

بهینه‌سازی سبد سهام با استفاده از برنامه ریزی سازشی ضد ایده آل

دکتر مقصود امیری *

چکیده

پس از معرفی مدل میانگین - واریانس مارکوویتز، مسأله انتخاب سبد مالی بهینه چند هدفه تاکنون مورد توجه بسیاری از تصمیم گیران و برنامه ریزان مالی قرار گرفته است، بطوری که افراد تصمیم گیرنده اهداف و خواسته‌های سرمایه گذاری خود را در چارچوب مدل‌های ریاضی چند هدفه‌ای که تطابق بیشتری با واقعیات تصمیم گیری در انتخاب سبد مالی بهینه دارند، بیان می‌کنند. تاکنون روش‌های مختلفی برای بهینه‌سازی اینگونه مسائل معرفی شده‌اند که یکی از این روش‌ها، روش برنامه‌ریزی سازشی است. در این مقاله با توجه به اهمیت روز افزون سرمایه‌گذاری در سبدهای مالی، روشی جدید مبتنی بر برنامه‌ریزی سازشی برای بهینه‌سازی مسأله انتخاب سبد مالی چند هدفه توسعه داده شده که برنامه‌ریزی سازشی بر اساس مقادیر ضد ایده آل نام دارد. به منظور بررسی عملکرد و قابلیت

* عضو هیئت علمی دانشگاه علامه طباطبایی

تاریخ پذیرش: ۸۸/۱۱/۳

تاریخ دریافت: ۸۸/۷/۱۲

کاربرد این روش، مورد کاوی با انتخاب سبد سهامی با ۳۵ شاخص سهام بازار سهام ایران انجام شده است. نتایج به دست آمده از مقایسه دو روش برنامه‌ریزی سازشی و روش پیشنهادی تحت شرایط یکسان، بیانگر آن است که نتایج روش ارائه شده سازگاری بیشتری با خواسته‌های تصمیم‌گیرنده نشان می‌دهند. واژگان کلیدی: بهینه‌سازی چند هدفه، برنامه‌ریزی سازشی، انتخاب سبد مالی.

مقدمه

مدل سازی مسأله انتخاب سبد مالی با استفاده از اهداف چندگانه اولین بار توسط مارکوویتز (۱۹۵۲) ارائه شد. در این مدل که میانگین - واریانس نام دارد، تصمیم‌گیرنده بر اساس اهداف مختلف و متضاد، سعی در انتخاب و تخصیص سبدهی بهینه دارد. به منظور بهینه‌سازی مسأله انتخاب سبد بهینه، مدل میانگین - واریانس مارکوویتز تاکنون مورد توجه بسیاری از تصمیم‌گیران و برنامه‌ریزان مالی قرار گرفته است، بطوری که می‌توان از آن به عنوان مقدمه "تئوری مالی نوین" یاد کرد. لیکن نقاط ضعف این مدل را می‌توان به شرح زیر بر شمرد:

- (۱) عدم کارایی مدل میانگین - واریانس در برابر مدل‌های حقیقی (بل و همکاران، ۱۹۸۸).

- (۲) کوآدراتیکی بودن مدل میانگین - واریانس و در نتیجه غیر خطی بودن مدل، بطوری که نتایج حاصل از بهینه‌سازی مدل به دلیل غیر خطی بودن در اغلب موارد بهینه محلی بوده و بهینه مطلق نمی‌باشد.
- (۳) با افزایش تعداد دارایی‌ها، ماتریس کوواریانس بازده دارایی‌ها با ابعاد بزرگتری ایجاد شده و بر حجم محاسبات افزوده خواهد شد.

به دلیل این مشکلات، زمینه لازم جهت استفاده از الگوریتم‌هایی که برطرف‌کننده این مسائل در مدل میانگین - واریانس مارکوویتز بودند، فراهم گردید. به عنوان مثال، شارپ (۱۹۶۳؛ ۱۹۶۷)، التون و همکارانش (۱۹۷۶)، کانو (۱۹۹۰)، کانو و یامازاکی (۱۹۹۱) و یونگک (۱۹۹۸) هر یک به منظور خطی سازی و بهبود کارایی مدل

میانگین - واریانس مارکویتز، الگوریتم‌هایی را پیشنهاد کرده‌اند (ناوروکی و کارتر، ۱۹۹۸؛ شینگ و ناگاساوا، ۱۹۹۹). شارپ (۱۹۶۴) مدیریت علمی سبدهای مالی را بنا نهاد. او ضریب حساسیت بتا را در حالی معرفی نمود که ضریب بتا نوسانات نرخ بازده هر سهام را در مقایسه با نوسانات نرخ بازده بازار نشان می‌دهد.

با در نظر گرفتن تحقیقات شارپ و دیگران، استفاده از ضریب بتا به عنوان معیار سنجش ریسک در چند سال اخیر رایج بوده است. استفاده از این ضریب برای تسهیل فرایند مدیریت سبد مالی بر اساس نظریه نوین سبد مالی می‌باشد. بر اساس یک طبقه‌بندی، کل ریسک به دو جزء قابل کنترل (غیر سیستماتیک) و غیر قابل کنترل (سیستماتیک) تقسیم‌بندی می‌شود. مطابق مدل قیمت‌گذاری دارایی‌های سرمایه‌ای، در صورت ایجاد یک سبد مالی متنوع از سهام منتخب بازار، ریسک غیر سیستماتیک قابلیت به حداقل رسیدن را پیدا می‌کند (شارپ، ۱۹۶۴). باید به این نکته توجه نمود که ریسک سیستماتیک حاصل تغییرات اقتصادی، سیاسی، اجتماعی و محیطی بازار سرمایه است و غیر قابل کنترل بوده و برای سهام مختلف روندی تقریباً یکسان دارد. شاهد این مدعا روند مشابه قیمت شاخص‌های مختلف در طول زمان است. ضریب بتا معیاری برای سنجش ریسک سیستماتیک است و می‌تواند به عنوان شاخصی برای رتبه‌بندی دارایی‌های مختلف مورد توجه قرار گیرد. در صورتی که ضریب بتا برای یک دارایی بزرگتر از ۱ باشد، نوسانات بازدهی آن سهم بیشتر از نوسانات بازار خواهد بود و به آن دارایی با ریسک بالا گفته می‌شود. بر عکس دارایی‌هایی با ضریب بتای کمتر از ۱ به مفهوم نوسانات کمتر از نوسانات بازار است. این دارایی نیز دارایی با ریسک پایین نامیده می‌شود. از مزایای استفاده از ضریب بتا به عنوان ضریب ریسک هر دارایی می‌توان موارد زیر را برشمرد:

۱) خطی‌سازی تابع هدف ریسک و استفاده از آن در بهینه‌سازی مسائل چند هدفه مالی.

۲) افزایش تعداد دارایی‌ها تأثیر چندانی بر تابع ریسک نخواهد داشت و حجم محاسبات چندان افزایش نمی‌یابد که این مورد بر خلاف مدل میانگین - واریانس

است.

۳) استفاده از ضریب بتا به عنوان ضریب ریسک هر دارایی نوسانات بازار را در نظر می‌گیرد.

در این مقاله مدلی بر اساس مدل میانگین - واریانس جهت مدل سازی مسأله انتخاب سبد سهام بهینه چند هدفه ارائه شده است که از ضرایب بتا در تابع هدف ریسک مدل مارکویتز استفاده می‌کند. از روش‌های بهینه‌سازی مسائل چند هدفه می‌توان مدل برنامه‌ریزی سازشی (CP) را نام برد که اولین بار توسط زلنی (۱۹۷۳) و (۱۹۷۴) معرفی گردید. در مدل CP تصمیم گیرندگان به سهولت و با دقت قابلیت دستیابی به مقادیر ایده‌آل اهداف مورد نظر را خواهند داشت. از دیگر مزایای این مدل می‌توان سادگی و استفاده از آن تحت شرایطی که دسترسی به مقادیر آرمانی اهداف میسر نباشد را عنوان کرد. مدل CP در ادبیات مالی توسط رومرو و رهمن (۱۹۸۴ و ۱۹۸۵) و رومرو و همکارانش (۱۹۸۷) معرفی گردید. همچنین در مورد ادبیات به کارگیری مدل CP در زمینه بهینه‌سازی سبدهای مالی، می‌توان تحقیقات بالسترو و رومرو (۱۹۹۶) و بالسترو (۱۹۹۸) را نام برد. بالسترو و همکاران (۲۰۰۳) و پرز - گلاذیش و همکارانش (۲۰۰۷) نیز از مدل CP برای بهینه‌سازی برخی مسائل اقتصادی استفاده کردند.

مدل CP در مبانی نظری تنها بر اساس مقادیر ایده‌آل هر یک از اهداف فرموله شده است. در این مقاله مدل CP بر اساس مقادیر ضد ایده‌آل توسعه می‌یابد و مدل جدیدی تحت عنوان برنامه‌ریزی سازشی ضد ایده‌آل (NCP) ارائه می‌شود که از آن برای بهینه‌سازی مدل به دست آمده از مسأله انتخاب سبد سهام بهینه چند هدفه در بازار سهام ایران استفاده و نتایج آن با نتایج مدل CP تحت شرایط یکسان مقایسه خواهند شد.

تعریف مسأله انتخاب سبد مالی

اولین بار در سال ۱۹۵۲، مارکویتز الگوی حل مسأله انتخاب سبد مالی بهینه را

ارائه داد. مدل میانگین - واریانس مارکویتز، بر اساس سطح مشخصی از مقادیر بازده، مقادیر بهینه ریسک را بر اساس حداقل کردن واریانس مجموع دارایی‌های درون سبد مالی به دست می‌آورد (مارکویتز، ۱۹۵۲). بطوری که مدل دو هدفه ریسک - بازده مارکویتز را می‌توان به صورت مدل (۱) نوشت:

$$\begin{aligned} \text{Min } & \text{Var}\left(\sum_{j=1}^n r_j x_j\right) \\ \text{Max } & E\left(\sum_{j=1}^n r_j x_j\right) \end{aligned} \quad \text{مدل (۱)}$$

S.T.

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

بطوری که:

$$\begin{aligned} (\forall j = 1, 2, \dots, n) & & & = j \\ (\forall j = 1, 2, \dots, n) & & & = x_j \\ : & (\forall j = 1, 2, \dots, n) & & = r_j \\ & r_j \in \text{Normal}(\mu_j, \sigma_j^2) & & \\ & (\forall j = 1, 2, \dots, n) & & = \mu_j \\ & (\forall j = 1, 2, \dots, n) & & = \sigma_j^2 \end{aligned}$$

در مدل (۱)، هدف کاهش مقدار ریسک سرمایه‌گذاری و افزایش مقدار نرخ بازده سرمایه‌گذاری است. در حالت کلی، تابع هدف $\text{Min Var}\left(\sum_{j=1}^n r_j x_j\right)$ ، مربوط است به کمینه‌سازی مقدار ریسک سرمایه‌گذاری دارایی‌های موجود در سبد مالی و $\text{Max } E\left(\sum_{j=1}^n r_j x_j\right)$ ، نیز مربوط به بیشینه‌سازی مقدار بازده حاصل از سرمایه‌گذاری دارایی‌های موجود در سبد مالی است. محدودیت $\sum_{j=1}^n x_j = 1$ نیز همان محدودیت موجود در مدل اولیه واریانس - کوواریانس است که در اینجا نیز آورده شده است. این محدودیت دلالت بر این دارد که مجموع سهام کل دارایی‌های موجود در یک سبد مالی همواره برابر عدد یک خواهد بود. قیود

$x_j \geq 0$ (برای $j = 1, 2, \dots, n$) نیز، نامنفی بودن مقادیر سهم هر دارایی درون سبد مالی را تضمین خواهد کرد.

مسأله پیشنهادی انتخاب سبد مالی

باتوجه به معایب مدل (۱) و مزایای استفاده از ضریب بتا به عنوان ضرایب ریسک (که در بخش مقدمه به تفصیل تشریح گردیدند)، می توان مسأله چند هدفه انتخاب سبد مالی را به صورت مدل (۲) پیشنهاد داد:

$$\begin{aligned} \text{opt } f_1 &= \sum_{j=1}^n \beta_j x_j \\ \text{max } f_2 &= \sum_{j=1}^n \mu_j x_j \\ \text{min } f_3 &= \sum_{j=1}^n P_j x_j \end{aligned} \quad \text{مدل (۲)}$$

ST.

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1$$

$$x_j \geq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

در مدل (۲)، تابع هدف خطی اول عبارت است از $\sum_{j=1}^n \beta_j x_j$ که مربوط به ریسک سرمایه گذاری است. بطوری که با استفاده از رابطه ضریب بتا $\left(\beta_j = \frac{\text{Cov}(r_j, r_m)}{\text{Var}(r_m)} \right)$ ضرایب ریسک هر دارایی محاسبه می شود. Γ_j متغیر تصادفی بازده روزانه دارایی زام است که دارای توزیع نرمال با میانگین μ_j و واریانس σ_j^2 است و Γ_m نیز متغیر تصادفی بازده روزانه بازار است. $\text{Cov}(r_j, r_m)$ ، کوواریانس بازده دارایی زام و بازده بازار است و $\text{Var}(r_m)$ نیز واریانس بازده بازار یا ریسک بازار است. x_j نیز متغیر تصمیم سرمایه گذاری در دارایی زام است. این تابع هدف، اطمینان به بازده دارایی روی بازار را نشان می دهد. همبستگی پایین با بازار، عملکرد دارایی را روی خودش نشان می دهد، به جای آنکه توسط تغییرات بازار نمایش داده شود. به منظور انتخاب یک سبد دارایی به همان اندازه پر خطر، در چنین بازاری، مقدار آرمانی این تابع هدف برابر ۱ در نظر گرفته شده است (لی و چسر،

(۱۹۸۰). تابع هدف خطی دوم عبارت است از: $E(\sum_{j=1}^n r_j x_j) = \sum_{j=1}^n \mu_j x_j$ ، که مربوط به نرخ بازده سرمایه‌گذاری می‌باشد، بطوری که $r_j = (P_{jt} - P_{j,t-1} + D_{jt}) / P_{j,t-1}$ متغیر تصادفی بازده روزانه دارایی j ام و $P_{j,t}$ قیمت دارایی j ام در روز t ام است. همینطور $D_{j,t}$ مقدار سود تقسیم شده در بازه زمانی $[t-1, t]$ است. هدف از این تابع هدف، ماکزیمم کردن میانگین بازده روزانه دارایی‌ها است. تابع هدف خطی سوم عبارت است از: $\sum_{j=1}^n P_j x_j$ ، که مربوط به هزینه اولیه سرمایه‌گذاری است. در این تابع هدف، P_j قیمت دارایی j ام در آخرین روز دوره مطالعه (با واحد پولی مشخص) است. در دنیای واقعی، بسیاری از افراد به دلیل عدم داشتن پول کافی، نمی‌توانند در سرمایه‌گذاری‌های مطمئن شرکت کنند. بنابراین هدف ما این است که آنها علاوه بر هزینه کردن پول کمتر بتوانند نتایج دلخواه را از سایر اهداف سرمایه‌گذاری نیز به دست آورند. اگر N تعداد کل دارایی‌های موجود در سبد مالی بهینه باشد، می‌توان در حالت کلی این تابع هدف را مستقل از مقدار N به صورت زیر به دست آورد.

$$Z = P_1(Nx_1) + P_2(Nx_2) + \dots + P_n(Nx_n) \Rightarrow Z = N(P_1x_1 + P_2x_2 + \dots + P_nx_n)$$

$$\Rightarrow Z = N(\sum_{j=1}^n P_j x_j) \Rightarrow \frac{Z}{N} = \frac{N(\sum_{j=1}^n P_j x_j)}{N} \Rightarrow \frac{Z}{N} = f_3 = \sum_{j=1}^n P_j x_j$$

بطوری که مقدار هزینه نهایی انتخاب و تخصیص سبد مالی بهینه برابر با $Z^* = f_3^* N$ است. برای خرید دارایی j ام، قیمت آخرین روز بازه زمانی دارایی j ام منظور و این تابع هدف می‌نیمم می‌شود.

مدل برنامه‌ریزی سازشی (CP)

در مدل CP، چنانچه سطوح موجود توسط f_k و مقادیر ایده‌آل تابع هدف k ام توسط f_k^* نمایش داده شوند و ماکزیمم کردن اهداف مد نظر باشد، آنگاه مقادیر f_k^{\max} از طریق مدل (۳) به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
 f_k^{\max} &= \max f_k \quad \forall k=1,2,\dots,k \\
 \text{s.t.} & \\
 g_i(x) &\leq b_i \quad \forall i=1,2,\dots,m \\
 x &\in S
 \end{aligned}
 \tag{۳} \text{ مدل}$$

و در نهایت مدل نهایی CP در صورت وجود اوزان اهمیت اهداف (w_k) به صورت زیر مدل سازی می شود:

$$\min \left(\sum_{k=1}^K w_k (\delta_k^-)^p \right)^{\frac{1}{p}} \tag{ }$$

S.T.

$$\begin{aligned}
 f_k + \delta_k^- &= f_k^{\max} \quad \forall k=1,2,\dots,K \\
 g_i(x) &\leq b_i \quad \forall i=1,2,\dots,m \\
 x &\in S \\
 \delta_k^- &\geq 0 \quad \forall k=1,2,\dots,K
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & k & \delta_k^- \\
 & \cdot & \\
 & f_k^{\min} & \text{CP} \\
 & & \cdot \\
 & & \tag{ }
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 f_k^{\min} &= \min f_k \quad \forall k=1,2,\dots,k \\
 \text{S.T.} & \\
 g_i(x) &\leq b_i \quad \forall i=1,2,\dots,m \\
 x &\in S
 \end{aligned}
 \tag{ }$$

در این صورت مدل نهایی CP با وجود اوزان اهمیت اهداف، به صورت زیر خواهد بود.

مدل (۶)

$$\min \left(\sum_{k=1}^K w_k (\delta_k^+)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

S.T.

$$f_k - \delta_k^+ = f_k^{\min} \quad \forall k = 1, 2, \dots, K$$

$$g_i(x) \leq b_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

$$x \in S$$

$$\delta_k^+ \geq 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, K$$

متغیر δ_k^+ متغیر انحرافی مازاد متعلق به محدودیت مربوط به تابع هدف k ام است. مدل CP بر اساس انتخاب جواب‌هایی که به نقاط ایده‌آل (f_k^{\min} یا f_k^{\max}) نزدیکتر باشند، مدل سازی می‌شود. پارامتر P از تابع مطلوبیت نهایی است که معیارهای مورد نظر را با فرض $P = \{1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$ به نمایش می‌گذارد. همچنین $w_k > 0$ (برای همه مقادیر k) و $\sum_{k=1}^K w_k = 1$ است. به عبارتی w_k ها، وزن (ارزش) نسبی اهمیت تابع هدف k ام را در مقابل $k-1$ هدف دیگر نمایش می‌دهد. $L_{P=1}$ به عنوان معیار منهتن و $L_{P=2}$ به عنوان معیار اقلیدوسی و $L_{P=\infty}$ نیز معیار چپی شف نامیده می‌شوند. در مورد $L_{P=\infty}$ حالت تبدیل شده مدل (۴) به مدل مین-ماکس برنامه‌ریزی سازشی (CP(min-max)) به صورت مدل (۷) خواهد بود.

$$\min y$$

S.T.

$$y \geq \sum_{k=1}^K w_k (\delta_k^-)$$

$$f_k + \delta_k^- = f_k^{\max} \quad \forall k = 1, 2, \dots, K$$

$$g_i(x) \leq b_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$$

$$x \in S$$

$$y \geq 0, \delta_k^- \geq 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, K$$

- 1- Manhattan Metric
- 2- Euclidean Metric
- 3- Tchebycheff Metric

مدل پیشنهادی NCP

روش CP تنها مجموع انحرافات سطوح موجود اهداف را نسبت به مقادیر ایده آل هر یک از اهداف، می نیمم می سازد. در اینجا مدلی بر اساس مدل CP با در نظر گرفتن حداکثر دوری از مقادیر ضد ایده آل هر یک از اهداف پیشنهاد و ارائه شده است.

اگر هدف، بهینه سازی تابع هدف k ام بر اساس مقادیر آرمانی باشد، آنگاه تابع هدف به صورت زیر خواهد بود.

$$\text{opt } f_k \quad (\forall k = 1, 2, \dots, K)$$

همچنین اگر $f(k) \in R$ مقدار آرمانی تابع هدف k ام باشد، در این صورت محدودیت نظیر این تابع هدف در روش NCP به صورت رابطه زیر خواهد بود.

$$f(k) \geq f_k \geq f(k) \approx f_k = f(k) \quad .2$$

بطوری که محدودیت دو سویه بالا را می توان به دو محدودیت \geq و \leq تبدیل نمود.

$$f_k \geq f(k)$$

$$f_k \leq f(k) \quad .3$$

در نتیجه مدل NCP با وجود اوزان اهمیت اهداف (w_k) به صورت زیر خواهد بود.

$$\min \left(\sum_{k=1}^K w_k (\delta_k^+ + \delta_k^-)^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{مدل (۸)}$$

S.T.

$$f_k - \delta_k^+ = f(k) \quad \forall k = 1, 2, \dots, K$$

$$f_k + \delta_k^- = f(k) \quad \forall k = 1, 2, \dots, K$$

$$x \in S$$

$$f(k) \in R, \delta_k^-, \delta_k^+ \geq 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, K$$

در مدل (۸) هدف می نیمم کردن متغیرهای δ_k^- و δ_k^+ به منظور نزدیکی بیشتر به

مقدار آرمانی تابع هدف k ام است. اگر هدف می نیمم سازی تابع هدف k ام بر اساس مقادیر ضد ایده آل باشد، آنگاه تابع هدف زیر به دست می آید.

$$\min f_k \quad (\forall k = 1, 2, \dots, K) \quad .4$$

چنانچه f_{k^*} مقدار ضد ایده آل تابع هدف k ام باشد، آنگاه محدودیت نظیر این تابع هدف در روش NCP به صورت زیر خواهد بود.

$$f_{k^*} \geq f_k$$

در نتیجه مدل NCP با وجود اوزان اهمیت اهداف (w_k) به صورت زیر خواهد بود.

$$\min \left(\sum_{k=1}^K w_k (-\delta_k^-)^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad ()$$

S.T.

$$f_k + \delta_k^- = f_{k^*} \quad \forall k = 1, 2, \dots, K$$

$$x \in S$$

$$\delta_k^- \geq 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, K$$

در محدودیت δ_k^- کردن ماکزیمم کردن $f_k + \delta_k^- = f_{k^*}$ ($\forall k = 1, 2, \dots, K$) به منظور دوری بیشتر از مقدار ضد ایده آل تابع هدف k ام است. اگر هدف ماکزیمم سازی تابع هدف k ام بر اساس مقادیر ضد ایده آل باشد، آنگاه تابع هدف به صورت زیر است.

$$\max f_k \quad (\forall k = 1, 2, \dots, K)$$

بطوری که محدودیت نظیر این تابع هدف در روش NCP به صورت زیر خواهد بود:

$$f_k \geq f_{k^*}$$

در نتیجه مدل NCP با وجود اوزان اهمیت اهداف (w_k) به صورت زیر است.

مدل (۱۰)

$$\min \left(\sum_{k=1}^K w_k (-\delta_k^+)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

S.T.

$$f_k - \delta_k^+ = f_{k^*} \quad \forall k = 1, 2, \dots, K$$

$$x \in S$$

$$\delta_k^+ \geq 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, K$$

همچنین در محدودیت $(\forall k = 1, 2, \dots, K)$ $f_k - \delta_k^+ = f_{k^*}$ هدف ماکزیمم کردن δ_k^+ به منظور دوری بیشتر از مقدار ضد ایده آل تابع هدف k ام است. بنابراین در حالت کلی، چنانچه تعداد A تابع هدف از نوع بهینه سازی بر اساس مقادیر آرمانی و تعداد B تابع هدف از نوع می نیمم سازی و تعداد C تابع هدف از نوع ماکزیمم سازی باشند، می توان مدل نهایی NCP را به صورت مدل (۱۱) نوشت.

()

$$\min \left\{ \sum_{a=1}^A w_a (\delta_a^+ + \delta_a^-)^p + \sum_{b=1}^B w_b (-\delta_b^-)^p + \sum_{c=1}^C w_c (-\delta_c^+)^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

S.T

$$\begin{cases} f_a - \delta_a^+ = f_{(a)} & \forall a = 1, 2, \dots, A \\ f_a + \delta_a^- = f_{(a)} & \forall a = 1, 2, \dots, A \end{cases}$$

$$f_b + \delta_b^- = f_{b^*} \quad \forall b = 1, 2, \dots, B$$

$$f_c - \delta_c^+ = f_{c^*} \quad \forall c = 1, 2, \dots, C$$

$$x \in S$$

$$\delta_a^-, \delta_a^+ \geq 0; \delta_b^- \geq 0; \delta_c^+ \geq 0 \quad \forall a = 1, 2, \dots, A; \forall b = 1, 2, \dots, B; \forall c = 1, 2, \dots, C$$

$$f_{(a)} \in \mathbf{R} \quad \forall a = 1, 2, \dots, A$$

بطوری که $\sum_{a=1}^A w_a + \sum_{b=1}^B w_b + \sum_{c=1}^C w_c = 1$ $(w_a, w_b, w_c \geq 0)$ $(a=1, 2, \dots, A; b=1, 2, \dots, B; c=1, 2, \dots, C)$ است.

مثال عددی

به منظور پیاده سازی و تشریح مدل پیشنهادی NCP، در این بخش یک مثال عددی پیرامون انتخاب سبد سهام بهینه از بازار سهام ایران ارائه می شود. در این مثال از داده های روزانه مربوط به ۳۵ شاخص سهام مبادله شده در بازار سهام ایران استفاده

شده است. این داده‌ها متعلق به بازه زمانی سال‌های ۱۳۸۶ تا ۱۳۸۷ می‌باشند. همچنین برای مدل‌سازی مسأله انتخاب سبد سهام بهینه، از مدل (۲) و برخی محدودیت‌های مازاد دیگر استفاده می‌شود. این محدودیت‌ها که متناسب با مثال عددی می‌باشند، عبارتند از:

(۱) به منظور تنوع بخشیدن در سبد سهام انتخاب شده، سهم هر سهام در سبد بهینه بین صفر و ۰/۱ می‌باشد ($0 \leq x_j \leq 0/1$).

(۲) از میان ۳۵ سهام مورد مطالعه، ۴ سهام مربوط به سرمایه‌گذاری در بخش خودروسازی، ۲ سهام مربوط به سرمایه‌گذاری در بخش بانک، ۳ سهام مربوط به سرمایه‌گذاری در بخش لیزینگ، ۹ سهام مربوط به بخش سرمایه‌گذاری‌ها و ۱۷ سهام مربوط به سرمایه‌گذاری در سایر بخش‌ها است. به منظور تنوع بخشیدن در سبد سهام انتخاب شده، پیشنهاد می‌شود ۲۰٪ سرمایه‌گذاری کل سبد سهام بهینه متعلق به هر یک از بخش‌های سرمایه‌گذاری باشد که در این صورت مجموع این محدودیت‌ها برابر است با $\sum_{j=1}^n x_j = 1$. بنابراین مدل نهایی انتخاب سبد سهام بهینه، مطابق مدل (۱۲) خواهد بود.

$$\text{opt } f_1 = \sum_{j=1}^{35} \beta_j x_j \quad \text{مدل (۱۲)}$$

$$\text{max } f_2 = \sum_{j=1}^{35} \mu_j x_j$$

$$\text{min } f_3 = \sum_{j=1}^{35} P_j x_j$$

subject to :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_{15} = 0/2$$

$$x_5 + x_6 = 0/2$$

$$x_7 + x_8 + x_{33} = 0/2$$

$$x_4 + x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19} + x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} = 0/2$$

$$x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} + x_{28}$$

$$+ x_{29} + x_{30} + x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35} = 0/2$$

حال با توجه به اهداف و محدودیت‌های مدل (۱۲)، می‌توان مدل NCP را برای حل آن اجرا نمود. برای این منظور ابتدا باید مقدار آرمانی تابع هدف اول را تعیین و

مقادیر ضد ایده آل توابع هدف دوم و سوم را به دست آورد. برای تابع هدف اول نیز مقدار آرمانی ۱ در نظر گرفته می شود. برای تابع هدف دوم، مدل به دست آوردن مقدار ضد ایده آل به صورت زیر است:

$$f_{2^*} = \min \sum_{j=1}^{35} \mu_j x_j \quad ()$$

subject to :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_{15} = 0/2$$

$$x_5 + x_6 = 0/2$$

$$x_7 + x_8 + x_{33} = 0/2$$

$$x_4 + x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19} + x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} = 0/2$$

$$x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} + x_{28}$$

$$+ x_{29} + x_{30} + x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35} = 0/2$$

$$0 \leq x_j \leq 0/1 \quad \forall j = 1, 2, \dots, 35$$

:

$$f_{3^*} = \max \sum_{j=1}^{35} P_j x_j \quad ()$$

subject to :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_{15} = 0/2$$

$$x_5 + x_6 = 0/2$$

$$x_7 + x_8 + x_{33} = 0/2$$

$$x_4 + x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19} + x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} = 0/2$$

$$x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} + x_{28}$$

$$+ x_{29} + x_{30} + x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35} = 0/2$$

$$0 \leq x_j \leq 0/1 \quad \forall j = 1, 2, \dots, 35$$

برای استفاده از روش NCP معیار چبی شف ($L_p = \infty$) در نظر گرفته شده است، بطوری که مدل NCP در حالت مین-ماکس در مورد مسأله انتخاب سبد سهام بهینه به صورت مدل (۱۵) خواهد بود.

مدل (۱۵)

$$\begin{aligned}
 & \min \quad y \\
 & \text{subject to :} \\
 & y \geq w_1(\delta_1^+ + \delta_1^-) \\
 & y \geq w_2(-\delta_2^+) \\
 & y \geq w_3(-\delta_3^-) \\
 & \begin{cases} f_1 - \delta_1^+ = 1 \\ f_1 + \delta_1^- = 1 \end{cases} \\
 & f_2 - \delta_2^+ = f_{2*} \\
 & f_3 + \delta_3^- = f_{3*} \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_{15} = 0/2 \\
 & x_5 + x_6 = 0/2 \\
 & x_7 + x_8 + x_{33} = 0/2 \\
 & x_4 + x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19} + x_{20} + x_{21} + x_{22} + x_{23} = 0/2 \\
 & x_9 + x_{10} + x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} + x_{28} \\
 & + x_{29} + x_{30} + x_{31} + x_{32} + x_{34} + x_{35} = 0/2 \\
 & 0 \leq x_j \leq 0/1 \quad \forall j = 1, 2, \dots, 35 \\
 & y \geq 0; \delta_1^-, \delta_1^+ \geq 0; \delta_2^+ \geq 0; \delta_3^- \geq 0
 \end{aligned}$$

در جدول (۱)، مقادیر ضرایب پارامترهای موجود در محدودیت‌های مدل‌های CP(min-max) و NCP(min-max)، براساس داده‌های تاریخی روزانه سهام‌ها در سال‌های ۱۳۸۶ و ۱۳۸۷ نشان داده شده است. جدول (۲) نیز مقادیر ایده‌آل (بهترین مقادیر) و ضد ایده‌آل (بدترین مقادیر) هر یک از اهداف را نشان می‌دهد. بطوری که مقدار آرمانی f_1 برابر ۱ در نظر گرفته شده است. تحت شرایط یکسان و با فرض یکسان بودن اهمیت اهداف $\left(w_1 = w_2 = w_3 = \frac{1}{3}\right)$ ، دو مدل CP(min-max) و NCP(min-max) با استفاده از بسته نرم افزاری Lingo 8.0 بهبودسازی شده است. بر این اساس در جدول (۳)، دو سبد سهام بهینه بر اساس مدل‌های CP(min-max) و NCP(min-max) نشان داده شده است. مقادیر بهینه هر یک از اهداف نیز با توجه به مدل‌های CP(min-max) و NCP(min-max) در جدول (۴) به نمایش در

آمده‌اند.

باید گفت که روش NCP(min-max) در مورد توابع هدف f_1 و f_3 ، نتایج بسیار بهتری را با توجه به مقادیر ایده‌آل هر یک از اهداف نشان می‌دهد، بطوری که حتی در مورد تابع هدف f_1 ، مقدار آرمانی مورد نظر تصمیم گیرنده بطور کامل برآورده شده است و این در حالی است که در روش CP(min-max) مقدار بهینه به دست آمده از تابع هدف f_1 کمتر از ۰/۷ بوده است. همچنین روش CP(min-max) تنها در مورد تابع هدف f_3 ، با اختلاف اندکی (تقریباً ۳۹ ریال) نتیجه بهتری را نسبت به روش NCP (min-max) نشان می‌دهد. بطوری که در مدل NCP (min-max)، مقدار f_3 در مقایسه با مقدار ضد ایده‌آل این تابع هدف، مطلوب به نظر می‌رسد.



جدول ۱. مقادیر ضرایب موجود در محدودیت‌ها

سهام‌ها (j)	میانگین نرخ بازده (μ_j)	ضریب ریسک بتا (β_j)	قیمت هر سهم در آخرین روز معامله (ریال) (P_j)
پارس خودرو	۰/۰۰۰۰۴۲۳	-۱/۰۳۸۱۵	۱۲۷۵
محورسازان ایران خودرو	-۰/۰۰۰۰۶۴۳۷	۱/۱۵۰۶۵	۷۰۰
سایپا	۰/۰۰۱۵۹۹۴	۰/۱۷۸۱۲	۸۲۶
سرمایه‌گذاری رایان سایپا	۰/۰۰۲۷۱۴۸	۰/۶۰۰۲۵	۱۰۲۷
بانک پارسین	۰/۰۰۲۱۱۱۴	۱/۰۵۶۰۶	۲۳۳۰
بانک کارآفرین	۰/۰۰۱۰۶۸۵	-۱/۴۵۴۰۷	۳۴۲۷
لیزینگ ایران	۰/۰۰۱۷۷۱۷	-۱/۰۲۳۶۹	۹۵۱
لیزینگ صنعت و معدن	۰/۰۰۲۲۲۴۹	۱/۲۳۰۰۷	۹۶۷
آلومینیوم پارس	-۰/۰۰۰۱۸۳۸	۲/۱۴۹۵۶	۹۴۸
آلوم تک	۰/۰۰۱۶۲۶۴	-۰/۸۲۳۰۱	۸۳۸۵
بهنوش ایران	-۰/۰۰۰۰۴۷۸۰	-۰/۰۰۱۲۵	۹۵۷۳
پارس مینو	-۰/۰۰۰۲۱۹۰۱	۳/۶۷۸۹۱	۵۳۴
پشم شیشه ایران	۰/۰۰۱۱۴۳۳	۱/۶۷۹۲۱	۱۱۸۰
چینی ایران	۰/۰۰۱۱۴۳۳	۲/۱۲۰۰۳	۱۱۸۰
سایپا دیزل	-۰/۰۰۰۰۴۹۵۶	۰/۰۹۷۸۲	۸۶۹
سرمایه‌گذاری بانک ملی ایران	-۰/۰۰۱۲۳۶۶	۰/۳۲۵۰۷	۱۱۳۶
سرمایه‌گذاری بهمن	۰/۰۰۰۰۳۶۳	-۰/۲۱۳۶۶	۱۰۲۷
سرمایه‌گذاری توسعه ملی	۰/۰۰۰۰۶۳۳	-۲/۳۰۰۵۱	۹۰۰
سرمایه‌گذاری سایپا	۰/۰۰۰۷۱۲۵	۴/۰۳۲۳۱	۹۹۸
سرمایه‌گذاری سپه	۰/۰۰۰۲۰۵۲	۱/۲۵۳۶۲	۱۰۳۲
سرمایه‌گذاری صندوق بازنشستگی	۰/۰۰۰۸۰۵۳	۰/۰۰۲۶۳	۲۲۶۹
سرمایه‌گذاری صنعت نفت	۰/۰۰۰۵۹۰۴	-۱/۱۲۳۶۵	۱۶۰۶
سرمایه‌گذاری صنعت معدن	-۰/۰۰۲۰۲۳۱	۱/۲۳۴۵۲	۱۰۲۰
سیمان اردبیل	-۰/۰۰۰۰۴۸۱۲	۱/۱۴۰۲۹	۱۹۵۷۶
سیمان شمال	-۰/۰۰۰۲۳۲۴۶	۰/۷۵۲۸۱	۴۵۵۲
سیمان صوفیان	-۰/۰۰۰۰۳۴۸۹	-۱/۰۶۳۹۵	۴۱۷۳
شیشه و گاز	۰/۰۰۱۸۳۴۲	۲/۱۴۳۶۳	۱۰۸۰
فولاد مبارکه	۰/۰۰۳۳۵۵۶	۰/۰۵۰۲۳	۷۹۶
کاشی اصفهان	۰/۰۰۲۶۲۵۸	۰/۰۲۱۴۸	۲۲۵۰
کربن ایران	-۰/۰۰۱۳۹۷۵	۰/۱۰۲۳۶	۱۰۳۸
گروه صنعتی ملی	۰/۰۰۰۵۹۰۴	۱/۳۳۵۲۳	۱۶۰۶
لبنیات میهن	-۰/۰۰۰۰۹۰۱۰	-۱/۱۹۲۳۷	۱۰۳۸
لیزینگ خودرو غدیر	-۰/۰۰۰۰۷۰۶۰	۰/۸۲۶۶۷	۱۰۴۲
نفت ایران	-۰/۰۰۲۱۲۶۷	۱/۹۸۹۹۵	۵۸۰۰
نورد آلومینیوم	-۰/۰۰۱۰۶۲۴	۱/۰۰۵۴۲	۱۷۱۵

جدول ۲. مقادیر ایده‌آل و ضد ایده‌آل هر یک از اهداف (برای $k = ۳, ۲$)

مقادیر ضد ایده‌آل (f_k^*)	مقادیر ایده‌آل (f_k^*)	توابع هدف
-۰/۰۰۰۶	۰/۰۰۱۷	$f_۲$
۴۲۹۳/۴	۱۲۴۲/۹	$f_۳$

جدول ۳. مقادیر بهینه سبدهای سهام روش‌های CP(min-max) و NCP(min-max)

سبدهای سهام روش NCP(min-max)	سبدهای سهام روش CP(min-max)	سهام‌ها (j)
۰	۰	پارس خودرو
۰/۱	۰/۱	محورسازان ایران خودرو
۰/۱	۰/۱	سایپا
۰/۱	۰	سرمایه‌گذاری رایان سایپا
۰/۱	۰/۱	بانک پارسیان
۰/۱	۰/۱	بانک کارآفرین
۰/۱	۰/۱	لیزینگ ایران
۰/۱	۰/۱	لیزینگ صنعت و معدن
۰/۱	۰	آلومینیوم پارس

NCP(min-max) CP(min-max)

سبد سهام روش NCP(min-max)	سبد سهام روش CP(min-max)	سهام‌ها (z)
۰	۰	آلوم تک
۰	۰	بهنوش ایران
۰/۰۵۵۹۶	۰/۱	پارس مینو
۰	۰	پشم شیشه ایران
۰	۰	چینی ایران
۰	۰	سایپا دیزل
۰	۰	سرمایه گذاری بانک ملی ایران
۰	۰	سرمایه گذاری بهمن
۰	۰/۰۹۷۲۵	سرمایه گذاری توسعه ملی
۰/۱	۰/۱	سرمایه گذاری سایپا
۰	۰	سرمایه گذاری سپه
۰	۰	سرمایه گذاری صندوق بازنشستگی
۰	۰	سرمایه گذاری صنعت نفت
۰	۰/۰۰۲۷۵	سرمایه گذاری صنعت معدن
۰	۰	سیمان اردبیل
۰	۰	سیمان شمال
۰	۰	سیمان صوفیان
۰	۰	شیشه و گاز
۰/۰۴۴۰۴	۰/۱	فولاد مبارکه
۰	۰	کاشی اصفهان
۰	۰	کربن ایران
۰	۰	گروه صنعتی ملی
۰	۰	لبنیات میهن
۰	۰	لیزینگ خودرو غدیر
۰	۰	نفت ایران
۰	۰	نورد آلومینیوم

جدول ۴. مقادیر بهینه توابع هدف روشهای CP(min-max) و NCP(min-max)

(برای $k = ۱, ۳, ۲$)

توابع هدف	روش CP(min-max)	روش NCP(min-max)
f_1	۰/۶۶۹۵	۱
f_2	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱۲
f_3	۱۲۴۳/۲	۱۲۸۲/۳

نتایج به دست آمده از هر دو روش، قابل قبول و بهینه می‌باشند ولی ذکر این نکته الزامی است که وجود یک سرمایه‌گذاری موفق و بهینه در سایه سازگاری بیشتر با خواسته‌های تصمیم‌گیرنده است. به نظر می‌رسد تحت شرایط یکسان نتایج روش NCP(min-max) سازگاری بیشتری با خواسته‌های تصمیم‌گیرنده دارند. بطوری که شاید بتوان گفت این سازگاری بیشتر، محصول مدل سازی بر اساس مقادیر ضد ایده‌آل هر یک از اهداف در این روش است.

نتیجه‌گیری

با وجود بنیادین بودن مدل میانگین - واریانس مارکویتز در مسأله انتخاب سبد مالی بهینه، همواره انتقاداتی به دلیل کوآدراتیک بودن و استفاده از ماتریس کوواریانس در تابع هدف ریسک این مدل وجود داشته است. از اینرو مشاهده شد که استفاده از ضریب ریسک بتا می‌تواند جایگزین مناسبی جهت مدل سازی تابع هدف ریسک سرمایه‌گذاری محسوب شود. در این مقاله پس از معرفی روش CP، مدل NCP برای بهینه‌سازی مسائل چند هدفه پیشنهاد شده است. این مدل بر اساس مقادیر ضد ایده‌آل فرموله می‌شود. از آنجایی که تصمیم‌گیری در مورد سرمایه‌گذاری در سبدهای مالی بسیار حساس است، لذا هدف اصلی از ارائه این مدل، کسب نتایج مطلوب‌تر از فرایند بهینه‌سازی بوده است.

برای انتخاب سبد سهام بهینه در بازار سهام ایران، مدلی چند هدفه معرفی و مقادیر ایده‌آل و ضد ایده‌آل هر یک از اهداف جداگانه محاسبه گردید. پس از بهینه‌سازی دو روش CP(min-max) و NCP(min-max) تحت شرایط یکسان، نتایج

به دست آمده مؤید این بودند که با وجود بهینه و موجه بودن هر دو سبد سهام، روش $NCP(\min\text{-max})$ خواسته‌های تصمیم گیرنده را به شکل بهتری برآورده می‌سازد.



پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

منابع و ماخذ

- Ballester, E., and Romero, C. (1996). Portfolio selection: A compromise programming solution. *Journal of Operational Research Society*, 47(11), pp. 1377–1386.
- Ballester, E. (1998). Approximating the optimum portfolio for an investor with particular preferences. *Journal of Operational Research Society*, 49(9), pp. 998–1000.
- Ballester, E., Anton, JM., and Bielza, C. (2003). Compromise-based approach to road project selection in Madrid metropolitan area. *Journal of Operational Research Society Japan*, 46(1), pp. 99–122.
- Bell, D.E., Raiffa, H., and Tversky, A. (1988). Risky choice revisited. In D.E. Bell (Ed.), *Decision Making: Descriptive, normative and prescriptive interactions* (pp.99–112). Cambridge: Cambridge University Press.
- Elton, E.J., Gruber, M.J., and Padberg, M. (1976). Simple rules for optimal portfolio selection. *Journal of Finance*, 31, pp. 1341–1357.
- Konno, H. (1990). Piecewise linear risk function and portfolio optimization. *Journal of Operational Research Society Japan*, 33(2), pp. 139–156.
- Konno, H., and Yamazaki, H. (1991). Mean absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market. *Management Science*, 37(5), pp. 519–531.
- Lee, S.M., and Chesser, D.L. (1980). Goal programming for portfolio selection. *The Journal of Portfolio Management* (Spring), pp. 22–26.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1), pp. 77–91.
- Nawrocki, D.N., and Carter, W.L. (1998). Earnings announcements and portfolio selection. Do they add value?. *International Review of Financial Analysis*, 7(1), pp. 37–50.
- Perez-Gladish, B., Jones, D.F., Tamiz, M., and BilbaoTerol, A. (2007). An interactive three-stage model for mutual funds portfolio selection. *Omega*, 35(1), pp. 75–88.
- Romero, C., and Rehman, T. (1984). Goal programming and multiple criteria decision making in farm planning: An expository analysis. *Journal of Agricultural Economics*, 35, pp. 177–190.
- Romero, C., and Rehman, T. (1985). Goal programming and multiple criteria decision making in farm planning: Some extensions. *Journal of Agricultural Economics*, 36, pp. 171–185.
- Romero, C., Amador, F., and Barco, A. (1987). Multiple objectives in agricultural planning: A compromise programming application. *American Journal of Agricultural Economics*, 69, pp. 78–86.
- Sharpe, W.F. (1963). A simplified model for portfolio analysis. *Management Science*, 9 (2), pp. 277–293.
- Sharpe, W.F. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance*, 19(3), pp. 425–442.
- Sharpe, W.F. (1967). A linear programming algorithm for mutual fund portfolio selection. *Management Science*, 13(7), pp. 499–510.

Shing, C., and Nagasawa, H. (1999). Interactive decision system in stochastic multi-objective portfolio selection. *International Journal of Production Economics*, 60–61, pp. 187–193.

Young, M. (1998). A minimax portfolio selection rule with linear programming solution. *Management Science*, 44(5), pp. 673–683.

Zeleny, M. (1973). Compromise programming. In J.L. Cochrane and M. Zeleny (Eds), *Multiple Criteria Decision Making* (pp. 262–301). Columbia: University of South Carolina Press.

Zeleny, M. (1974). A concept of compromise solutions and the method of the displaced ideal. *Computers and Operations Research*, 1(3), pp. 479–496.



پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
رتال جامع علوم انسانی