معیار اندازه‌گیری نابرابری تیل

خسرو منطقی*

مقدمه

یکی از موضوعات مطرح اجتماعی و اقتصادی در طول قرنها تاریخ بشریت نابرابری شرایط افراد بوده‌است. خصوصاً در قرن جاری باتوجه به رشد تکنولوژی و دسترسی اقشار خاصی از جوامع به پدیده نوظهور و بسرعت تسخیرکننده فعالیتهای اجتماعی و اقتصادی بنام اینترنت و در نتیجه عمیق‌تر شدن شکاف طبقاتی موجود در جوامع مختلف، سؤالات گوناگونی جهت ارائه راهکارهای مناسب برای جلوگیری از عمیق‌تر شدن این شکاف طبقاتی و نهایتاً کاهش آن در پیش‌روی سیاستگزاران و اقتصاددانان قرار دارد. یکی از سؤالات مطرح این است که ابعاد نابرابری در جامعه چه میزان است؟ برای پاسخ دادن به این سؤال از معیارها یا شاخصهای نابرابری درآمد استفاده می‌گردد.

یکی از معیارهای مطرح و جالبی که از دهه‌های ۱۹۶۰ مورد استفاده و ارزیابی قرار گرفته‌است، شاخص یا معیار اندازه‌گیری نابرابری تیل می‌باشد که از مفهوم تابع

* – دکتر خسرو منطقی؛ عضوهیأت علمی دانشکده امور اقتصادی

انتروپی[1] توسط هنری تیل (۱۹۶۷) استخراج گردیده‌است. در مقاله حاضر اجمالاً به معرفی این معیار به‌عنوان شاخصی که خواص مهم و مطرح، در ادبیات اندازه‌گیری نابرابری درآمد را دارد، می‌پردازیم.

مفهوم انتروپی

اگر بخواهیم آگاهی[2] حاصل از یک پیام برحسب احتمال P را اندازه‌گیری کنیم، باید یک تابع نزولی را برگزینیم. تابعی که توسط شانون[1] (۱۹۴۹) فرض شده بدین قرار است $h(p) = \text{Log}\frac{1}{p} = -\text{Logp}$ [3] که از ∞ تا ۰ (زمانیکه احتمال برابر ۱ است) کاهش می‌یابد. اگر پیشامد E با احتمال P و عدم وقوع پیشامد E با احتمال $1 - p$ اتفاق افتد، آگاهی حاصله برابر خواهدبود. $h(p)$ احتمال پیشین و $h(1 - p)$ احتمال پسین از اوزان این آگاهیها بوسیله احتمالات آنها بدست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
H &= p\ h(p) + (1-p)\ h(1-p) \\
&= p\ \text{Log}\frac{1}{p} + (1-p)\ \text{Log}\frac{1}{1-p}
\end{aligned}
$$

H به‌عنوان انتروپی هر توزیعی که احتمالهای p و $1 - p$ را به دو امکان متفاوت اختصاص می‌دهد، شناخته می‌شود.

از تابع H این مفهوم استنباط می‌گردد که تابع انتروپی (آگاهی)، نسبت به p و $1 - p$ قرینه و همچنین نسبت به وقوع پیشامد E و عدم نوع پیشامد E نیز قرینه است.

حال فرض کنیم n پیشامد $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ با احتمالهای $P_N = (P_1, P_2, \ldots, P_n)$ وجود داشته‌باشد و فرض کنیم یکی از این پیشامدها بطور یقین رخ خواهد داد، بطوری‌که $P_i \geq 0$ و $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$ باشد. حال اگر پیشامد E_i رخ دهد آنگاه آگاهی یا انتروپی حاصل از وقوع این پیشامد برابر است با $h(P_i)$ و انتروپی یا آگاهی مورد انتظار از

1- Entropy Function

2- Information

3- $h(p)$ آگاهی حاصل از پیام با احتمال p

شرایط فوق برابر است با:

$$H(P_N) = \sum_{i=1}^{n} P_i \, h(P_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P_i \, \log \frac{1}{P_i}$$

مقدار ماکزیموم تابع H در صورتی حاصل می‌گردد که احتمال هر یک از پیشامدها برابر با $\frac{1}{n}$ باشد؛ یعنی $P_i = \frac{1}{n}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ یا به عبارتی مقدار ماکزیموم برابر است با:

$$\begin{aligned} H(P_1, P_2, ..., P_n) &= H(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}, ..., \tfrac{1}{n}) \\ &= \tfrac{1}{n} \text{Logn} + ... + \tfrac{1}{n} \text{Logn} \\ &= \text{Logn} \end{aligned}$$

ملاحظه می‌گردد که مقدار ماکزیموم یعنی Logn با افزایش n افزایش می‌یابد.

انتروپی به‌عنوان معیار اندازه‌گیری نابرابری درآمد

فرض کنید بردار $\underline{X} = (\frac{x_1}{x}, \frac{x_2}{x}, ..., \frac{x_n}{x})$ توزیع سهم درآمد جامعه‌ای دارای n عضو با کل درآمد x باشد، بطوریکه سهم درآمد i امین فرد[1] $\frac{x_i}{x}$ باشد و بردار $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}) = n$ ـ توزیع سهم جمعیت جامعه با کل جمعیت n باشد، و همچنین سهم جمعیت i امین فرد[2] $\frac{1}{n}$ و برای هر درآمد $x_i \geq 0$ و $(i = 1, 2, 3, ..., n)$ داشته باشیم و $\sum_{i=1}^{n} x_i = x$ باشد. حال تابع $H(\frac{x_1}{x}, \frac{x_2}{x}, ..., \frac{x_n}{x})$ یا $H(\underline{X})$ به‌عنوان یک معیار یا شاخص اندازه‌گیری برابری[3] درآمد

۱- سهم درآمد i امین فرد از کل درآمد x $\frac{x_i}{x}$

۲- سهم جمعیت i امین فرد از کل جمعیت n $\frac{1}{n}$

3- Equality Measure

رفتار می‌نماید، که ماکزیموم آن برابر با Logn است (هرگاه سهم درآمد هریک از اعضاء $\frac{1}{n}$ باشد) می‌فهمیم آن برابر با صفر است (هرگاه سهم درآمد یک نفر ۱ و سهم درآمد دیگر اعضاء صفر باشد) یعنی کل درآمد جامعه متعلق به یک نفر و سهم درآمد دیگر افراد جامعه صفر یا به‌عبارتی توزیع درآمد $X = (1, 0, \ldots, 0)$ باشد، و در این صورت اگر انتروپی حاصل از توزیع سهم درآمد را از ماکزیموم آن یعنی Logn کم کنیم، یک شاخص یا معیار اندازه‌گیری نابرابری درآمد بدست می‌آید که آن را شاخص یا معیار اندازه‌گیری نابرابری درآمد اول، «تیل» می‌نامند که برابر است با:

$$T = H\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}\right) - H\left(\frac{x_1}{x}, \frac{x_2}{x}, \ldots, \frac{x_n}{x}\right)$$

$$= Log\,n - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x} Log \frac{1}{\frac{x_i}{x}} = \sum \frac{1}{n} Log \frac{1}{\frac{1}{n}} - \sum \frac{x_i}{x} Log \frac{1}{\frac{x_i}{x}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x} Log \frac{\frac{x_i}{x}}{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\bar{x}} Log \frac{x_i}{\bar{x}} \qquad n\bar{x} = x$$

«تیل» اظهار می‌دارد که این شاخص خواص مهمی که معیارهای اندازه‌گیری نابرابری باید داشته‌باشد، را دارد. علاوه‌بر آن دارای خاصیتی دیگر بنام خاصیت تجزیه‌پذیری[1] نابرابری کل به نابرابری درون گروه[2] و بین گروه[3] می‌باشد. بعد از تیل افراد دیگری مانند؛ بورگنین[2]، شورکز[3]، کوول[*]، آناند[*] و فوستر[4] در مورد این خاصیت به‌طور مفصل بحث نموده‌اند و قواعد کلی‌تری نیز ارائه داده‌اند.

خواصی که معمولاً برای یک معیار یا شاخص اندازه‌گیری نابرابری درآمد در

1- Decomposability
2- Within Group
3- Between Group

نظر می‌گیرند و شاخص تیل دارای آن خواص است، به شرح زیر می‌باشد:

فرض کنید بردار $\underline{X}=(x_1,x_2,...,x_n)$ توزیع سهم درآمد جامعه‌ای با n عضو باشد به‌طوری‌که $\sum_{i=1}^{n} x_i = x$ ، $\bar{x}=\frac{x}{n}$ [1].

۱ ـ معیار یا شاخص اندازه‌گیری نابرابری درآمد در بردار توزیع درآمد $\underline{X}=(x_1,x_2,...,x_n)$ باید وابسته به درآمد تمام اعضاء بردار باشد، یعنی هرگاه یکی از درآمدها یا کل آنها تغییر کرد، مقدار شاخص یا معیار تغییر نکند. شاخص T دارای این خاصیت است و اثبات آن بدیهی است.

۲ ـ شاخص اندازه‌گیری نابرابری درآمد باید دارای خاصیت تقارن[2] باشد، یعنی هرگاه ترتیب اعضاء در بردار درآمد تغییر کرد شاخص تغییر نکند. در مورد شاخص T این اصل نیز بدیهی است.

۳ ـ شاخص نابرابری باید دارای شرط اصل پیگو ـ دالتون[3] باشد. این شرایط اولین بار توسط دالتون[5] (۱۹۲۰) بعد از تلاشهای پیگو تعریف گردید و بدین مفهوم است که هرگاه در بردار درآمد $\underline{X}$ مقداری از درآمد فرد ثروتمند به فقیرتر انتقال یابد به شرطی که کل درآمد x تغییر نکند و میزان انتقال به‌گونه‌ای باشد که ارتباط میان فرد ثروتمند و فقیر همچنان ثابت مانده و معکوس نگردد، یعنی فرد ثروتمند پس از انتقال درآمد همچنان ثروتمند و فرد فقیر همچنان فقیر باقی بماند، مقدار شاخص کاهش و یا برعکس افزایش می‌یابد، از آنجائیکه x Logx یک تابع محدب و شاخص تیل $T=\frac{1}{n}\sum\frac{x_i}{\bar{x}}\ Log\frac{x_i}{\bar{x}}$ نیز یک تابع محدب است دارای این خاصیت می‌باشد. این طور به اثبات رسیده‌است که هر شاخص نابرابری درآمد که میانگین حسابی توابع اکیداً محدب درآمد باشد، دارای چنین خاصیتی است.

۴ ـ حداقل و حداکثر شاخص: مقدار شاخص نابرابری درآمد باید در زمانی‌که

1- $\bar{x}=\frac{x}{n}$ متوسط درآمد

2- Symetry Preincipal

3- Pigou-Dalton Preincipal of Transper.

همه اعضاء بردار درآمد، دارای درآمدی مساوی هستند حداقل، و هرگاه تمام درآمد فقط به یک عضو از اعضاء بردار درآمد تعلق داشته و اعضاء دیگر دارای درآمد صفر باشند، حداکثر شود. یعنی دامنه تغییرات بین حداقل نابرابری؛ که در صورت تساوی درآمد همه افراد حاصل می‌گردد و حداکثر نابرابری؛ که در صورت اختصاص داشتن همه درآمد به یک‌نفر ایجاد می‌شود، باید شاخص باشد.

فرض کنیم بردار توزیع درآمد n نفر $\underline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ طوری توزیع مجدد گردد که همه اعضاء دارای درآمد مساوی با $\bar{x}$ باشند، آنگاه

$$
\begin{aligned}
T(\bar{x}, \bar{x}, ..., \bar{x}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\bar{x}} Log \frac{x_i}{\bar{x}} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{x}}{\bar{x}} Log \frac{\bar{x}}{\bar{x}} \\
&= \frac{1}{n} \times n \times Log\, 1 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

یعنی هرگاه توزیع درآمد به‌طور مساوی صورت پذیرد، شاخص تیل حداقل صفر خواهدبود.

از طرفی چون شاخص T قرینه بوده و دارای خاصیت اصل انتقال می‌باشد، این امکان وجود دارد که هر توزیع درآمد $\underline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ را طوری مرتب کنیم که $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$ باشد، و با یک دنباله از انتقال غیر کاهشی درآمد می‌توانیم از بردار توزیع درآمد $(x_1, x_2, ..., x_n)$ به یک بردار توزیع درآمد $(x, 0, ..., 0, 0)$ دست یابیم، به‌طوری‌که کل درآمد x فقط به یک نفر تعلق یابد و باتوجه به اصل انتقال درآمد می‌توانیم نتیجه بگیریم که:

$$
\begin{aligned}
T(0, 0, ..., 0, x) &= T(0, 0, x, 0, ..., 0) \\
&\ge T(x_1, x_2, ..., x_n)
\end{aligned}
$$

که نشان می‌دهد حداکثر نابرابری T زمانی حاصل می‌شود که کل درآمد فقط به یک نفر تعلق داشته‌باشد.

۵ـ شاخص نابرابری باید مستقل از میانگین درآمد(1) باشد: یعنی هرگاه درآمد

1- Mean Independance

همه افراد یک جامعه به یک نسبت مساوی افزایش یا کاهش یابد، در شاخص اندازه‌گیری نابرابری تغییری حاصل نگردد. یکی از دلایل مطرح کردن این شرط این است که می‌خواهیم نابرابری درآمد در دو کشور با واحد پول متفاوت را مقایسه کنیم. اگر همه درآمدهای یک توزیع درآمد $\underset{\sim}{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ را در یک عدد مثبت $\alpha > 0$ ضرب کنیم به‌گونه‌ای که $\alpha\underset{\sim}{X} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$ سپس

$$
\begin{aligned}
T(\alpha \underset{\sim}{x}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha x_i}{\alpha \bar{x}} \log \frac{\alpha x_i}{\alpha \bar{x}} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\bar{x}} \log \frac{x_i}{\bar{x}} \\
&= T(\underset{\sim}{x})
\end{aligned}
$$

که نشان می‌دهد شاخص T در نتیجه تغییر متناسب همه درآمدهای توزیع درآمد تغییر نخواهد کرد، یعنی T مستقل از میانگین درآمد است.

۶ ـ شاخص نابرابری درآمد باید دارای خاصیت قانون جمعیت[1] باشد، یعنی هرگاه تمام اعضاء بردار درآمد را چند برابر کنیم در مقدار شاخص نیز تغییر حاصل نگردد. فرض کنیم توزیع درآمد $\underset{\sim}{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ را با K و برابر کردن اعضاء آن به توزیع $\underset{\sim}{X}' = (x_1, x_2, \dots, x_n; \dots; x_1, x_2, \dots, x_n)$ [2] افزایش دهیم به‌طوری‌که $n'_{(\underset{\sim}{x}^\bullet)} = K n_{(\underset{\sim}{x})}$.

$$
\begin{aligned}
T(\underset{\sim}{x}^\bullet) &= \frac{1}{n'} \sum_{i=1}^{n'} \frac{x_i}{\bar{x}^\bullet} \log \frac{x_i}{\bar{x}^\bullet} \\
&= \frac{1}{kn} \sum_{i=1}^{kn} \frac{x_i}{\bar{x}} \log \frac{x_i}{\bar{x}} \\
&= \frac{k}{kn} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\bar{x}} \log \frac{x_i}{\bar{x}} \\
&= T(\underset{\sim}{x})
\end{aligned}
$$

1- Population Principal

2- $n'_{(\underset{\sim}{x}^\cdot)}$ جمعیت توزیع $\underset{\sim}{X}'$، $n_{(\underset{\sim}{x})}$ جمعیت توزیع $\underset{\sim}{X}$

که نشان می‌دهد T دارای خاصیت قانون جمعیت می‌باشد.

۷ ـ شاخص نابرابری درآمد باید دارای شرط افزایش مقدار مساوی درآمد به همه افراد جامعه باشد. یعنی هرگاه مقداری درآمد مساوی به همه اعضاء بردار درآمد، اضافه یا کم گردد مقدار شاخص نیز به ترتیب کاهش یا افزایش یابد.

فرض کنیم یک مقدار مساوی درآمد $d>0$ را به همه اعضاء بردار درآمد $\underset{\sim}{X}=(x_1,x_2,...,x_n)$ اضافه کنیم بگونه‌ای که بردار درآمد $\underset{\sim}{X}'=(x_1+d,x_2+d,...,x_n+d)$ حاصل گردد و $\bar{x}'=\bar{x}+d$ ، آنگاه

$$T(\underset{\sim}{x}')=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i+d}{\bar{x}+d}\log\frac{x_i+d}{\bar{x}+d}$$

با مشتق گرفتن نسبت به d از رابطه فوق چنین خواهیم داشت:

$$T'(\underset{\sim}{x}')=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\bar{x}-x_i}{(\bar{x}+d)^2}\log\frac{x_i+d}{\bar{x}+d}+\frac{\bar{x}-x_i}{(\bar{x}+d)^2}\right]$$

$$=\frac{1}{n(\bar{x}+d)^2}\times\frac{\bar{x}+nd}{\bar{x}+nd}\sum_{i=1}^{n}[(\bar{x}+d)-(x_i+d)]\log\frac{x_i+d}{\bar{x}+d}$$

$$=\frac{\bar{x}+nd}{n(\bar{x}+d)^2}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\bar{x}+d}{\bar{x}+nd}\right)\log\frac{\left(\frac{x_i+d}{\bar{x}+nd}\right)}{\left(\frac{\bar{x}+d}{\bar{x}+nd}\right)}-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i+d}{\bar{x}+nd}\right)\log\frac{\left(\frac{x_i+d}{\bar{x}+nd}\right)}{\left(\frac{\bar{x}+d}{\bar{x}+nd}\right)}\right]$$

اولین جمله جمع در داخل کروشه فوق کوچکتر از صفر و دومین جمله جمع بزرگتر از صفر است. بنابراین $T'(\underset{\sim}{x}')<0$ است یعنی $T(\underset{\sim}{x}')$ تابعی نزولی نسبت به d است. اگر $d=0$ باشد $T(\underset{\sim}{x}')=T(\underset{\sim}{x})$. بنابراین $T(\underset{\sim}{x}')<T(\underset{\sim}{x})$ است اگر $d>0$ باشد. بدین ترتیب ثابت می‌شود که T با افزایش یک مقدار مساوی به درآمدها، کاهش می‌یابد.

۸ ـ اصل تجزیه‌پذیری(۱) شاخص نابرابری: این اصل اولین بار توسط «تیل»

1- Decomposability Principal

(۱۹۶۷) مطرح گردید: منظور از تجزیه‌پذیری این است که مقدار شاخص نابرابری درآمد کل جامعه، با مجموع مقدار نابرابری درون گروهها و همچنین میزان نابرابری بین گروهها، مساوی باشد. برای سادگی مفهوم این موضوع فرض کنید یک جمعیت با حجم n و بردار درآمد $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ با متوسط درآمد $\bar{x}$ به دو گروه با حجمهای n_1 و n_2 با متوسط درآمدهای $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$ تقسیم گردد به‌طوری‌که اگر $n_1+n_2=n$ و $n_1\bar{x}_1+n_2\bar{x}_2=n\bar{x}$ و $x=n\bar{x}$ و $x_1=n_1\bar{x}_1$ و $x_2=n_2\bar{x}_2$ به ترتیب کل درآمد جامعه و گروههای ۱ و ۲ باشند و $T_1=\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\frac{x_i}{\bar{x}_1}\log\frac{x_i}{\bar{x}_1}$, $T_2=\frac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}\frac{x_i}{\bar{x}_2}\log\frac{x_i}{\bar{x}_2}$ باشد، آنگاه

$$T(\underset{\sim}{x},n)=\frac{n_1\bar{x}_1}{n\bar{x}}T_1+\frac{n_2\bar{x}_2}{n\bar{x}}T_2+\frac{n_1\bar{x}_1}{\bar{x}}\log\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}}+\frac{n_2\bar{x}_2}{\bar{x}}\log\frac{\bar{x}_2}{\bar{x}}$$
$$=T_W+T_B$$

به‌طوری‌که: $T_B=\frac{x_1}{x}\log\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}}+\frac{x_2}{x}\log\frac{\bar{x}_2}{\bar{x}}$, $T_W=\frac{x_1}{x}T_1+\frac{x_2}{x}T_2$

تیل T_W را نابرابری درون گروهها و T_B را نابرابری بین گروهها معرفی می‌کند که قابل تعمیم به تقسیم کل جامعه به بیش از دو گروه می‌باشد. البته تیل تعریف دقیقی از مفهوم نابرابری درون گروهها و بین گروهها ارائه نمی‌دهد و فقط روابط فوق را نابرابری درون گروه و بین گروه می‌نامد. آناند (۱۹۸۳) بعد از تیل تلاش می‌کند تا تعریفی دقیق از نابرابری درون گروه و بین گروه ارائه دهد.

نتیجه‌گیری

هنری تیل با استفاده از تعریف تابع انتروپی دو شاخص یعنی شاخص T و شاخص L را برای اندازه‌گیری نابرابری درآمد معرفی می‌نماید، که در مقاله حاضر یکی به معرفی تابع انتروپی و دیگری به بررسی خصوصیاتی از شاخص T پرداخته شده‌است، که معمولاً باید یک شاخص معتبر اندازه‌گیری نابرابری درآمد داشته‌باشد.

البته شاخص T دارای نقاط قوت و ضعفی است که می‌تواند مورد بررسی

دقیقتری قرار گیرد. مثلاً ماکزیموم شاخص T که برابر است با logn، بستگی به n جمعیت جامعه دارد که این خود از نکات قابل بحث است و یا اینکه تیل با تجزیه شاخص T از دیدگاه ریاضی یک بخش از آن را شاخص اندازه‌گیری برابری درون گروه و بخش دیگری از آن را شاخص اندازه‌گیری نابرابری بین گروه می‌نامد؛ بدون اینکه تعریف مشخصی از نابرابری درون گروه و بین گروه ارائه دهد. البته بعدها آناند (Anand) تلاش می‌کند تا با ارائه تعریف دقیقی از این دو نابرابری به تجزیه شاخص T بپردازد و به نتایج بسیار جالبی نیز دست می‌یابد. به هرحال از دیدگاه نظری تلاش تیل برای معرفی شاخص اندازه‌گیری نابرابری T با توجه به رابطه ریاضی آن، بسیار بااهمیت است؛ اما از دیدگاه عملی آیا شاخص T می‌تواند معیار مناسبی برای اندازه‌گیری نابرابری درآمد در ایران باشد؟ مقاله حاضر به این بعد از شاخص T نپرداخته است ولی با بررسی دقیق خصوصیات شاخص T زمینه را برای کسانی که بعد از تعریف مشخصی از واحد اندازه‌گیری درآمد می‌خواهند به این قسمت از خصوصیات شاخص T بپردازند فراهم شده‌است.

منابع:

1- C.E, Shannon, "Amalhematical Theory of communication" Bell System Technical Journal, 1948. Vol 27, pp.379-423, 623-656.

2- F. Bourguiynon, "Decomposable Income Inequality Measures", Econometrica 47, 1979, pp.901-920.

3- A.F. Shorrocks, *"The class of Assitivety Decomposable Income Inequality Measures"*, Econometrica 47, pp.613-625, 1980.

4- J.E, Foster, "An Axiomatic Characterization of The Their Measures of Income Inequality", Journal of Economic Theory, Vol 31, pp.105-210, 1983.

5- H. Dalton, "The Measurement of The Inequality of Incomes", Economic Journal, Vol 30, pp.348-361, 1920.

زیرنویس:

* - H. Theil, "Economic and Information Theory", North Holland, Amesterdom: 1967.

* - F.A. Cowell, "on The Structure of Additive Inequality measures", Review of Economic Studies, Vol 47, 1980.

* - S. Anand, "Inequality and Poverty in Malaysia, Measurement and Decomposition" Published for the World Bank, oxford University Press, 1983.

* - KH. Manteghi, "studeis on The Meauserment of Income Inequality",Thesis Submitted for The Degree of Doctore of Philosophy, I.I.S. INDIA.

* ـ نشریه علمی و فنی دانشگاه امیرکبیر، «یادداشتی بر معیارهای اندازه‌گیری نابرابری تیل»، خسرو منطقی، سال پنجم، شماره ۱۸، ۱۳۷۰.