این مشکلات فلسفی است و بخشی از آن مربوط به ناتمامیت (incompleteness) و نافشردگی (incompactness)[۲] منطق مرتبهٔ دوم بر پایهٔ دلالت‌شناسی استاندارد است؛ اگرچه از سوی دیگر این مشکلات می‌تواند جذابیتهایی نیز برای منطق مرتبهٔ دوم ایجاد کند، که در این مقاله به بعضی از آنها اشاره خواهد شد.

پس از آن که گودل تفکیک نحوشناسی(syntax) و دلالت‌شناسی منطق را برای اثبات تمامیت منطق مرتبه اول به کار گرفت، گسترهٔ ارائهٔ دلالت‌شناسی و اثبات فراقضایای مربوط به آن به اکثر نظامهای منطقی کشیده شد. بسیاری از

منطق‌دانان که تلاشهای خود را بر روی نظامهای منطقی نیمه کلاسیک و غیر کلاسیک متمرکز نموده‌اند، خود را موظف به ارائۀ دلالت‌شناسی مناسبی برای آن نظامها می‌دانند. با این همه، تفاوت نحوشناسی و دلالت‌شناسی می‌تواند از جهات دیگری نیز مورد توجه قرار بگیرد. برای مثال، این پرسش را می‌توان مطرح نمود که چگونه می‌توان با ارائۀ دلالت‌شناسی‌های متفاوت به نتایج نحوی و حتی فراقضایای متفاوت دست یافت؟ قابل توجه‌ترین این نمونه‌ها را می‌توان در بخشی از منطق کلاسیک؛ یعنی منطق مرتبه دوم یافت. دو دلالت‌شناسی متفاوت این منطق نتایج کاملا متفاوتی را چه در نحو و چه در فراقضایا، چه در تعداد گزاره‌های صدق‌پذیر و چه در تعداد گزاره‌های معتبر ایجاد می‌نماید. در این مقاله تلاش می‌شود در حد مقدور به معرفی این دلالت‌شناسی‌ها و بررسی تبعات قبول آنها بپردازیم.

اما پیش از آن، بعضی از اصطلاحات موجود در منطق مرتبۀ اول را یادآوری می‌کنیم.

یادآوری بعضی اصطلاحات

آنچه امروزه در ایران با عنوان منطق جدید آموزش داده می‌شود، در حقیقت بخشی از چیزی است که در غرب به عنوان منطق کلاسیک شناخته می‌شود. اغلب همۀ بخشهای منطق کلاسیک نیز ارائه نمی‌گردد و منطق کلاسیک تنها در حد منطق مرتبۀ اول آموزش داده می‌شود. بی‌شک مقبولترین و معمولترین بخش منطق جدید همان است که در این کتب آموزشی معرفی می‌شود، اما پژوهش و بررسی دربارۀ بسیاری از مباحث فلسفی موجود در حوزۀ منطق نیاز به آشنایی با مباحثی خارج از محدودۀ منطق مرتبۀ اول دارد. ما در این پژوهش قصد داریم پس از معرفی اجمالی منطق مرتبۀ دوم به بررسی و مقایسۀ دو دلالت‌شناسی منطق مرتبۀ دوم بپردازیم، اما پیش از آن بعضی از مفاهیم مقدماتی در منطق مرتبۀ اول را یادآوری می‌کنیم.

معمولاً در کتب آموزشی منطق دو نحوۀ مطالعۀ منطق مورد توجه و معرفی قرار می‌گیرد: **نحوشناسی** که مطالعۀ روابط صوری بین عبارات زبانی است و **دلالت‌شناسی**[۳] که مطالعۀ روابط بین عبارات زبانی و اشیای غیرزبانی (non-linguistic objects) که مدلول (deinotation) آنها هستند می‌باشد (۵/ص۳۷۵). به این ترتیب، نحوشناسی یک زبان صوری مانند L مطالعۀ واژگان، روابط صوری بین فرمولها و تفکیک آنها از دیگر عبارات L بدون توجه به معنا و مدلول آنهاست (۴/ص۹). در نحوشناسی یک زبان، ابتدا واژگان زبان و سپس قواعد ساخت (formation rules) معرفی می‌گردند که مشخص می‌کنند چگونه می‌توان در آن زبان فرمولهای درست ساختی (well-formed formula) به دست آورد. همچنین نحوشناسی شامل یک دستگاه استنتاجی (Deductive apparatus) است. این دستگاه می‌تواند شامل مجموعه‌ای از اصول موضوعه (Axioms) و همچنین قواعد استنتاج (Rules of inference) باشد. یک دستگاه می‌تواند فاقد اصول موضوعه باشد، اما دستگاهی وجود ندارد که فاقد قاعدۀ استنتاجی باشد.

یکی از ابزارهایی که در دلالت‌شناسی به کار گرفته می‌شود، مدلها[۴] هستند. یک مدل شامل مجموعه‌ای از اشیای غیر زبانی است که مدلول عبارات زبانی واقع می‌شوند و همچنین شامل تابعی است که چگونگی رابطۀ اشیای غیر زبانی و عبارات زبانی را مشخص می‌کند. معمولترین مدلها، مدلهای استاندارد هستند. هر مدل استاندارد زوج مرتبی

با ساختاری به صورت $M=\langle d,I \rangle$ است که در آن d مجموعه‌ای ناتهی است که دامنهٔ مدل نامیده می‌شود و I یک تابع تعبیر(interpretation function) است که عبارات زبان را به اعضای دامنهٔ تعبیر d اسناد می‌دهد.

در همهٔ کتب آموزشی موجود به فارسی دربارهٔ منطق، I هم ثوابت و هم متغیرهای موجود در زبان را به اشیای غیر زبانی اسناد می‌دهد، اما باید توجه داشت که شیوه دیگری نیز برای استفاده از مدلها وجود دارد. در این شیوه تابع دیگری برای اسناد متغیرها (متغیرهای فردی در حوزهٔ منطق مرتبهٔ اول و متغیرهای فردی و متغیرهای محمولی در حوزهٔ منطق مرتبهٔ دوم) معرفی می‌گردد.(۵) به این ترتیب s را به عنوان یک تخصیص متغیر (variable-assignment) که تابعی از متغیرهای زبانی به d است، معرفی می‌کنیم. استفاده از تخصیص متغیر نحوهٔ بیان مباحث را ساده‌تر می‌کند. بر پایهٔ این مفهوم تعاریف زیر برقرار است:

– اگر Φ فرمول و M مدلی باشد که به ازای هر تخصیص s بر روی آن داشته باشیم $M,s \models \Phi$ آنگاه M را مدلی برای Φ می‌نامیم و می‌نویسیم: $M \models \Phi$

– فرمول Φرا (معنایی) معتبر(semantically valid) یا منطقاً صادق(logically true) می‌نامیم، اگر به ازای هر مدل M و هر تخصیص s روی آن داشته باشیم: $M,s \models \Phi$؛ یا به عبارتی، به ازای هر مدل M داشته باشیم: $M \models \Phi$

– فرمول Φرا صدق‌پذیر(satisfiable) گوییم، اگر مدلی مانند M و تخصیصی مانند s روی آن وجود داشته باشد که $M,s \models \Phi$ باشد. تعاریف بالا هم در مدلهای استاندارد و هم مدل هنکین برقرار هستند.

نحوشناسی منطق مرتبه دوم

در این مقاله به ارائهٔ نحوشناسی منطق مرتبهٔ دوم در سیستم استنتاج طبیعی بسنده نموده‌ایم، چرا که سیستم استنتاج طبیعی عمومی‌ترین سیستمی است که در معرفی منطق مرتبهٔ دوم به کار می رود و از سویی به کمک آن راحت‌تر از بقیهٔ سیستم‌های موجود می‌توان دربارهٔ تفاوتهای ناشی از دلالت‌شناسی‌های منطق مرتبهٔ دوم سخن گفت.(۶)

زبان صوری

زبان صوری منطق شامل واژگان، قواعد ساخت و تعاریف است. واژگان زبان صوری منطق مرتبهٔ دوم شامل همهٔ واژگان صوری منطق مرتبه اول (بدون اینهمانی) است که متغیرهای محمولی به آن اضافه شده‌اند. برای واضحتر شدن مفهوم متغیرهای محمولی، اشاره به این نکته لازم است که آنچه معمولاً در کتب آموزشی منطق مرتبهٔ اول محمول نشانه خوانده شده، آموزش داده می‌شود، در حقیقت ثابت محمولی است که نمی‌توان بر سر آن سور آورد؛ از این پس هر کجا از محمول نشانه نام بردیم، منظور هم متغیرهای محمولی و هم ثوابت محمولی است. به این ترتیب، واژگان منطق مرتبهٔ دوم به صورت زیر نوشته می‌شوند:

جملهٔ نشانه‌ها (sentence-Letters): $P, Q, R, \ldots, W, P', Q', R', \ldots, W', \ldots$

ثوابت منطقی(logical Constants): $\neg, \supset, (,), \forall$

ثوابت فردی(individual Constants): $a, b, c, d, e, a', b', c', \ldots$

متغیرهای فردی(individual variables): $t, u, x, y, z, t', u', \ldots$

متغیرهای محمولی(predicate variables): $X^1, Y^1, Z^1, X^2, Y^2, Z^2, \ldots, X'^1, Y'^1, Z'^1, X'^2, Y'^2, Z'^2, \ldots$

(شمارهٔ بالای متغیرهای محمولی بیانگر تعداد موضع محمول است، که معمولاً برای محمول یک موضعی عدد یک حذف می‌شود).

به تبع این تغییرات، قواعد ساخت نیز تغییر می کنند؛ به این صورت که به قواعد ساخت منطق مرتبهٔ اول (بدون اینهمانی) قواعد زیر افزوده می‌شود:

(FR1) اگر φ یک متغیر محمولی n موضعی ($n>0$) و $\beta_1,..., \beta_n$ نماد فردی باشند $\varphi\beta_1,...,\beta_n$ فرمول است.

(FR2) اگر Φ فرمول و φ یک متغیر محمولی باشد $\forall\phi\Phi$ یک فرمول است.

در بعضی کتابها (نک۲ و۴) برای معادل این قاعده برای متغیرهای فردی دو شرط آورده شده است که می‌توان به صورت ذیل آنها را برای قاعدهٔ بالا آورد:

- Φ شامل مورد آزادی از متغیر φ باشد؛
- Φ شامل سوری برحسب φ نباشد.

به این ترتیب، طبیعی است که به مجموعهٔ تعاریف منطق مرتبهٔ اول (بدون اینهمانی) تعریفی برای سور وجودی که بر متغیر محمولی عمل نموده است، اضافه شود:

$$(\exists\varphi)\Phi : df\neg(\forall\varphi)\neg\Phi$$

اما نکتهٔ مهم در تعریفها وجود تعریفی برای اینهمانی است که از نقاط قوت منطق مرتبهٔ دوم است؛ هرچند مشخص است تعریف اینهمانی در این منطق مبتنی بر نگرش فیلسوفانهٔ عمیقی به چیستی اینهمانی است که می‌تواند مورد چالش فیلسوفان قرار بگیرد.

این تعریف به لایب نیتس منسوب است.

$$\alpha = \beta : df \,\forall \varphi\, (\varphi\alpha \equiv \varphi\beta)$$

که α و β نماد فردی هستند.

بنا به قرار داد تعاریف زیر نیز برقرار هستند:(۷)

$$\varphi = \eta : df\forall < x >_n (\varphi < x >_n \equiv \eta < x >_n)$$
$$\xi = \varsigma : df\forall < x >_n (\xi < x >_n = \varsigma < x >_n)$$

دستگاه استنتاجی

دستگاه استنتاجی شامل اصول موضوعه و قواعد استنتاج است. اصول موضوعهٔ منطق مرتبهٔ دوم بر مبنای دلالت‌شناسی هنکین، با اصول موضوعهٔ منطق مرتبهٔ دوم بر مبنای دلالت‌شناسی استاندارد متفاوت است.

اصول موضوعهٔ منطق مرتبهٔ دوم با دلالت‌شناسی هنکین بر مبنای اصول موضوعهٔ منطق مرتبهٔ اول (بدون اینهمانی) شکل می‌گیرد. اصول زیر که شباهت فراوانی به دو اصل در مجموعهٔ اصول منطق مرتبهٔ اول دارند،(۸) به مجموعهٔ اصول منطق مرتبهٔ اول اضافه می‌شوند تا اصول موضوعه منطق مرتبه دوم با دلالت‌شناسی هنکین را شکل دهند.

$$A1 - \forall\varphi^n\Phi\varphi^n \supset \Phi\eta^n$$

η^n یک محمول نشانه n موضعی است که جانشین همه موارد آزاد φ^n در $\Phi\varphi^n$ شده است و در همهٔ مواردی که φ^n در $\Phi\varphi^n$ آزاد است η^n نیز باید در $\Phi\eta^n$ آزاد باشد.

$$A2 - \forall\varphi^n(\Phi \supset \Psi) \supset (\Phi \supset \forall\varphi^n\Psi)$$

مشروط بر این که Φ هیچ مورد آزادی از φ^n نداشته باشد.

معادل این اصول در دستگاه استنتاج طبیعی همانند معادل بدیل‌های آنها در منطق مرتبه اول است. بنابراین دستگاه استنتاج طبیعی منطق مرتبه دوم بر اساس دلالت‌شناسی هنکین شامل قواعد زیر است: (۹)

حذف سور کلی مرتبهٔ دوم:

$$\begin{array}{ll} (n) & (\forall\varphi^n)\Phi\varphi^n \\ \hline (n) & \therefore \Phi\eta^n \end{array}$$

(ح $\forall^2$)

شرط عمومی: $\Phi\varphi^n$دامنه سور است و $\Phi\eta^n$ باید نمونه درست (legitimate instance) آن باشد؛ یعنی η^n فقط جانشین تمامی موارد آزاد φ^n در $\Phi\varphi^n$ می‌گردد و در صورتی که η^n یک متغیر باشد ، در کلیه مواردی که φ^n در $\Phi\varphi^n$ آزاد است، η^n نیز باید در $\Phi\eta^n$ آزاد باشد.

معرفی سور کلی مرتبهٔ دوم:

$$\begin{array}{ll} (n) & \Phi\eta^n \\ \hline (n) & \therefore (\forall\varphi^n)\Phi\varphi^n \end{array}$$

(م $\forall^2$)

شرط عمومی: ذکر شده در بالا

شرایط اختصاصی: ۱- η^n باید متغیر باشد؛

۲- η^n نباید در مقدمات و در فرضی که $\Phi\eta^n$ در حوزه آن است، آزاد باشد؛

۳- η^n نباید در $(\forall\varphi^n)\Phi\varphi^n$ آزاد باشد.

حذف سور وجودی مرتبهٔ دوم:

$$\begin{array}{ll} (n) & (\exists\varphi^n)\Phi\varphi^n \\ (m) & \Phi\eta^n \\ & \vdots \\ (p) & \underline{\Psi} \\ \hline (m,p)(n) & \therefore \Psi \end{array}$$

(ح $\exists^2$)

شرط عمومی: ذکر شده در بالا

شرایط اختصاصی: ۱- η^n باید متغیر باشد؛

۲- η^n نباید در Ψآزاد باشد؛

۳- η^n نباید در سطرهای قبل از $\Phi\varphi^n$ آزاد باشد.

معرفی سور وجودی مرتبهٔ دوم:

$$\frac{\Phi\eta^{n} \quad (n)}{(n) \therefore (\exists\Phi\varphi^{n})} \qquad (\exists^{2}\text{م})$$

شرط عمومی: ذکر شده در بالا

ملاحظه می‌کنیم که قواعد استنتاجی و همچنین اصول موضوعه ارائه شده کاملاً شبیه اصول موضوعه و قواعد استنتاجی منطق مرتبهٔ اول هستند، تنها با یک تفاوت و آن هم قرار گرفتن متغیرها و ثابت‌های محمولی به جای متغیرها و ثابت‌های فردی است. به این ترتیب، اگر اصول و قواعد منطق مرتبهٔ دوم به همین تعداد محدود باشد، منطق مرتبهٔ دوم بسط ساده‌ای از منطق مرتبهٔ اول خواهد بود. به بیانی دیگر، در صورتی که تنها همین اصول و قواعد به اصول و قواعد منطق مرتبهٔ اول اضافه می‌شد، قضایای منطق مرتبهٔ دوم عبارت بودند از قضایای منطق مرتبه اول به اضافه قضایای جدیدی که از جایگزینی متغیرها و ثابت‌های محمولی به جای متغیرها و ثابت‌های فردی در قضایای منطق مرتبهٔ اول شکل گرفته‌اند. از آنجایی که اصول موضوعه و قواعد منطق مرتبهٔ دوم بر اساس دلالت‌شناسی هنکین، تنها همین چیزی است که در بالا ذکر شد، منطق مرتبهٔ دوم بر پایهٔ دلالت‌شناسی هنکین، بسط ساده ای از منطق مرتبهٔ اول خواهد بود، اما این مطلب دربارهٔ دلالت‌شناسی استاندارد صادق نیست.

اصول موضوعه منطق مرتبهٔ دوم با دلالت‌شناسی استاندارد همان اصول موضوعه منطق مرتبهٔ دوم با دلالت‌شناسی هنکین است؛ به اضافه قالب اصل موضوعی زیر که شمول نسبت (relation comprehension) نام دارد. فرمولهای به دست آمده از این قالب اصل موضوعی را «فرمولهای شمول نسبت» می نامند.

$$A3 - \exists\varphi^{n}\forall < x >_{n} (\varphi^{n} < x >_{n} \equiv \Phi < x >_{n})$$

که Φ فرمول درست ساختی است که مورد آزادی از φ^{n} در آن یافت نمی‌شود.

اگرچه معنای فرمول فوق به بخش دلالت‌شناسی مربوط می‌شود، اما مناسب است که اجمالاً در همین موضع برای درک بیشتر خواننده معنایی از فرمول فوق ارائه شود:

به ازای هر فرمول درست ساخت مجموعه‌ای وجود دارد که هر شیء یا چند تایی مرتب، عضو آن مجموعه است اگر و تنها اگر آن شیء یا چند تایی مرتب آن فرمول را صدق‌پذیر نماید. به بیانی دیگر، اگر فرمولی درست ساخت باشد، همیشه مجموعه اشیائی که آن را صدق‌پذیر می‌کنند، وجود دارد.

مطلب قابل توجه در این فرمول در این نکته نهفته است که با قبول این فرمول ، تمام مجموعه‌های ساخته شده از هر تعداد اشیائی که مورد بحث باشد (به بیانی دقیقتر در دامنهٔ مدل ما قرار داشته باشند) وجود دارند. به بیانی دیگر، فرمولهای شمول نسبت شکل فرمولی تفاوت بین دلالت‌شناسی استاندارد و دلالت‌شناسی هنکین را نشان می‌دهند. در بخش‌های بعدی به این تفاوت دقیقتر اشاره خواهیم کرد.

بنا به آنچه در سیستم‌های اصل موضوعی معمول است، در قواعد استنتاج به وضع مقدم و قواعد تعمیم بسنده می‌شود. بنابراین، قاعدهٔ استنتاجی زیر به مجموعه قواعد استنتاجی منطق مرتبهٔ اول (بدون اینهمانی) اضافه می‌شود:

تعمیم ۲(تع ۲)

$$\frac{\vdash\Phi}{\therefore (\forall\varphi^{n})\Phi}$$

دلالت‌شناسی منطق مرتبهٔ دوم

برای منطق مرتبهٔ دوم دو دلالت‌شناسی مهم ارائه شده است: دلالت‌شناسی استاندارد و دلالت‌شناسی هنکین.

دلالت‌شناسی استاندارد

در دلالت‌شناسی استاندارد و البته هر دلالت‌شناسیی ناچاریم از مدلها بهره ببریم (همچنان که در منطق مرتبه اول به آن اشاره شد). هر مدل در بردارندهٔ گونه‌ای انتخاب اشیا و همچنین رابطهٔ آن اشیا با اشیای زبانی است. به بیانی دیگر، در هر مدل استاندارد مجموعه‌ای از اشیا مشخص می‌شود و همچنین مشخص می‌شود که الفاظ زبان (منطق) چگونه با این مجموعه اشیا رابطه دارند. مثلاً مدلی استاندارد را فرض کنید که شامل مجموعه اشیای زیر باشد:

- شیء یک: یک انسان به نام محمود
- شیء دو: یک انسان به نام مسعود
- شیء سه: یک ساختمان به نام چهل ستون

این مدل نیازمند تابعی است که اسامی مسعود، محمود و چهل ستون را به این اشیا نسبت دهد. همچنین با توجه به زبان منطقی مورد بحث می‌تواند محمول انسان را به مسعود و محمود، محمول ساختمان را به چهل ستون و... نسبت دهد و به عبارتی، رابطهٔ بین اشیای زبانی؛ یعنی اسامی محمود، مسعود، چهل ستون، انسان و ساختمان را با اشیای زبانی دامنه برقرار سازد.

در این نوع دلالت‌شناسی مجموعه‌های ساخته شده از اشیای دامنه مقید نمی‌شوند، یا به عبارتی، مجموعه در این مدل موجودیتی مستقل ندارد و به محض وجود اشیای موجود می‌شود. برای مثال، اگر دامنهٔ یک مدل شامل همان سه شیئی باشد که دربارهٔ آنها سخن گفته شد، مجموعه‌های زیر بی‌شک در مدل استاندارد موجودند.

- مجموعه شامل هر سه شیء؛
- مجموعه تهی که شامل هیچ کدام از اشیا نیست؛
- مجموعه شامل شیء یک و دو (شیء با نام محمود و شیء با نام مسعود)؛
- مجموعه شامل شیء یک و سه (شیء با نام محمود و شیء با نام چهل ستون)؛
- مجموعه شامل شیء سه و دو (شیء با نام چهل ستون و شیء با نام مسعود).

بیان دقیقتر و فنی تر آنچه گفتیم، به صورت زیر است:

مدلها در این دلالت‌شناسی بسیار شبیه مدلهای معمول در منطق مرتبهٔ اول هستند.

زبان منطق مرتبه دوم L2K متشکل از یک زبان منطقی و مجموعه‌ای از الفاظ نامنطقی(non-logical) با نام K است(K تهی نیست).

هر مدلی زوج مرتبی با ساختاری به صورت $M=<d,I>$ است که در آن d مجموعه‌ای ناتهی است که دامنهٔ مدل نامیده می‌شود و I یک تابع تعبیر است که اعضای مجموعهٔ K را به اعضای دامنهٔ تعبیر d اسناد می‌دهد. برای مثال، اگر b یک ثابت فردی از K باشد، I(b) عضوی از دامنه مدل d است و اگر B نمادی برای یک رابطه دو موضعی باشد، آنگاه I(B) زیر مجموعه‌ای از $d \times d$ است. همچنین s را برای یک تخصیص متغیر که تابعی از متغیرهای L2K به d

است، به کار می‌بریم. s متغیرهای فردی را به عضوهای d، و متغیرهای محمولی n موضعی را به زیر مجموعه‌های d^n نسبت می‌دهد. گاهی برای اختصار آن را «تخصیص» می‌نامیم.

تمام تعاریف ذکر شده در بخشهای قبل دربارهٔ مدلهای استاندارد در اینجا نیز برقرار هستند و اهمیت خاصی در مقایسهٔ دو دلالت‌شناسی منطق مرتبهٔ دوم دارند.

دلالت‌شناسی هنکین

ساختار یک مدل در دلالت‌شناسی هنکین به صورت $M^H = \langle d,D,F,I \rangle$ است که d دامنهٔ مدل است. D دنباله‌ای از مجموعه‌هایی از روابط به صورتی است که به ازای هر n، D_n یک زیر مجموعهٔ ناتهی از مجموعهٔ توانی(۱۰) d^n است. بنابراین، اعضای D همه مجموعه هستند و همچنین هیچ D_n تهی نیست. F نیز دنباله‌ای از مجموعه‌هایی از توابع به صورتی است که به ازای هر n، F_n یک مجموعه ناتهی از توابع از d^n به d است. به این ترتیب، برای متغیرهای محمولی و تابعی محدودیت ایجاد می‌کنیم. در اینجا یک تخصیص متغیر، تابعی است که به هر متغیر فردی عضوی از d را تخصیص می‌دهد؛ همچنین به هر متغیر محمولی n موضعی، عضوی از F_n را تخصیص می‌دهد. تابع تعبر I نیز به هر ثابت فردی، عضوی از d را تخصیص می‌دهد، همچنین به هر ثابت محمولی n موضعی، عضوی از D_n و به هر ثابت تابعی n موضعی، عضوی از F_n را تخصیص می‌دهد.

همچنین فرمول Φ را هنکین (معنایی) معتبر یا هنکین منطقا صادق می‌نامیم، اگر به ازای هر مدل هنکین M^H و هر تخصیص s روی آن داشته باشیم $M^H,s \models \Phi$ یا به عبارتی، به ازای هر مدل هنکین M^H داشته باشیم: $M^H \models \Phi$

– فرمول Φ را هنکین صدق‌پذیر گوییم، اگر مدل هنکینی مانند M^H و تخصیصی مانند s روی آن وجود داشته باشد که: $M^H,s \models \Phi$

به این ترتیب، مدلهای هنکین مانند مدل‌های استاندارد هستند؛ با این تفاوت که در مدل هنکین برای مجموعه‌ها وضعیتی مستقل در نظر گرفته می‌شود و مجاز شمرده می‌شود که در حالتی که اشیای یک مجموعه موجود باشند، خود آن مجموعه موجود نباشد.

با توجه به این امر، تفاوتهای دلالت‌شناسی هنکین و دلالت‌شناسی استاندارد از دو وجه قابل تأملند:

اول: قضایای متفاوتی ایجاد می‌کنند (و ما در بخش بعد به آن خواهیم پرداخت)؛

دوم: تفاوتهای وجودشناختی دو دلالت‌شناسی.

تفاوت‌های موجود در قضایا بازتاب تفاوتی است که در وجودشناسی این دو دلالت‌شناسی نهفته است. در توضیح مورد دوم باید اضافه نمود که قرار دادن مجموعه‌ها در دامنه‌ای مستقل تنها می‌تواند بر اساس بنیان فلسفی مجاز شمرده شود. همچنین عدم استقلال مجموعه‌ها نیز باید دارای دلیلی فلسفی باشد و به عبارتی، برای برگزیدن هر کدام از دو دلالت‌شناسی باید دلیلی فلسفی ارائه گردد. از آنجایی که بحثهای گسترده‌ای در رابطه با نسبت مباحث وجودشناختی و منطق مرتبهٔ دوم وجود دارد و این مباحث مقدمات مفصلی را طلب می‌کنند که از حوصلهٔ این مقاله خارج است، ما در اینجا تنها به همین اشاره بسنده و تأکید می‌کنیم که تفاوتهای ناشی از برداشتهای فلسفی، از طریق دلالت‌شناسی به منطق وارد می‌شوند.

مقایسهٔ دلالت‌شناسی هنکین و دلالت‌شناسی استاندارد

تفاوت دو دلالت‌شناسی هنکین و استاندارد چیست؟ این تفاوت چه نتایجی را در منطق مرتبهٔ دوم به بار می‌آورد؟ به نظر می‌آید این تفاوت کاملاً جدی و بنیادی باشد؛ چرا که در همهٔ حوزه های اصلی که یک منطق باید در آن حوزه‌ها مورد مطالعه قرار گیرد، نتایج قبول این مدلها تفاوتهای مهمی با هم دارند. با این همه، اجازه دهید ابتدا بر روی خود مدلهای هنکین و استاندارد متمرکز شویم و مشخصات آنها را با هم مقایسه کنیم. برای ساده‌تر شدن این بررسی، بحث درباره توابع و F را رها می‌کنیم و بر روی مجموعه‌ها و D متمرکز می شویم. در این صورت، تفاوت اصلی مدلهای استاندارد و هنکین را باید در مجاز بودن یا مجاز نبودن محدودیت برای تعداد مجموعه‌ها جستجو کرد. وقتی با یک مدل استاندارد روبه رو هستیم، تنها اشیا هستند که می‌توانیم تعداد آنها را محدود و محدودتر کنیم (اگر چه دامنهٔ مدل باید حداقل دارای یک شیء باشد)؛ اما نمی‌توان تعداد مجموعه‌هایی را که از روی این اشیا ساخته می‌شوند، محدود نمود. به این ترتیب، اگر در دامنهٔ یک مدل برای مثال دو شیء مانند حسن و علی را داشتیم:

d ={ حسن، علی }

در این مدل متغیرهای محمولی یک موضعی می‌توانند به یکی از مجموعه های زیر اسناد شوند:

{حسن، علی } و { حسن } و { علی } و $\varnothing$

هیچ مدل استانداردی را با این دامنه نمی‌توان ساخت که در آن تعداد مجموعه‌ها کمتر از چهار باشد.

اما اگر بخواهیم مدلهای هنکینی را که در آنها دامنه تنها دو شیء فوق را دارند، از نظر تعداد مجموعه‌هایی که متغیرهای محمولی یک موضعی می‌توانند به آنها اسناد شوند، بررسی کنیم، می‌توان به پانزده مدل هنکین مختلف اشاره کرد که در هر مدل از یک تا چهار مجموعه از لیست فوق در آن موجود باشد.[۱۱]

این تفاوت، آثاری مهم و اساسی دارد که هم در اصول موضوع، در یک نظام اصل موضوعی، و هم در قواعد استنتاج در یک نظام استنتاج طبیعی مؤثرند. همچنین در هنگام ترجمه از زبان طبیعی به زبان صوری، امکان صدق بعضی از گزاره‌ها بر پایهٔ مدل استاندارد قابل اثبات نیست و تنها با مدل هنکین می‌توان امکان صدق آنها را نشان داد. از سویی دیگر، گزاره‌هایی وجود دارند که استاندارد معتبرند، اما هنکین معتبر نیستند.

برای درک بهتری از این مدلها باید به زبان طبیعی و مثالهایی از آن توجه کرد. فرض کنید علی و مسعود فرزندان فرخ هستند. فرخ جمله‌ای به صورت زیر می‌گوید: «علی و مسعود در هیچ صفتی مشترک نیستند». اگر علی را با a و مسعود را با b نشان دهیم، شکل صوری جمله فرخ به صورت زیر است.

$$\sim\exists X(Xa \wedge Xb)$$

اما این گزاره در هیچ مدل استانداردی که دامنهٔ آن a و b (علی و مسعود) باشند، صادق نیست.

اثبات:

(اصل شمول نسبت)	۱- $\exists X\forall x(Xx \equiv x = x)$	(۱)
فرض	۲- $\forall xXx \equiv x = x$	(۲)
(ح $\forall$)(۲)	۳- $Xa \equiv a = a$	(۲)
(م =)	۴- $a = a$	(۴)
(ح $\equiv$)(۳)(۴)	۵- Xa	(۲)
(ح $\forall$)(۲)	۶ - $Xb \equiv b = b$	(۲)

(م =)	۷- $b = b$	(۷)
(ح ≡)(۶)(۷)	۸- Xb	(۲)
(م ∧)(۵)(۸)	۹- $Xa \wedge Xb$	(۲)
(م $\exists^2$)(۹)	۱۰- $\exists X(Xa \wedge Xb)$	(۲)
(ح $\exists^2$)(۱)(۲،۱۰)	۱۱- $\exists X(Xa \wedge Xb)$	(۱)
(م ¬)(۱۱)	۱۲- $\neg\neg\exists X(Xa \wedge Xb)$	(۱)

همچنان که ملاحظه می‌کنیم، اثبات این گزاره منوط به استفاده از فرمولهای شمول نسبت است که تنها در دلالت‌شناسی مدلهای استاندارد معتبر است.

در حقیقت، فرخ در هنگام گفتن این سخن یک مدل هنکین را در نظر داشته است که در آن دامنهٔ d شامل علی و مسعود است و D_1 شامل مجموعه‌هایی است که در بین اشیای هر مجموعه تنها شباهت صفات اخلاقی مطرح است. برای مثال D_1 می‌تواند به صورت زیر باشد:

$$D_1 = \{\varnothing, \{\text{علی}\}, \{\text{مسعود}\}\}$$

که در این صورت از آنجا که هیچ مجموعه‌ای در D_1 وجود ندارد که هم مسعود و هم علی عضو آن باشند، بنابراین، جملهٔ فرخ در مدل هنکینی که D_1 در آن به صورت بالا باشد، صادق است.

اکنون فرض کنید فرخ می‌گفت: همهٔ صفات علی و مسعود شبیه هم است؛ یعنی:

$$\forall X(Xa \wedge Xb)$$

هیچ مدل استانداردی این فرمول را صدق‌پذیر نمی‌کند.

اثبات:

مقدمه	۱- $a \neq b$	(۱)
(اصل شمول نسبت)	۲- $\exists X \forall x(Xx \equiv x = a)$	(۲)
فرض	۳- $\forall x(Xx \equiv x = a)$	(۳)
(ح ∀)(۳)	۴- $Xa \equiv a = a$	(۳)
(م=)	۵- $a = a$	(۵)
(ح ∀)(۳)	۶- $Xb \equiv b = a$	(۳)
فرض	۷- Xb	(۷)
(ح ≡)(۷)(۶)	۸- $b = a$	(۳)(۷)
(م ∧)(۱)(۸)	۹- $b = a \wedge b \neq a$	(۳)(۷)(۱)
(م ¬)(۷،۹)	۱۰- $\neg Xb$	(۳)(۱)
(ح ≡)(۵)(۴)	۱۱- Xa	(۳)
(م ∨)(۱۰)	۱۲- $\neg Xa \vee \neg Xb$	(۳)(۱)
(ن. م)(۱۱)	۱۳- $\neg\neg Xa$	(۳)
(م ∨)(۱۳)	۱۴- $\neg\neg Xa \vee \neg\neg Xb$	(۳)
(دم)(۱۲)	۱۵ $\neg(Xa \wedge Xb)$	(۳)(۱)
(دم)(۱۴)	۱۶- $\neg(\neg Xa \wedge \neg Xb)$	(۳)
(م ∧)(۱۵)(۱۶)	۱۷- $\neg(Xa \wedge Xb) \wedge \neg(\neg Xa \wedge \neg Xb)$	(۳)(۱)
(دم)(۱۷)	۱۸- $\neg[(Xa \wedge Xb) \vee (\neg Xa \wedge \neg Xb)]$	(۳)(۱)
(تع)(۱۸)	۱۹- $\neg(Xa \equiv Xb)$	(۳)(۱)

(م $\exists^2$)(۱۹)	۲۰- $\exists X \neg (Xa \equiv Xb)$	(۳)(۱)
(ح $\exists^2$)(۲)(۳،۲۰)	۲۱- $\exists X \neg (Xa \equiv Xb)$	(۱)
(ن. س)(۲۱)	۲۲- $\neg \forall X (Xa \equiv Xb)$	(۱)

اما گزارهٔ ذکر شده می‌تواند در مدل هنکین صدق‌پذیر باشد؛ مثلاً در مدل هنکینی که دامنهٔ آن شامل علی و مسعود باشد و D_1 در آن به صورت زیر باشد، گزارهٔ فوق می‌تواند صدق‌پذیر شود:

$D_1 = \{ \varnothing , \{$ مسعود، علی $\}\}$

چرا که در همهٔ مجموعه‌های عضو D_1 هر جا علی عضو مجموعه است، مسعود نیز عضو مجموعه است و بر عکس.

به این ترتیب، به نظر می‌رسد ما در زبان طبیعی گزاره‌هایی را به کار می‌بریم که مبنای صدق‌پذیری آنها قبول مدلهای هنکین است. اما مطلب به همین جا خاتمه نمی‌یابد؛ همچنان که گفتیم، اختلاف بین این دو نوع دلالت‌شناسی بنیادی‌تر از این سخنهاست؛ فرمولهای درست ساختی وجود دارند که در دلالت‌شناسی مدل استاندارد راستگو (tautology) هستند، اما در دلالت‌شناسی مدلهای هنکین چنین نیستند. چند نمونهٔ مهم آن را در اینجا اثبات می‌کنیم:

– صفتی وجود دارد که هیچ شیئی آن را ارضا نمی‌کند. (برای مثال، می‌توان به صفت «اینهمان نبودن با خود» اشاره نمود): $\vdash \exists X \forall x \neg Xx$

(اصل شمول نسبت)	۱- $\exists X \forall x (Xx \equiv x \neq x)$	(۱)
فرض	۲- $\forall x (Xx \equiv x \neq x)$	(۲)
(ح $\forall$)(۲)	۳- $Xx \equiv x \neq x$	(۲)
فرض	۴- Xx	(۴)
(ح $\equiv$)(۴)(۳)	۵- $x \neq x$	(۲)(۴)
(م=)	۶- $x = x$	(۶)
(م $\wedge$)(۵)(۶)	۷- $x = x \wedge x \neq x$	(۲)(۴)
(م $\neg$)(۴،۷)	۸- $\neg Xx$	(۲)
(م $\forall$)(۸)	۹- $\forall x \neg Xx$	(۲)
(م $\exists^2$)(۹)	۱۰- $\exists X \forall x \neg Xx$	(۲)
(ح $\exists^2$)(۱)(۲،۱۰)	۱۱- $\exists X \forall x \neg Xx$	(۱)

– صفتی وجود دارد که هر شیئی آن را ارضا می‌کند (برای مثال، می‌توان به صفت «اینهمان بودن با خود» اشاره نمود): $\vdash \exists X \forall x Xx$

اثبات:

(اصل شمول نسبت)	۱- $\exists X \forall x (Xx \equiv x = x)$	(۱)
فرض	۲- $\forall x (Xx \equiv x = x)$	(۲)
(ح $\forall$)(۲)	۳- $Xx \equiv x = x$	(۲)
(م=)	۴- $x = x$	(۴)
(ح $\equiv$)(۳)(۴)	۵- Xx	(۲)
(م $\forall$)(۵)	۶- $\forall x Xx$	(۲)
(م $\exists^2$)(۶)	۷- $\exists X \forall x Xx$	(۲)
(ح $\exists^2$)(۱)(۲،۷)	۸- $\exists X \forall x Xx$	(۱)

– برای هرشیئی صفتی وجود دارد که آن شیء آن صفت را ارضا می‌کند (باز هم می‌توان برای مثال به صفت «اینهمان بودن با خود» اشاره نمود): $\vdash \forall x \exists X Xx$

اثبات:

(اصل شمول نسبت)	۱ – $\exists X \forall x (Xx \equiv x = x)$	(۱)
فرض	۲– $\forall x (Xx \equiv x = x)$	(۲)
(ح $\forall$)(۲)	۳– $Xx \equiv x = x$	(۲)
(م=)	۴– $x = x$	(۴)
(ح $\equiv$)(۳)(۴)	۵– Xx	(۲)
(م $\exists^2$)(۵)	۶– $\exists X Xx$	(۲)
(م $\forall$)(۶)	۷– $\forall x \exists X xx$	(۲)
(ح $\exists^2$)(۱)(۲،۷)	۸– $\forall x \exists X Xx$	(۱)

– صفتی انعکاسی وجود دارد (برای نمونه، می‌توان به صفت «اینهمانی» اشاره نمود): (X محمول دو موضعی است) $\vdash \exists X^2 \forall x Xxx$

اثبات:

(اصل شمول نسبت)	۱– $\exists X^2 \forall x (Xxx \equiv x = x)$	(۱)
فرض	۲– $\forall x (Xxx \equiv x = x)$	(۲)
(ح $\forall$)(۲)	۳– $Xxx \equiv x = x$	(۲)
(م=)	۴– $x = x$	(۴)
(ح $\equiv$)(۳)(۴)	۵– Xxx	(۲)
(م $\forall$)(۵)	۶– $\forall x Xxx$	(۲)
(م $\exists^2$)(۶)	۷– $\exists X^2 \forall x Xxx$	(۲)
(ح $\exists^2$)(۱)(۲،۷)	۸– $\exists X^2 \forall x Xxx$	(۱)

هیچ کدام از این فرمولها در دلالت‌شناسی مدلهای هنکین راستگو نیستند، چرا که براحتی می‌توان مدل هنکینی ساخت که مجموعهٔ مورد اشاره در هر یک از گزاره‌های اثبات شده در «D»ی آن مدل هنکین وجود نداشته باشد. به همین ترتیب، نمی‌توان هیچ قضیه‌ای را که در آن سخن از وجود یک مجموعه یا صفت خاص زده می‌شود، در دلالت‌شناسی هنکین معتبر شمرد، اما چه تفاوتی در نحو منطق مرتبهٔ دوم می‌تواند با این تفاوت ایجاد شده در قضایا همراهی کند؟

اگر نظام اصل موضوعی را در نظر بگیریم، فرمولهای شمول نسبت در دلالت‌شناسی مدل استاندارد راستگو هستند، اما از آنجا که این فرمولها از وجود مجموعه‌ها و صفات خاصی خبر می‌دهند، نمی‌توان آنها را در دلالت‌شناسی مدل هنکین راستگو شمرد. بنابراین، در نحوی که برای منطق مرتبهٔ دوم بر پایهٔ دلالت‌شناسی هنکین شکل گرفته باشد، از این فرمولها نمی‌توان استفاده کرد. همچنین هر چیزی که در نظام استنتاج طبیعی معادل فرمول‌های شمول نسبت باشد، در نحوی که برای منطق مرتبه دوم بر پایه دلالت‌شناسی مدل هنکین شکل گرفته باشد، قابل استفاده نیست. اما

چرا این فرمولها در دلالت‌شناسی مدل هنکین راستگو نیستند؟برای پاسخ به این سؤال، به فرم کلی فرمولهای شمول نسبت توجه می‌کنیم:

$$\exists \varphi^n \forall < x >_n (\varphi^n < x >_n \equiv \Phi < x >_n)$$

در مدل هنکین نمی‌توان از وجود هیچ مجموعهٔ **مشخصی** سخن گفت، چرا که در مدل هنکین مجموعه‌های ساخته شده از دامنهٔ مدل می‌توانند تعداد اعضای مختلفی داشته باشند. فرض کنید که $\Phi < x >_n$، $x \neq x$ باشد؛ در این صورت، فرمول بالا در صورتی صادق خواهد بود که مدل انتخابی ما حتماً مشتمل بر مجموعهٔ $\varnothing$ باشد؛ اما در مدل هنکین به لحاظ اختیار در انتخاب مدلها با مجموعهٔ اعضای مختلف، هیچ اجباری برای انتخاب مدل مشتمل بر $\varnothing$ نیست.

آخرین تفاوت ناشی از این دو مدل، تفاوت در مورد فراقضایاست (البته، ما در اینجا فقط به ذکر لوازم این تفاوت بسنده می‌کنیم، چرا که بحث تفصیلی در این خصوص مستلزم نگارش مقالهٔ دیگری است). تفاوت اصلی این دو دلالت‌شناسی در فراقضایا در مورد فراقضیه‌های تمامیت و فشردگی لونهایم اسکولم است که بیشترین اهمیت را فراقضیه تمامیت دارد. مطابق این فراقضیه، منطق مرتبهٔ دوم بر اساس دلالت‌شناسی هنکین تمامیت دارد، اما بر اساس دلالت‌شناسی استاندارد ناتمامیت آن اثبات می‌گردد. این تفاوت از آن رو اهمیت دارد که بعضی از فیلسوفان منطق مانند نیل (Kneale) تنها نظامهایی را جزو منطق می‌شمارند که تمام هستند و به عبارتی می‌توان اصول موضوعهٔ آنها را به صورتی مشخص نمود که همهٔ گزاره‌های معتبر را به دست آورد (10/P. 6)، امری که بر اساس مدل استاندارد ممکن نیست.

در پایان ذکر این نکته مفید است که تفاوتهای مذکور در دلالت‌شناسی دو مدلی که ارائه شد — و تفاوتهای ناشی از آنها در نحوشناسی، که خود نیز، همان‌طور که ملاحظه کردیم، موجب تبعات و لوازم متعددی است — ریشه در دو نحوهٔ وجودشناسی دارد، اما رابطهٔ بین مباحث وجودشناسی و منطق مرتبهٔ دوم یکی از مهمترین بحثهایی است که اکنون حول مبحث منطق مرتبهٔ دوم شکل گرفته است و اشاره به هر مطلب قابل قبولی دربارهٔ آن احتیاج به ارائهٔ مقدمات فراوان دارد که نگارش مقالهٔ مستقلی را می‌طلبد و ما در این مقاله به بررسی و تبیین اختلافات و توابع دلالت‌شناسی و نحوشناسی اکتفا کرده‌ایم.

نتیجه

دو دلالت‌شناسی متفاوت برای منطق مرتبهٔ دوم ارائه شده است که باعث تفاوتهای فراوانی در نحو، فراقضایا و گزاره‌های راستگو و صدق‌پذیر می‌گردد. اصول موضوعه منطق مرتبهٔ دوم با دلالت‌شناسی استاندارد بیش از اصول موضوعهٔ این منطق با دلالت‌شناسی هنکین است. دو فراقضیه تمامیت و فشردگی برای این منطق با دلالت‌شناسی هنکین قابل اثبات است، در حالی که با دلالت‌شناسی استاندارد ناتمامیت و نافشردگی منطق مرتبهٔ دوم اثبات می‌گردد. همچنین گزاره‌های راستگوی منطق مرتبهٔ دوم با دلالت‌شناسی استاندارد بیش از گزاره‌های راستگوی این منطق با دلالت‌شناسی هنکین است؛ بر عکس فرمولهای صدق‌پذیر در دلالت‌شناسی هنکین بیش از فرمولهای صدق‌پذیر در دلالت‌شناسی استاندارد است. مجموعهٔ این امور جایگاه بسیار مهم تفکیک نحوشناسی و دلالت‌شناسی و بخصوص

جایگاه محوری دلالت‌شناسی را در بررسیهای منطقی مشخص می‌نماید، چرا که تغییر در دلالت‌شناسی به عنوان تغییرات بنیادی می‌تواند تغییر در بقیهٔ بخش‌های یک منطق را به دنبال داشته باشد.

پی‌نوشتها

۱- کتاب ذکر شده از شپیرو تنها کتاب حوزهٔ منطق فلسفی است که دربارهٔ منطق مرتبه دوم تألیف شده است. برای یک مطالعهٔ مقدماتی دربارهٔ منطق مرتبه دوم (نک12)، برای یک مطالعه دقیقتر (نک 16)، برای بررسی تاریخی (نک 15)، اما مبسوط ترین بحث را می‌توان در کتاب شپیرو (13) یافت.

۲- مطابق فراقضیه فشردگی منطق مرتبه اول، هر مجموعه از فرمولهای درست ساخت صدق‌پذیر است، اگر و تنها اگر هر زیر مجموعه متناهی آن صدق‌پذیر باشد. در فراقضیه نافشردگی نشان داده می‌شود که مجموعه‌ای از فرمولهای درست ساخت وجود دارد که هر زیر مجموعه متناهی آن صدق‌پذیر است.

اثبات فراقضیه فشردگی منطق مرتبه اول را می‌توانید در منبع (۱/ص ۶۸) بیابید؛ همچنین اثبات فراقضیه نافشردگی منطق مرتبهٔ دوم بر اساس دلالت‌شناسی منطق استاندارد در منبع روبه رو آمده است (13/P. 87).

۳- انتخاب معادلی فارسی برای واژه Semantics مشکل ساز است. بعضی کلمهٔ معناشناسی یا ساختار معنایی را توصیه نموده‌اند (ن.ک: ۴ و۲)، دلالت‌شناسی آخرین معادلی است که توسط دکتر ضیاء موحد (۳) و بر اساس نظریات کواین برای Semantics ارائه شده است. همچنین اصطلاح نشانگری شناختی برای آن پیشنهاد شده است(ن.ک: ۶). بعضی نیز همان اصطلاح "سمانتیک" را به کار برده اند (ن.ک:۵). به هر روی، با توجه به آنکه در منطق قدیم اصطلاحات معنا و همچنین دلالت به معنایی متفاوت از منطق جدید به کار رفته است ، برای درک اصطلاح سمانتیک تنها توجه به تعریف آن می‌تواند راهگشا باشد.

۴- در بعضی از کتب منطقی به جای واژه مدل از کلمه تعبیر(interpretation) استفاده شده است (۴/ص۱۳۵). تعریف این دو هیچ فرقی با هم ندارد.

۵- برای نمونه کاربرد تخصیص متغیر به (13/P. 71) و (12/P. 40) مراجعه کنید.

۶- در آموزش منطق مرتبه اول سیستم استنتاج طبیعی معمول‌تر است. از این رو، از آنجا که اغلب خوانندگان آشنایی بیشتری با اثبات به این شیوه دارند، ما نیز اثبات‌های انجام شده را به شیوهٔ استنتاج طبیعی انجام داده‌ایم. برای نمونه‌ای از ارائه منطق مرتبه دوم به شیوه استنتاج طبیعی می‌توان نگاه کرد به (14) .

۷- برای نشان دادن دنباله محدودی از نمادهای فردی $t_1,t_2,...,t_n$ از $<t>_n$ استفاده می‌کنیم؛ و برای نشان دادن دنباله محدودی از متغیرهای مرتبه اول متمایز $x_1,x_2,...,x_n$ از $<x>_n$ استفاده می‌کنیم. به این ترتیب $\forall <x>_n$ به معنای $\forall x_1...\forall x_n$ است و $\varphi <x>_n$ به معنای محمول نشانه ای n موضعی است که بر n نماد فردی $x_1,...,x_n$ عمل می‌کند.

۸- برای مشاهدهٔ اصول منطق مرتبه اول می‌توانید به منبع روبه رو مراجعه نمایید (۴/ص۱۲۶).

۹- یادآوری می‌کنم شرایط عمومی و اختصاصی این قواعد در منطق مرتبه اول در کتابهای مختلف به شکل‌های مختلفی ارائه شده است. برای نمونه می‌توانید قاعده معرفی سور کلی و حذف سور وجودی را در این دو منبع مقایسه کنید (۴/ص۹۷) و (۳/ص ۱۶۸ و ۱۶۹) . همین موضوع دربارهٔ منطق مرتبه دوم نیز صادق است.

۱۰- مجموعه همه زیر مجموعه‌های یک مجموعه مفروض چون A را مجموعه توانی A می‌نامند.

۱۱- می‌توان یک، دو، سه و یا چهار مجموعه را از بین این چهار مجموعه برگزید. بنابراین، تعداد انتخاب‌های ممکن برابر مجموع ترکیب یک از چهار، دو از چهار، سه از چهار و چهار از چهار است.

$$C_1^4 + C_2^4 + C_3^4 + C_4^4 = 4 + 6 + 4 + 1 = 15$$

منابع

۱- اندرتون، هربرت. ب: **آشنایی با منطق ریاضی**، ترجمهٔ غلامرضا برادران خسروشاهی و محمد رجبی طرخورانی، مرکز نشر دانشگاهی، تهران ۱۳۷۹.

۲- موحد، ضیاء: **در آمدی به منطق جدید**، علمی و فرهنگی،۳۲، ۱۳۷۳.

۳- ـــــــ: **منطق موجهات**، هرمس، تهران ۱۳۸۱.

۴- نبوی، لطف الله: **مبانی منطق جدید**، سازمان مطالعه و تدوین کتب علوم انسانی دانشگاهها، تهران ۱۳۷۷.

۵- هاک، سوزان: **فلسفه منطق**، ترجمهٔ سید محمد علی حجتی، طه، تهران ۱۳۸۲.

۶- هیلبرت، دایوید و ویلهم آکرمان: **بنیادهای منطق نگریک**، ترجمهٔ میرشمس الدین ادیب سلطانی، امیرکبیر، تهران ۱۳۸۰.

7- Enderton, H. (2001). A Mathematical Introduction to Logic; Second Edition Harcoure Academic Press.

8- Frege, G. (1976). "Begriffssehrift"; 1879 ; in From Frege To Godel, A Sourcebook in Mathematical Logic; Edited by Jean Van Heijnoort; HUP.

9- Haack Susan. (1991). Philosophy of logics Cambridge University Press.

10- Hilbert, D. and Wilhelm A.;(1972). Grundzuge der theoretischen Logik; Springer verlag.

11- Peano, G. (1976). "The Principles of Arithmatic, Presented by a new method"; 1889; in From Frege To Godel, A Source book in Mathematical Logic; Edited by Jean Van Heijnoort; HUP.

12- Shapirio, S. (2001). “Higher Order Logic” in the Philosophical Logic; edited by Lou Goble; Blackwell Publishers.

13- Shapirio, S. (1991). Foundations without Foundationalism, A Case for Second Order Logic. Oxford University Press.

14- Shapirio, S. (2001). System Between First order and Second order Logic; in Hand book of Philosophical Logic; Kluwer Academic Publishers.

15- Shapirio, S. (1990). “Second Order Logic, Foundation, and Rules”: Journal of Philosophy, 87 pp 231–61.

16- Van Benthem, J. and Kees, D (2001). Higher order Logic; ; in Hand book of Philosophical Logic;Kluwer Academic Publishers.

17- Van Dalen, D. (1997). Logic and Structure; Third Edition; Springer.

18- Whitehead,A. N and Russell, B (1910). Principia Mathematica 1 Cambridge University Press.