مجله علوم اجتماعی و انسانی دانشگاه شیراز
دوره بیست و دوم، شماره دوم، تابستان ۸۴ (پیاپی ۴۳)
(ویژه‌نامه حسابداری)

بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با استفاده از روش‌های برنامه‌ریزی خطی و ارائه‌ی یک مدل کاربردی

دکتر مهدی ابزری* دکتر سعیده کتابی** عباس عباسی***
دانشگاه اصفهان

چکیده

این تحقیق با موضوع «بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری، با استفاده از روش‌های برنامه‌ریزی خطی و ارائه یک مدل کاربردی»، سعی دارد با در نظر گرفتن دانش مدیریت مالی و سرمایه‌گذاری جهت ارزیابی ریسک و بازده، به تجزیه و تحلیل نقاط قوت و ضعف مدل مبنا که توسط اسپرانزا[1]، در سال ۱۹۹۵ برای به‌کارگیری در بازار سهام میلان ایتالیا ارائه شده، بپردازد و بر این اساس، مدلی جدید را در قالب برنامه‌ریزی خطی جهت بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با در نظر گرفتن نرخ بازده مورد انتظار و حداقل ریسک طراحی نماید.

مدل پیشنهادی، انواع مختلف سرمایه‌گذاری‌هایی را بررسی می‌کند که یک سرمایه‌گذار می‌تواند و تمایل دارد جهت تشکیل سبد سرمایه‌گذاری خود، آن‌ها را مورد ملاحظه قرار دهد. در نهایت، برای حل این مدل، یک روش پیشنهادی ارائه و روی یک مثال واقعی اجرا و تحلیل می‌شود، به طور نمونه نتایج نهایی، اطلاعات بازار سهام میلان نشان داده‌اند که مدل جدید، در زمان بسیار کوتاه‌تری قابل حل می‌باشد. در صورتی که مدل مبنا با نرخ بازده مورد انتظار ۱۲٪، قادر به حل مسأله‌ای با ۱۴ نوع سهام بیشتر نبود. مدل جدید، مسأله‌ای با تعداد ۲۰ نوع سهام مورد استفاده تحقیق را، به راحتی و در زمانی بسیار کوتاه حل می‌نماید. افزون بر کوتاه‌تر شدن زمان حل، بر اساس نتایج این تحقیق، مدل جدید ریسک نامطلوب را، به میزان بسیار زیادی در مقایسه با مدل مبنا، کاهش داده؛ به گونه‌ای که این روند با افزایش تعداد سهام مورد مطالعه، به صورت پله‌ای و نزولی ادامه می‌یابد.

واژه‌های کلیدی: ۱. بهینه‌سازی ۲. سرمایه‌گذاری ۳. سبد سرمایه‌گذاری ۴. برنامه‌ریزی خطی با اعداد صحیح ۵ . ریسک بازده.

۱.مقدمه

آن چه تا به امروز در محاسبات مالی و در زمینه انتخاب سهام و سبد سرمایه‌گذاری عنوان شده است به گونه‌ای، سرمایه‌گذاری‌های موجود را از لحاظ درجه ریسک و نرخ بازده، به ترتیب اولویت بندی می‌نماید، تا بدین طریق سرمایه‌گذار بتواند با در نظر گرفتن امکانات مالی و سایر سیاست‌های فرا روی خود، پورتفوی مطلوب خویش را تشکیل دهد. وقتی که فرد سرمایه‌گذار با دارایی‌های متفاوتی روبه‌رو می‌گردد، بایستی که در مورد تعداد دارایی‌های انتخابی و میزان سرمایه‌گذاری در هر کدام از آن‌ها، تصمیم‌گیری نماید که در این شرایط فرآیند تصمیم‌گیری بسیار دشوار می‌باشد. ترکیب سبد مورد نظر می‌تواند حاصل تصمیمات اتفاقی و غیر مرتبط سرمایه‌گذار باشد یا نتیجه برنامه‌ریزی سنجیده وی گردد.

---

* دانشیار مدیریت
** استادیار مدیریت
*** دانشجوی دکتری مدیریت

فنون موجود در مباحث مدیریت مالی در مورد تعیین میزان هر نوع سرمایه‌گذاری با در نظر گرفتن شرایط یادشده، ناتوان هستند. نگاهی به تکنیک‌های برنامه‌ریزی ریاضی، نشان می‌دهد که آن‌ها با در نظر گرفتن تابع هدف مسأله، میزان و ترکیب بهینه‌ای را از مسأله موجود در اختیار ما قرار می‌دهند؛ بنابراین، به نظر می‌رسد که ادغام تکنیک‌های برنامه‌ریزی خطی و مدیریت مالی، بتواند ما را در جهت ساخت مدلی ریاضی جهت حل مشکل یاد شده یاری دهد. در این تحقیق نشان داده خواهد شد که چگونه مدل‌های بهینه‌سازی، می‌توانند، به گونه‌ای به مسایل مالی تعمیم داده شوند به طوری که خصوصیات مرتبط با مسأله واقعی را نشان دهند.

۲. شرح و بیان مسأله پژوهشی

یکی از مباحث مهمی که در بازارهای سرمایه مطرح است و باید مورد توجه سرمایه‌گذاران اعم از اشخاص حقیقی یا حقوقی قرار گیرد، بحث انتخاب سبد سرمایه‌گذاری بهینه می‌باشد و در این رابطه، بررسی و مطالعه سرمایه‌گذاران در جهت انتخاب بهترین سبد سرمایه‌گذاری با توجه به میزان ریسک و بازده آن انجام می‌شود. معمولاً فرض بر این است که سرمایه‌گذاران ریسک را دوست ندارند و از آن گریزانند و همواره در پی آن هستند تا در اقلامی از دارایی‌ها سرمایه‌گذاری کنند که بیشترین بازده و کمترین ریسک را داشته باشند. به عبارت دیگر، سرمایه‌گذاران به بازده سرمایه‌گذاری به عنوان یک عامل مطلوب می‌نگرند و به واریانس بازده‌ها (ریسک) به عنوان یک عنصر نامطلوب نظر دارند.

مدل‌هایی مثل برنامه‌ریزی خطی، برنامه‌ریزی عدد صحیح، برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط و برنامه‌ریزی (صفر- یک)، در برنامه‌ریزی‌های ریاضی وجود دارند که می‌توانند با در نظر گرفتن هدف و شرایط حاکم بر مسأله، ترکیبی بهینه با مقدار بهینه مشخص از عناصر تشکیل‌دهنده سبد را ارائه دهند. در نتیجه، می‌توان برای رسیدن به چنین هدفی، اطلاعات مالی را با در نظر گرفتن تمام شرایط حاکم بر سرمایه‌گذاری در دنیای واقعی وارد برنامه‌ریزی ریاضی کرد.

جهت تحصیل اوراق بهادار و هر گونه سرمایه‌گذاری، انواع متفاوتی از هزینه ایجاد می‌شود. مطمئناً مهم‌ترین عامل هزینه، هزینه خرید می‌باشد؛ اما عوامل هزینه دیگری مانند هزینه معاملات، چه تناسبی و چه ثابت نیز ممکن است وجود داشته باشند. با وجود این که بعضی از اوراق بهادار را می‌توان در هر مقدار پیوسته‌ای (غیرصحیح) به دست آورد ولی ممکن است، بعضی دیگر از اوراق را تنها به صورت مضاربی از حداقل واحدهای معاملات، خریداری نمود. ممکن است افزون بر محدودیت‌ها و خصوصیات یاد شده، سرمایه‌گذار دریابد که معرفی و ارائه‌ی محدودیت‌هایی که ترجیحات را منعکس می‌کند، مفید باشد. بنابراین، مدل بهینه‌سازی باید محدودیتی را در بر گیرد که در آن هم حذف ورقه بهادار یا یک نوع سرمایه‌گذاری و هم وجود آن، با مقداری از دارایی که بیشتر از مقدار حداقل است وضع شود.

روند این تحقیق، بدین گونه است که در ابتدا مدلی را که اسپرانزا، جهت بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری ارائه داده، به عنوان مبنای کار در نظر گرفته شده و سپس با بررسی محدودیت‌ها یا موانعی که در برنامه‌ریزی ریاضی در حل رایانه‌ای با آن مواجه شده، سعی گردیده تا مدلی جامع‌تر در چارچوب برنامه‌ریزی ریاضی ارائه گردد. جامعه آماری این تحقیق، انواع مختلف سرمایه‌گذاری‌هایی است که یک سرمایه‌گذار، می‌تواند و تمایل دارد که جهت انتخاب سبد سرمایه‌گذاری خود، آن‌ها را مورد ملاحظه قرار دهد؛ و نمونه آماری مورد استفاده، سرمایه‌گذاری‌های تصادفی انتخاب شده از بازار بورس اوراق بهادار تهران می‌باشد که تعداد آن‌ها از ۲۰ نوع تجاوز نمی‌کند. جهت فرموله کردن مدل‌های ارائه شده از برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح و (صفر- یک) استفاده شد. و سپس با استفاده از نرم‌افزار Win QSB[1]، جواب‌های نهایی هر مدل ارائه گردیده است و جهت تحلیل داده‌های آماری و مالی نیز از نرم‌افزار اکسل استفاده شده است.

اهمیت و ضرورت چنین مسأله‌ای در ترکیب بهینه‌ای است که ارائه می‌دهد زیرا این ترکیب، میزان ریالی سرمایه‌گذاری را در هر یک از اجزای تشکیل‌دهنده سبد سرمایه‌گذاری با در نظر گرفتن نرخ بازده مورد انتظار و هدف حداقل ریسک، ارائه می‌دهد. هم‌چنین نقطه قوت استفاده از چنین مدل‌هایی را می‌توان قابلیت به روز نمودن آن‌ها با

استفاده از رویه‌های ارائه شده در تحلیل حساسیت دانست؛ زیرا شرایط حاکم بر محیط بیرونی آن‌چنان که در لحظه برنامه‌ریزی وجود دارند، در لحظه‌ای دیگر ثابت نخواهد بود. از طرف دیگر، اهمیت موضوع مورد بررسی از آن جایی است که سرمایه‌گذاران جهت سرمایه‌گذاری در اوراق بهادار مختلف، به نتایج حاصل از اجرای عملی یک مدل منطقی آگاهی می‌یابند و می‌توانند تصمیم‌گیری‌های سرمایه‌گذاری پورتفوی خود را در سطح بالاتری از کارایی در جهت بهینه‌تر شدن بازار سرمایه، اتخاذ نمایند.

نتایج این تحقیق می‌تواند برای شرکت‌های سرمایه‌گذاری، مدیران‌عالی، مدیران‌مالی، تحلیل‌گران اوراق بهادار، بانک‌ها و بانکداران، مؤسسات بیمه، پژوهشگران این رشته و به طور کلی سرمایه‌گذاران کاربرد مؤثر داشته باشد. آن‌ها می‌توانند از این روش در جهت انتخاب سبد سرمایه‌گذاری بهینه در کارآیی هر چه بیشتر تصمیمات سرمایه‌گذاری و به دنبال آن بازار سرمایه ایران و در نهایت در توسعه اقتصادی کشور نقش مهمی ایفا نمایند.

۳. پیشینه و تاریخچه موضوع

رویکرد سرمایه‌گذاری در چارچوب سبد سرمایه‌گذاری، در پرتو اندیشه‌های مارکوویتز و شارپ، روند تکاملی پیموده و کاربرد برنامه‌ریزی ریاضی، دقت تصمیم‌گیری سرمایه‌گذاری در سبد سرمایه‌گذاری را افزایش داده است. مدل‌های مختلفی برای هدایت سرمایه‌گذاری در چارچوب سبد سرمایه‌گذاری با استفاده از برنامه‌ریزی ریاضی ارائه گردیده‌اند. مدل مارکوویتز به نام مدل (میانگین- واریانس)، از دو معیار بازده و ریسک به همراه محدودیت بودجه سرمایه‌گذاری، در قالب برنامه‌ریزی درجه ۲، استفاده کرده است.

مهم‌ترین پیشرفت در زمینه استفاده عملی از تئوری سبد سرمایه‌گذاری از طریق توسعه مدل بازار، توسط شارپ در سال ۱۹۶۳، صورت گرفت و تحت عنوان مدل تک شاخصی[۲] معروف گردید. پس از آن، مدل‌های چند شاخصی[۳] در جهت تحت کنترل در آوردن بعضی از تأثیرات غیر بازاری که باعث می‌شوند، قیمت اوراق بهادار، به صورت هم جهت با یکدیگر تغییر نمایند، ارائه گردیدند. اولین اقدام در این گروه از مدل‌های چند متغیره در ارتباط با بازده سهام توسط چن، رول و روس[۴] در مقاله‌ای، در سال ۱۹۸۶، ارائه گردید. پس از آن، افرادی مانند بری، بورمیستر، مکل رولی و ادوین[۵] در سال‌های ۱۹۸۶ تا ۱۹۸۸، مقالاتی در جهت بسط مدل‌های چند متغیره که توسط چن، رول و روس در سال ۱۹۸۶ ارائه شد، به نمایش گذاشتند. در سال ۱۹۸۶، سالومون[۶] و همکارانش، مدلی را طراحی کردند که در آن هفت متغیر استفاده شد. نتایج نشان می‌دهند که استفاده از مدل‌های چند متغیره، بهتر می‌تواند همبستگی داده‌های تاریخی را توصیف نماید و در نتیجه، انتخاب سبد سرمایه‌گذاری را بهتر ارائه خواهد کرد.

اسپرانزا در سال ۱۹۹۵، مدلی از برنامه‌ریزی مختلط را با خصوصیات واقعی مثل هزینه‌های معاملات و حداقل واحدهای معاملات ارائه داد. وی بعد از طراحی مدل یاد شده، آن را برای بازار سهام میلان ایتالیا به کار گرفت و به علت این که در زمان معقول و مطلوبی توسط رایانه قابل حل نبود و یا در بعضی از مواقع، با افزایش نرخ بازده و تعداد سهام، حل آن به طور کلی غیر ممکن می‌شد، الگوریتمی ابتکاری برای حل آن طراحی کرد. این مدل به لحاظ داشتن نقاط قوت و ضعف خاص خود، در این تحقیق، به عنوان مدل مبنا در نظر گرفته شده است. به دنبال آن، در سال ۱۹۸۲، ییتژاکی[۸]، مدل (ریسک- میانگین) را، با استفاده از تفاوت میانگین جینی[۹]، به عنوان مقیاسی برای اندازه‌گیری ریسک معرفی نمود. کونو و یامازاکی[۱۰]، در سال ۱۹۹۱، مدلی قابل حل از طریق برنامه‌ریزی خطی (LP)، برای بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری بر مبنای مقیاس اندازه‌گیری ریسک به طور کامل ارائه کردند. پس از آن، اسپرانزا و مانسینی[۱۱] در سال ۱۹۹۷، با نوشتن مقاله‌ای تحت عنوان «الگوریتم‌های ابتکاری برای انتخاب سبد سرمایه‌گذاری با حداقل سهام مورد معامله[۱۲]» به ارائه مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلطی پرداختند. آن‌ها برای حل آن نیز به الگوریتمی ابتکاری نیاز داشتند. یونگ[۱۳] در سال ۱۹۹۸، مدل بهینه‌سازی پرتفوی قابل حل توسط LP را بر مبنای ریسک تعریف شده به وسیله بدترین سناریو ارائه داد که در آن ریسک بر مبنای بدترین حالت تعریف می‌شد و آن را، رویکرد حداقل نمودن حداکثر[۱۴] نامیدند.

در سال ۱۹۹۹، یوسن اکسیا، بودینگ لی، شویانگ وانگ و لی[۱۵]، در مقاله‌ای تحت عنوان «مدلی برای انتخاب سبد سرمایه‌گذاری با مرتب نمودن نرخ‌های بازده مورد انتظار» به بررسی مسأله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری بهینه، با ارائه مدلی خاص پرداختند. آن‌ها در این مقاله، جهت انتخاب سبد سرمایه‌گذاری بهینه، الگوریتمی را بر مبنای ژنتیک، با استفاده از الگوریتم‌های موجود طراحی کردند. به عبارتی، الگوریتم ژنتیکی آن‌ها، به گونه‌ای طراحی شده بود که براساس اصل انتخاب اصلح (تکامل)، تنها سهامی می‌توانستند در سبد بهینه قرار گیرند که از نظر مطلوبیت توسط سایر سهام حذف نشده باشند و در نهایت، سبد ارائه شده، سهامی را نشان می‌داد که نسبت به سهام موجود تکامل یافته‌تر بودند. در فوریه همین سال (۱۹۹۹) ، چانگ، مید، بیسلی و شارائها[۱۶]، در مقاله‌ای تحت عنوان «ابتکاراتی برای بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری» به ارائه مدلی پارامتریک و غیر خطی جهت بهینه‌سازی سهام پرداختند. آن‌ها نیز پس از ارائه مدل، به دلیل درجه ۲ بودن تابع هدف آن، با مشکلاتی روبه‌رو شدند که آن‌ها را وادار به ارائه الگوریتمی ابتکاری جهت حل آن نمود.

در نوامبر سال ۱۹۹۹، جوناس پالمکویست[۱۷]، استانیسلاو یوریسو[۱۸] و پاولو کروخمال[۱۹] در مقاله‌ای تحت عنوان «بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با محدودیت‌ها و تابع هدف ارزش در ریسک شرطی (CVaR)[۲۰] به ارائه‌ی مدلی از نوع برنامه‌ریزی خطی پرداختند. آن‌ها با ارائه رویکردی جدید به بهینه‌سازی CVaR پرداختند و آن را به صورت‌های مختلفی مورد آزمایش قرار دادند. کار اصلی آن‌ها در این رویکرد، ارائه‌ی تکنیکی جهت محاسبه[۲۱] VaR و به دنبال آن، بهینه‌سازی CVaR می‌باشد. حال آن که در سال ۲۰۰۰، اگریک‌زک[۲۲]، یک مدل برنامه‌ریزی خطی چند معیاره که تمام روش‌های یاد شده را پوشش می‌داد، ارائه داد و تحت عنوان تکنیک‌های مجموعه خاص[۲۳] نام نهاده شد. به دنبال آن در سپتامبر ۲۰۰۲، میگوئل سوسالوبو[۲۴]، مریم فاضل و استیفن بوید[۲۵] در مقاله‌ای تحت عنوان «بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با هزینه‌های معاملات خطی و ثابت»، مدلی را جهت بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری ارائه نمودند. در همین سال (۲۰۰۲)، کریستوس پاپاریستودولو[۲۶] با ارائه مقاله‌ای تحت عنوان «پرتفولیوهای بهینه با استفاده از مدل‌های برنامه‌ریزی خطی» به ارائه‌ی مدل‌های برنامه‌ریزی خطی موجود در این زمینه پرداخت و سپس با طرح مسأله‌ای فرضی متشکل از ۵ نوع سهم و دوره زمانی ۱۲ ماهه به مقایسه سبدهای سرمایه‌گذاری به دست آمده از هر مدل پرداخت. نتایج حاصل از کار وی، این امر را مشخص ساخت که یک شخص می‌تواند، کارهای بیشتری را از آن‌چه فکر می‌کند، با مدل‌های برنامه‌ریزی خطی انجام دهد. وی در این مقاله، با حذف خصوصیات واقعی موجود در مدل اسپرانزا، آن را به یک مدل خطی تبدیل و فواید چنین مدلی را عنوان نمود. هر چند کار وی در جای خود با ارزش است؛ ولی جای بحث و انتقاد فراوان دارد.

در ژانویه ۲۰۰۳، آلکسی کخلاو، استینسلاو یوریسو و میکائیل زابارانکین[۲۷]، در مقاله‌ای تحت عنوان«بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با محدودیت‌های کاهش دهنده»[۲۸] به ارائه مدلی در این زمینه پرداختند. در ژولای ۲۰۰۳، مانسینی، اگریک زک و اسپرانزا در مقاله‌ای تحت عنوان «مدل‌های قابل حل برنامه‌ریزی خطی (LP) جهت بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری: طبقه‌بندی و مقایسه محاسبات» به ارائه و معرفی مدل‌های LP در این زمینه پرداختند و پس از بررسی نتایج به دست آمده از هر کدام، به طبقه‌بندی آن‌ها پرداختند. مهم‌ترین مدل‌هایی که آن‌ها در این مقاله مورد بررسی قرار دادند عبارتند از:

۱. مدل حداکثر حداقل (Maximin) ارائه شده توسط بامول[۲۹] در سال ۱۹۶۴.

۲. مدل برنامه‌ریزی خطی انحراف مطلق از میانگین (MAD) و محدودیت‌های کاهش دهنده که توسط اگریک زک و راسزنیسکی[۳۰] در سال ۱۹۹۹ طراحی شده است.

۳. مدل M-MAD ارائه شده توسط میکالوسکی[۳۱] و اگریک زک در سال ۲۰۰۱.

۴. مدل حداقل حداکثر (Minimax) و بدترین انتظارات شرطی که توسط روکافلار و یوریسو[۳۲] در سال ۲۰۰۰ طراحی شده است.

۵. مدل تفاوت میانگین جینی[۳۳] (GMD) ارائه شده توسط ییتژاکی در سال ۱۹۸۲.

آخرین مدل و راهکار ارائه شده در مورد بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری توسط جاسک گاندزیو و آندریس گروتی[۳۴] در آوریل ۲۰۰۴، در مقاله‌ای تحت عنوان «حل مسایل غیر خطی بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با استفاده از روش نقطه داخلی اولین همزاد[۳۵]» ارائه شد.

در ایران، راعی (۱۳۸۱) در مقاله‌ای تحت عنوان «تشکیل سبد سهام برای سرمایه‌گذار مخاطره‌پذیر: مقایسه شبکه عصبی و مارکوویتز» به مسأله بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری پرداخته است. شاه علیزاده و معماریانی (۱۳۸۲) در مقاله‌ای تحت عنوان «چارچوب ریاضی گزینش سبد سهام با اهداف چندگانه» به بررسی تشکیل سبد سرمایه‌گذاری با استفاده از برنامه‌ریزی آرمانی پرداختند. در مدل ارائه شده عموماً سهم‌های مختلف به نسبتی با یکدیگر مخلوط می‌شوند به طوری که سبد سهام به ازای بازده معین، از کمترین ریسک برخوردار بوده یا به ازای ریسک معین، از بیشترین بازده برخوردار باشد.

۴. معرفی مدل مبنا (اسپرانزا)

در این بخش ضمن ارائه‌ی کامل مدل مبنا، به تشریح آن پرداخته می‌شود و پس از مشخص شدن نقاط قوت و ضعف آن، نتایج حاصل از به کارگیری آن توسط اسپرانزا در بازلر سهام میلان مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱. ۴. مدل مبنا

$$Min z = \frac{\sum_{t=1}^{T} y_t}{T}$$

$s.t:$

$$1)\quad y_t + \sum_{j\in J} (r_{jt} - r_j)x_j \geq 0 \qquad t = 1,\dots,T$$

$$2)\quad \sum_{j\in J} (1+d_j)c_j x_j + \sum_{k\in K} f_k z'_k \geq C_0$$

$$3)\quad \sum_{j\in J} (1+d_j)c_j x_j + \sum_{k\in K} f_k z'_k \leq C_1$$

$$4)\quad \sum_{j\in J} (r_j - \rho - \rho d_j)c_j x_j - \sum_{k\in K} \rho f_k z'_k \geq 0$$

$$5)\quad \sum_{j\in I_k} x_j \leq M z'_k \qquad k \in K$$

$$6)\quad Z'_k \leq M \sum_{j\in I_k} x_j \qquad k \in K$$

$$7)\quad x_j \leq M Z''_j \qquad j \in J$$

$$8)\quad x_j \geq q_j Z''_j \qquad j \in J$$

$$9)\quad \sum_{j\in J} Z''_j \leq N$$

$$Z'_k \in \{0,1\} \quad , \quad k \in K$$

$$Z''_j \in \{0,1\} \quad , \quad j \in J$$

$$10)\quad L_j \leq x_j \leq u_j \qquad j \in J$$

X_j و عدد صحیح $j \in J$

روشی است که در آن:

n: تعداد اوراق بهاداری است که یک سرمایه‌گذار، جهت تشکیل سبد سرمایه‌گذاری خود، مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهد؛

r_{jt}: نرخ بازده پیش‌بینی شده یا مورد انتظار ورقه بهادار j در زمان t؛

r_j: متوسط نرخ بازده هر یک از اوراق بهادار مورد مطالعه، که به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$r_j = \frac{\sum_{t=1}^{T} r_{jt}}{T} \qquad , \qquad t = 1,2,\ldots,T$$

J: اوراق بهاداری که می‌توان آن‌ها را در هر مقداری به دست آورد؛

X_j: برابر است با میزان سرمایه‌گذاری در ورقه بهادار j ؛

t: زمان؛

C_j: هزینه خرید یک واحد معاملات از ورقه بهادار j می‌باشد؛

d_j: هزینه تناسبی معاملات برای هر ورقه بهادار j ؛

I_k: مجموعه‌ای از اوراق بهادار که دارای هزینه ثابت f_k هستند؛

f_k: هزینه ثابت ورقه بهادار k ام؛

Z'_k: متغیری است که محدودیت مربوط به اوراق بهادار دارای هزینه ثابت را به صورت (صفر- یک) بیان می‌کند؛

C_0: حد پایین میزان سرمایه‌گذاری در سبد سرمایه‌گذاری؛

C_1: حد بالای میزان سرمایه‌گذاری در سبد سرمایه‌گذاری؛

Z''_j: متغیری از نوع (صفر – یک) است که برای هر ورقه بهادار $j\in J$ تعریف می‌شود، $\backslash Z''=1$ نشان می‌دهد که ورقه بهادار j در سبد سرمایه‌گذاری قرار دارد و $Z''_j=0$، قرار نگرفتن آن را در سبد سرمایه‌گذاری نشان می‌دهد؛

q_j: یک حد مثبت را روی سرمایه‌گذاری در اوراق بهادار j وضع می‌کند (این متغیر مشابه M عمل می‌کند)؛

$N=|J|$: تعداد اوراق بهاداری است که در سبد سرمایه‌گذاری وجود دارند؛

L_j: حد پایین میزان سرمایه‌گذاری در ورقه بهادار؛

u_j: حد بالای میزان سرمایه‌گذاری در ورقه بهادار؛

ρ_j: نرخ بازده مورد نیاز جهت سرمایه‌گذاری در ورقه بهادار j .

۲. ۴. نقاط قوت مدل مبنا

نقطه قوت اصلی مدل اسپرانزا در مقایسه با مدل‌های پیشین (مارکوویتز، شارپ و...) را، می‌توان، در خطی بودن آن دانست؛ زیرا تا این زمان، هیچ یک از مدل‌های بهینه‌سازی از معادلات درجه یک برای محاسبه انحرافات (ریسک) استفاده نمی‌کردند و اسپرانزا، اولین کسی بود که با محاسبه نیمه انحرافات پایین‌تر از میانگین، به محاسبه ریسک پرداخت و مدل خویش را، بر آن اساس طراحی نمود. مدل وی، می‌تواند از تمامی قدرت و قوت برنامه‌ریزی خطی جهت ارائه‌ی جواب و به روز نمودن آن با استفاده از فن تحلیل حساسیت استفاده کند. نقطه قوت دیگر این مدل، همانا در نظر گرفتن خصوصیات مرتبط با مسأله واقعی می‌باشد؛ بدین معنی که مدل وی، برای تصمیم‌گیرنده می‌تواند به واقعیت نزدیک‌تر باشد، زیرا در طراحی این مدل، محدودیت‌های مسأله به دو گروه محدودیت‌های سخت و نرم[۳۶] قابل تقسیم است. محدودیت‌های سخت به خصوصیات قابل مشاهده مثل هزینه‌های معاملات و حداقل واحدهای معاملات بر می‌گردد؛ در حالی که محدودیت‌های نرم به ترجیحات سرمایه‌گذار بر می‌گردند مثل محدودیت‌های روی حداکثر تعداد اوراق بهادار و یا محدودیت‌های حداقل دارایی‌ها.

۳. ۴. نقاط ضعف مدل مبنا

تنها نقطه ضعف این مدل را می‌توان، در وجود متغیرهای عدد صحیح و (صفر- یک) آن دانست، زیرا وجود چنین متغیرهایی باعث پیچیدگی حل آن می‌گردد. همین امر باعث می‌شود تا وقتی تعداد سهام بیشتری جهت پیدا نمودن سبد بهینه در مدل وارد می‌شود، رایانه نتواند، در بعضی مواقع، در زمان معقول و در بعضی مواقع در زمان نامحدود، جوابی برای آن به دست آورد.

۴. ۴. نتایج اجرای مدل مبنا برای یک مثال واقعی درب بازار سهام میلان

در آزمایش‌های انجام شده از دو دسته داده استفاده شد: داده‌هایی برای دوره (۱۹۸۹-۱۹۸۶) (D_1) و داده‌هایی برای دوره (۱۹۹۰-۱۹۸۷) (D_2). واحد زمانی انتخاب شده در محاسبات ماه بوده؛ و بنابراین، نرخ‌های r_{jt} به صورت

ماهانه محاسبه شده‌اند. برای آزمایش مدل روی هر یک از داده‌های یاد شده، یک وقت محدود ۴۰ دقیقه‌ای برای هر آزمایش اختصاص داده شد.

بعضی از آزمایش‌های با محدودیت‌های زمانی بزرگ‌تر نشان دادند که وقتی یک جواب نهایی در۴۰ دقیقه پیدا نمی‌شود، در زمانی بیشتر نیز اساساً پیدا نمی‌شود. نتایج آزمایش‌ها نشان دادند که زمان محاسبات به مجموعه داده‌ها و نرخ بازده مورد نیاز (مورد انتظار)، بستگی دارد. افزون بر این، هر وقت که تعداد سهام مورد بررسی از ۲۰ بیشتر می‌شد، حل مدل در یک زمان محدود، امکان ناپذیر بود. دلیل ممکنی که می‌توان برای این پدیده عنوان نمود، این است که وقتی تعداد سهام پایین است، الگوریتم به راحتی راه حل‌های عملی (ممکن) را پیدا می‌کند که این، به دلیل کاهش اندازه درخت انشعاب و تحدید در حل مدل می‌باشد.

مشخصات رایانه مورد استفاده در آزمایش‌های اسپرانزا به شرح زیر است:

80486DX Processor and 33 MHZ Clockpulse

ولی آزمایش‌های انجام شده روی مدل مبنا و مدل جدید، در این تحقیق، با ۱۲٪ =ρ، برای یک مثال واقعی با ۲۰ نوع سرمایه‌گذاری و رایانه "Intel Pentium (R) 4 1.80 GHZ" انجام گرفت.

اگر چه حدود زمانی بزرگ‌تر و رایانه‌های قدرتمندتر، می‌توانند این نتایج را بهبود بخشند؛ ولی آن‌چه که از لحاظ شیوه حل در این مدل به روشنی به چشم می‌آید، این است که در تمام موارد، وجود متغیرهای عدد صحیح و (صفر- یک) در این مدل، وقتی که تعداد سهام به یک اندازه واقعی می‌رسد، حل آن را در یک زمان منطقی (قابل قبول) بسیار غیر ممکن می‌سازد. و به همین دلیل، اسپرانزا الگوریتمی ابتکاری جهت رسیدن به جوابی رضایت‌بخش به جای جواب بهینه، طراحی نمود.

۵. بهبود مدل مبنا و معرفی مدل جدید

۱. ۵. تغییرات

در این بخش به دو تغییر اساسی در مدل مبنا (اسپرانزا) که حل مسأله را ساده‌تر می‌کند، اشاره می‌شود.

تغییر شماره ۱: محدودیت‌های ۲ و ۳، به صورت یک محدودیت تلفیق شوند.

$$\sum_{j\in J} (1+d_j)c_j x_j + \sum_{k\in K} f_k z'_k \le C$$

استدلال: همان‌طور که در مدل مبنا، مشاهده می‌شود، سمت چپ هر دو محدودیت، یکسان هستند، در واقع سمت چپ آن‌ها میزان سرمایه‌گذاری در سهام تشکیل دهنده سبد را نشان می‌دهد که به وسیله C_0 و C_1، به ترتیب، حد پایین و بالای میزان سرمایه موجود، محدود می گردند. اختلاف میان C_0 و C_1 بسیار اندک و حدود یک درصد می‌باشد که همین میزان اختلاف به سلیقه، ترجیح سرمایه‌گذار و شرایط موجود بستگی دارد و توسط سرمایه‌گذار تعیین می‌شود؛ ولی این تقسیم‌بندی از لحاظ ریاضی و بر مبنای استدلال یاد شده می‌تواند، بی منطق باشد؛ زیرا همان علامت «کوچک‌تر مساوی» موجود در رابطه یاد شده، میزان سرمایه‌گذاری را (اعم از این که عدد صحیح یا غیر صحیح باشد)، به مقدار C و کمتر از آن محدود می‌کند و در واقع به مدل، این اجازه را می‌دهد که در مواقعی که نتواند به طور کامل از لحاظ عدد صحیح به میزان C (سرمایه در دسترس) برسد، مقداری کمتر و نزدیک به آن را انتخاب نماید.

تغییر شماره۲: عملگر جمع (Σ) در محدودیت‌های شماره ۵ و ۶ حذف گردند.

استدلال: در اصلی‌ترین بحث، اسپرانزا با وارد نمودن خصوصیات واقعی مسأله، f_k را به عنوان هزینه ثابت معاملات به همراه متغیر (صفر- یک) z'_k به سمت چپ محدودیت یاد شده اضافه کرده است که وجود چنین متغیرهایی، باعث می‌شود تا حل مدل به جای روش سیمپلکس به روش انتخاب و تحدید انجام گیرد. محدودیت یاد شده با وارد نمودن هزینه‌های ثابت معاملات به صورت زیر در می‌آید.

$$\sum_{j\in J} (1+d_j)C_j X_j + \sum_{k\in K} f_k z'_k \le C$$

در تشریح این محدودیت، چنین عنوان می‌شود که I_k، مجموعه‌ای از اوراق بهادار می‌باشد که دارای هزینه ثابت f_k هستند و متغیر z'_k را، به این دلیل وارد کرده‌اند که اگر X_j موجود در سبد، متعلق به مجموعه I_k باشد، هزینه ثابت f_k نیز برای آن در نظر گرفته شود و در غیر این صورت z'_k به صفر تبدیل می‌شود و محدودیت به صورت محدودیت شماره ۶ در می‌آید. وجود متغیر (صفر- یک) z'_k باعث به وجود آمدن دو محدودیت زیر می‌گردد.

$$\sum_{j\in J} X_j \le MZ'_k \qquad k \in K$$

$$Z'_k \le M \sum_{j\in J} X_j \qquad k \in K$$

در نامساوی‌های یاد شده M عددی بسیار بزرگ فرض می‌شود.

وجود f_k و به تبع آن z'_k عامل اصلی پیچیدگی حل مسأله به خاطر تغییر شیوه حل مسأله می‌باشد. برای رفع چنین مشکلی به نظر می‌رسد که تشریح ماهیت هزینه‌های ثابت (f_k) راهگشا باشد.

هزینه‌های ثابت: هزینه‌هایی هستند که یک سرمایه‌گذار در خرید سهام یا جهت شرکت در یک سرمایه‌گذاری، بدون توجه به تعداد سهام یا میزان سرمایه‌گذاری انجام شده با آن روبه‌رو می‌گردد. برای نمونه فرض کنید سرمایه‌گذاری می‌خواهد میزانی از سرمایه‌گذاری خود را، در تالار بورس تهران، میزانی را در تالار بورس نیویورک و میزانی را در صنعت ساختمان سرمایه‌گذاری نماید. بنابراین، چنین سرمایه‌گذاری به محض این که بخواهد هر کدام از موارد یاد شده را در سبد خود شرکت دهد با هزینه‌های ثابت آن (ایاب و ذهاب، تماس‌های تلفنی یا اینترنتی، هزینه‌های جانبی قبل از انجام معاملات) روبه‌رو خواهد شد که مسلماً هر کدام هزینه‌های ثابت f_k مخصوص به خود را دارند. K در نامساوی‌های یاد شده، مشخص کننده مجموعه‌هایی از سرمایه‌گذاری می‌باشد که دارای هزینه ثابت می‌باشند و k، نوعی سرمایه‌گذاری را نشان می‌دهد که دارای هزینه ثابت می‌باشد. بدین صورت که $k \in K$ و f_k، نشان دهنده هزینه ثابت k امین نوع مجموعه سرمایه‌گذاری متعلق به k می‌باشد.

در دنیای واقعی این امر امکان‌پذیر نمی‌باشد یا به ندرت اتفاق می‌افتد که مجموعه‌ای از اوراق بهادار، دارای یک میزان هزینه ثابت معاملات باشند؛ بدین معنی که اگر یک نوع از این اوراق در سبد سرمایه‌گذاری قرار گیرد، هزینه ثابت معاملات مجموع آن‌ها نیز لحاظ می‌شود. حتی اگر چنین امری در مورد سهام و اوراق بهادار صادق باشد در مورد سرمایه‌گذاری‌های فیزیکی مانند زمین، ساختمان، ماشین‌آلات و... صدق نمی‌کند. در نتیجه در این قسمت با حذف عملگر جمع ($\sum$)، محدودیت‌های یاد شده به صورت زیر در می‌آیند.

$$\left.\begin{aligned} x_j &\le Mz'_J \\ z'_J &\le Mx_j \end{aligned}\right\} \text{محدودیت‌های ۵ و ۶ در مدل جدید}$$

در سایر محدودیت‌های مسأله، به لحاظ دور شدن جواب‌ها از جواب واقعی، نمی‌توان تغییراتی اعمال نمود.

۲. ۵. معرفی مدل جدید

بنابراین مدل جدید بر اساس راهکارهای ارائه شده به صورت زیر در می‌آید:

$$Minz=\frac{\sum_{t=1}^{T} y_t}{T}$$

$$s.t:$$

$$1)\quad y_t+\sum_{j\in J}(r_{jt}-r_j)\quad x_j\geq 0\quad t=1,...,T$$

$$2)\quad \sum_{j\in J}(1+d_j)c_j x_j+\sum_{j\in J} f_j z'_j\leq C$$

$$3)\quad \sum_{j\in J}(r_j-\rho-\rho d_j)-\sum_{k\in K}\rho f_j z'_j\geq 0$$

$$4)\quad x_j\leq MZ''_j\qquad j\in J$$

$$5)\quad Z'_j\leq Mx_j\qquad j\in J$$

$$6)\quad x_j\geq u_j Z''_j\qquad j\in J$$

$$7)\quad x_j\leq L_j Z''_j\qquad j\in J$$

$$8)\quad \sum_{j\in J} Z''_j\leq N$$

X_j عدد صحیح و $j \in J$

$$Z'_j \in \{0,1\} \qquad , \qquad j \in J$$

$$Z''_j \in \{0,1\} \qquad , \qquad j \in J$$

با وجود این به علت وجود متغییرهای (صفر-یک)، هنوز حل مسأله در عمل، پیچیده است. برای حل این مشکل، روش زیر به عنوان راهکار ابداعی ارائه شده، معرفی می‌گردد.

۶. روش ابداعی

در این بخش، بر اساس نقاط ضعف مدل مبنا در حل، به ارائه راهکاری ابداعی پرداخته و نقطه قوت آن تشریح می‌شود.

وجود متغیر (صفر- یک)، در محدودیت‌های مدل مبنا مشخص می‌کند که هزینه ثابت، اختصاص داده شود یا خیر. همین استدلال می‌تواند مبنایی جهت تقسیم مدل یاد شده به دو نوع مدل برنامه‌ریزی خطی فاقد متغیرهای (صفر- یک) باشد. در مدلی که نوع نامیده می‌شود، تمامی اوراق بهادار و سرمایه‌گذاری‌هایی بررسی می‌شوند که بدون هزینه ثابت f_k هستند. در نتیجه، محدودیت مربوط به سرمایه سرمایه‌گذاری شده به صورت زیر در می‌آید:

$$\sum_{j\in J}(1+d_j)C_j X_j\leq C$$

در مدل نوع، تمامی اوراق بهادار و سرمایه‌گذاری‌هایی که دارای هزینه ثابت f_k هستند، مورد بررسی قرار می‌گیرند؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$\sum_{j\in J}(1+d_j)C_j X_j+\sum_{j\in J} f_j\leq C$$

مدل‌ها در این حالت، بدون داشتن متغیرهای (صفر-یک)، حتی برای تعداد زیاد اوراق بهادار حل می‌شوند. تا این جا می‌توان چنین عنوان نمود که مشکل وجود متغیرهای (صفر- یک) مدل تا اندازه‌ای حل شده است. دو نوع مدل ارائه شده با خصوصیات یاد شده، دو نوع سبد بهینه را ارائه خواهند داد که مجموع آن‌ها مشخص کننده سبد سرمایه‌گذاری بهینه سرمایه‌گذار می‌باشد. بدین صورت که در مدل نوع I تمام سرمایه‌گذاری‌هایی که بدون هزینه ثابت معاملات هستند وارد می‌شود و مسأله با توجه به حداقل تعداد اقلام سرمایه‌گذاری‌های موجود در سبد (محدودیت شماره ۸ مدل ابداعی) حل می‌گردد. در نتیجه مدل نوع I در حالت کلی به صورت زیر می‌باشد.

$$Minz = \frac{\sum_{t=1}^{T} y_t}{T}$$

$s.t:$

$$1)\quad y_t + \sum_{j\in J} (r_{jt} - r_j)x_j \geq 0 \qquad t = 1,\dots,T$$

$$2)\quad \sum_{j\in J} (1+d_j)c_j x_j \leq C$$

$$3)\quad \sum_{j\in J} (r_j - \rho - \rho d_j) \geq 0$$

$$4)\quad x_j \leq u_j Z'_j$$

$$5)\quad Z'_j \geq L_j Z'_j$$

$$6)\quad \sum_{j\in J} Z'_j \leq N$$

X_j و عدد صحیح $\quad j \in J$

در مدل نوع II، تمام سرمایه‌گذاری‌هایی که دارای هزینه ثابت معاملات هستند وارد می‌شود و در این مدل نیز، مسأله با توجه به حداقل تعداد اقلام سرمایه‌گذاری‌های موجود در سبد، حل می‌گردد. مدل نوع II به صورت زیر در می‌آید.

$$Minz = \frac{\sum_{t=1}^{T} y_t}{T}$$

$s.t:$

$$1)\quad y_t + \sum_{j\in J} (r_{jt} - r_j)x_j \geq 0 \qquad t = 1,\dots,T$$

$$2)\quad \sum_{j\in J} (1+d_j)c_j x_j + \sum_{j\in J} f_j \leq C$$

$$3)\quad \sum_{j\in J} (r_j - \rho - \rho d_j) - \sum_{j\in J} \rho f_j \geq 0$$

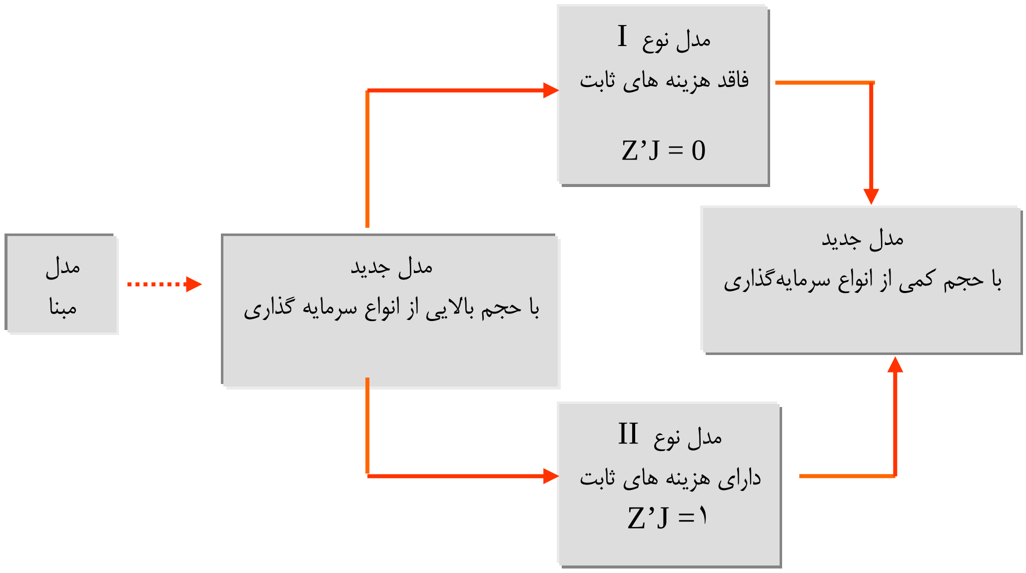
$$4)\quad x_j \leq u_j Z'_j \qquad j \in J$$

$$5)\quad x_j \geq L_j Z'_j \qquad j \in J$$

$$6)\quad \sum_{j\in J} Z'_j \leq N$$

X_j و عدد صحیح $\quad j \in J$

در هر دو مدل یاد شده (I و II)، مسأله به ازای میزان کل سرمایه‌گذاری (C) حل می‌شود. پس از حل مدل‌های یاد شده، اقلام تشکیل دهنده سبد، به عنوان ورودی‌های مدل اصلی قلم‌داد می‌شوند و وارد مدل می‌گردند تا مدل با میزان کمتری از اطلاعات حل گردد. در واقع کار اصلی مدل‌های I و II، پالایش اطلاعات و حذف سرمایه‌گذاری‌های ناکارآمد می‌باشد. وجود آن‌ها باعث می‌گردد تا پیچیدگی‌های مدل جهت حل، با استفاده از کاهش ورودی‌های آن، کاهش یابد. خلاصه مراحل یاد شده در نمودار زیر آورده شده است.



نمودار ۱: خلاصه مراحل راهکار ابداعی

نقطه قوت چنین راهکاری را می‌توان از بین بردن متغیرهای (صفر- یک) مدل و در نتیجه، کاهش زمان حل و به دست آوردن جوابی بهینه در زمانی معقول دانست.

۷. آزمون مدل جدید و تجزیه و تحلیل نتایج آن

در این بخش برای آزمون مدل جدید، همان بازار سهام میلان به عنوان مثال نمونه انتخاب می‌شود به نحوی که نتایج دو مدل و راهکار جدید را بتوان مورد مقایسه قرار داد.

در این مثال، میزان کل سرمایه در دسترس سرمایه‌گذار (C)، ۱۰۰۰۰۰۰۰ ریال و حداقل بازده مورد انتظار سرمایه‌گذار (ρ)، ۱۲ درصد فرض شده است. هم‌چنین فرض شده است که سرمایه‌گذار در هر نوع سهام یا سرمایه‌گذاری، نمی‌تواند بیشتر از ۷۵ درصد کل سرمایه در دسترس سرمایه‌گذاری نماید به لحاظ این که در این نوشته، هدف اصلی، جهت ارائه مدل جدید بر کاهش زمان حل و یا به عبارتی امکان‌پذیر نمودن حل آن در زمانی منطقی و کاهش ریسک سیستماتیک با استفاده از متنوع نمودن سرمایه‌گذاری مبتنی است لذا جهت مقایسه دو مدل، زمان‌های حل و جواب‌های نهایی آن‌ها ثبت گردیدند. در این تحقیق، جهت تعیین زمان‌های حل مربوط به هر آزمون، محقق با استفاده از زمان‌سنج، زمان را از لحظه‌ای که دستور حل به رایانه داده شده تا زمانی که پیغام حل کامل مدل توسط رایانه صادر گردیده، ثبت نموده است که خلاصه نتایج حاصله در جدول ۲ آورده شده است.

۱. ۷. تجزیه و تحلیل و مقایسه زمان‌های حل

همان‌طور که در جدول ۲ نشان داده می‌شود، مدل مبنا برای سهام بیشتر از ۱۱ تا، در زمانی کاملاً غیر منطقی قابل حل است. از سویی اکثر سرمایه‌گذاران سعی می‌کنند، سبد خود را از میان تعداد بسیار زیادی از اقلام سرمایه‌گذاری انتخاب نمایند که معمولاً از ۱۵ تا بیشتر می‌باشد و از سوی دیگر هیچ سرمایه‌گذاری، حاضر نیست یا به ندرت پیدا می‌شود که این مدت زمان را بعد از صرف مدت زمانی لازم برای مدل‌سازی مسأله جهت حل مسأله صرف نماید. بنابراین مدل مبنا از لحاظ میزان زمان حل در دنیای واقعی، دچار اشکال است. نگاهی به نتایج زمانی به دست آمده از مدل جدید نشان می‌دهد که زمان صرف شده برای حل چنین مدلی، در مقایسه با مدل مبنا بسیار ناچیز و از لحاظ سرمایه‌گذار نیز توجیه‌پذیر است. بنابراین جای امیدواری است که چنین مدلی بتواند جانشین مناسبی برای مدل مبنا باشد؛ اما سؤالی که در این‌جا به ذهن هر خواننده‌ای خطور می‌کند، این است که چه عاملی می‌تواند در چنین مدلی باعث کاهش زمان حل تا بدین حد باشد؟ برای پاسخ به این پرسش، لازم است که یک بار دیگر دو مدل موجود (مبنا و جدید) را در کنار هم قرار داد و تفاوت‌ها نشان داده شوند. همان‌طور که نشان داده شده در هر دو مدل،

متغیرها از نوع عدد صحیح و (صفر- یک) می‌باشند؛ بنابراین وجود این متغیرها، تأثیر زیادی روی پیچیدگی حل مدل از لحاظ زمانی نداشته‌اند.

جدول ۲. مقایسه زمان حل و میزان ریسک‌های نامطلوب سبد بهینه در مدل مبنا و مدل جدید (در این جدول (′) علامت دقیقه و (″) علامت ثانیه می‌باشد.)

شماره آزمون	تعداد سهام در هر آزمون	زمان حل		جواب نهایی (میزان ریسک نامطلوب سبدهای بهینه)	
		مدل مبنا	مدل جدید	مدل مبنا	مدل جدید
۱	۵	۱۶″	۱″	۲۳۹/۴۰۷۱	۰/۰۰۱
۲	۶	۵۴″	۱″	۲۴/۲۴۹۰	۰/۰۰۱
۳	۷	۱۷′:۱۸″	۱″	۲۳۹/۴۰۷۱	۰/۰۰۱
۴	۸	۲۲′:۳۳″	۱″	۱۰۳/۵۷۹۲	۰/۰۰۱
۵	۹	۵۲′:۲۲″	۱″	۲۸/۶۶۵۵	۰/۰۰۱
۶	۱۰	۱:۱۴′:۰۰″	۱″	۲۸/۶۶۵۵	۰/۰۰۱
۷	۱۱	۱:۳۵′:۰۰″	۱″	۲۱/۸۳۲۴	۰/۰۰۰۹
۸	۱۲	۵:۲۸′:۰۰″	۱″	۲۱/۸۳۲۴	۰/۰۰۰۹
۹	۱۳	۱۲:۵۷′:۳۰″	۱″	۲۱/۸۳۲۵	۰/۰۰۰۹
۱۰	۱۴	۴۸:۰۰′:۰۰″	۱″	۳۱/۵۱۵۴	۰/۰۰۰۹
۱۱	۱۵	در زمان قابل قبول، امکان‌پذیر نیست	۱″	—	۰/۰۰۰۷
۱۲	۱۶	آزمون انجام نگرفت	۱″	—	۰/۰۰۰۵
۱۳	۱۷	آزمون انجام نگرفت	۱″	—	۰/۰۰۰۵
۱۴	۱۸	آزمون انجام نگرفت	۳″	—	۰/۰۰۰۵
۱۵	۱۹	آزمون انجام نگرفت	۴″	—	۰/۰۰۰۵
۱۶	۲۰	آزمون انجام نگرفت	۶″	—	۰/۰۰۰۵

بر عکس تصور اسپرانزا که پیچیدگی مدل را به وجود متغیرهای عدد صحیح و (صفر- یک) نسبت داده بود. در این نوشته با دید دیگری این پیچیدگی مورد بررسی قرار می‌گیرد. جهت تشریح این امر، لازم است محدودیت‌های شماره ۵ و ۶ مدل مبنا مورد توجه قرار گیرند. این محدودیت‌ها به صورت زیر می‌باشند:

$$\sum_{j\in I_k} x_j \le MZ'_k$$

$$Z'_k \le M \sum_{j\in I_k} x_j$$

در مدل مبنا، اسپرانزا هزینه‌های ثابت را برای مجموعه‌ای از سهام تعریف می‌کند؛ یعنی سهامی را که دارای هزینه ثابت می‌باشد، در مجموعه‌ای به نام I_K قرار می‌دهد. I_k نیز دارای زیر مجموعه‌ای از مجموعه ساختنی می‌باشد که با هم دارای یک هزینه ثابت می‌باشند. در صورتی‌که در مدل جدید، مجموعه‌ای به نام I_k وجود ندارد؛ زیرا در این مدل، اصل بر این است که هر نوع سرمایه‌گذاری دارای هزینه ثابت خاصی است و مفهوم مجموعه، برای این مدل، غیر واقعی می‌باشد. در نتیجه، در حل این مدل، رایانه نیازی به بازیابی اطلاعات از مجموعه‌ای از زیر مجموعه‌ها ندارد. و این امر باعث خواهد شد تا زمان کمتری جهت حل آن صرف شود. عامل دیگر طولانی نمودن حل مسأله را، می‌توان مقدار حداقل بازده مورد انتظار (ρ) دانست؛ که البته این مقدار در این جا ثابت فرض شده است؛ ولی اسپرانزا در آزمایش‌های خود به چنین نتیجه‌ای رسیده بود که با افزایش میزان ρ، مدل در زمان طولانی‌تری حل می‌شود. حداکثر میزانی را که

اسپرانزا توانست در آزمایش‌های خود برای ρ مورد استفاده قرار دهد؛ ۲/۲ درصد بود و به همین دلیل هم توانست در آن زمان (۱۹۹۵) و با آن رایانه، مدل خود را برای (۲۰- ۱۵) نوع سهام حل نماید.

۲. ۷. تجزیه و تحلیل و مقایسه جواب‌های نهایی

همان‌طور که در دو ستون سمت چپ جدول ۲، نشان داده شده، جواب‌های نهایی به دست آمده از مدل مبنا و مدل نهایی، تفاوت آشکاری با هم دارند. ملاحظه می‌شود که جواب‌های مدل مبنا، در مقایسه با مدل جدید، بسیار بزرگ می‌باشند یعنی در واقع سبدی را که مدل مبنا تشکیل می‌دهد، در مقایسه با مدل جدید از ریسک نامطلوب، بسیار بالاتری برخوردار، است. زیرا طبق تعاریفی که در فصول قبل درباره هدف مدل (تابع هدف) ارائه شده، مدل به دنبال تشکیل سبدی بهینه با حداقل‌سازی بازده‌های پایین‌تر از میانگین می‌باشد که از طریق نیمه انحرافات مطلق از میانگین (r_{jt}-r_j) محاسبه می‌شود. به همین دلیل میزان تابع هدف (جواب نهایی) نشان دهنده میزان ریسک نامطلوبی است که سرمایه‌گذار با سرمایه‌گذاری در سبد ارائه شده با آن روبه‌رو می‌گردد.

طبق استدلال یاد شده، بدیهی است که برای سرمایه‌گذار، سبدی که از طریق مدل جدید به دست می‌آید، بسیار مطلوب‌تر می‌باشد. اما پرسش یا بحث مهمی که، ممکن است مطرح شود، این است که چه عامل یا تغییری در مدل باعث به وجود آمدن چنین تفاوت آشکاری شده است. جهت تشریح این موضوع، لازم است که یک بار دیگر محدودیت‌های شماره ۲ و ۳ مدل مبنا و محدودیت شماره ۲ متناظر با آن در مدل جدید مورد بررسی قرار گیرند.

محدودیت‌های ۲ و ۳ در مدل مبنا به صورت زیر می‌باشند:

$$\sum_{j\in J} (1+d_j)c_j x_j + \sum_{k\in K} f_k z'_k \geq C_0$$

$$\sum_{j\in J} (1+d_j)c_j x_j + \sum_{k\in K} f_k z'_k \leq C_1$$

اسپرانزا در تشریح مدل خویش، جهت تخصیص سرمایه در دسترس به سرمایه‌گذاری، به معرفی C_0 و C_1 به ترتیب حد پایین و حد بالای سرمایه‌گذاری، به جای C (میزان سرمایه در دسترس) پرداخته است. در واقع، C_0 از ضرب C در یک مقدار α که توسط سرمایه‌گذار تعریف می‌شود (وی این مقدار را ۱۰ درصد تعریف نموده است)، به دست می‌آید و C_1 نیز حد بالای سرمایه‌گذاری یا همان میزان سرمایه در دسترس را نشان می‌دهد.

فرض کنید میزان سرمایه در دسترس (C) برابر ۱۰۰۰۰۰ ریال و $\alpha = ۰/۱$ باشد در این صورت محدودیت‌های مربوطه به صورت زیر خواهند بود.

$$\sum_{j\in J} (1+d_j)c_j x_j + \sum_{k\in K} f_k z'_k \geq 100000(1-\alpha)$$

$$\sum_{j\in J} (1+d_j)c_j x_j + \sum_{k\in K} f_k z'_k \leq 100000$$

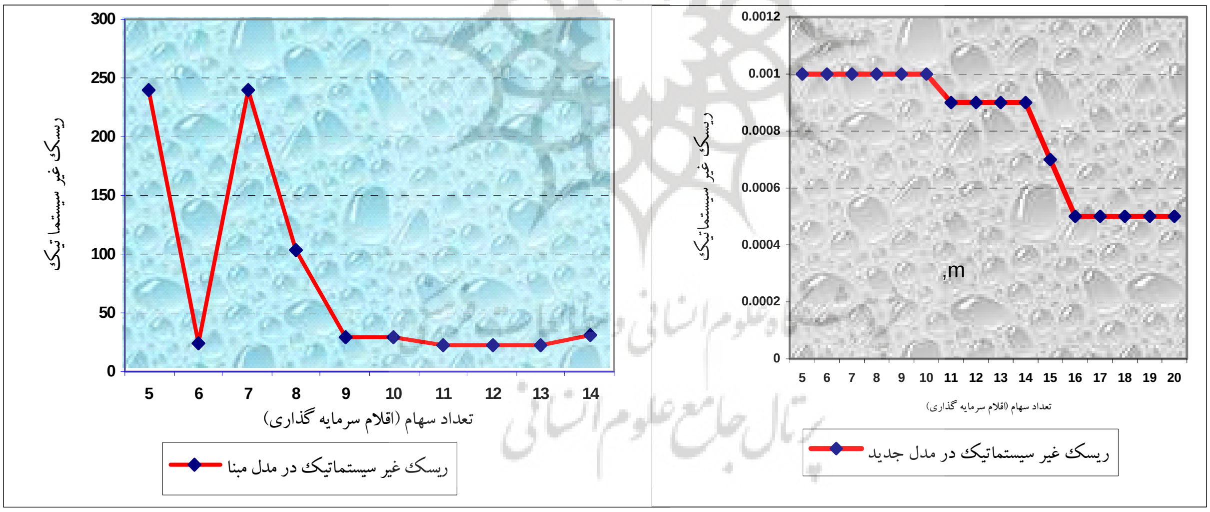
در واقع، محدودیت شماره ۲، به مدل این الزام را وارد می‌کند که باید حداقل میزان ۹۰۰۰۰ ریال از سرمایه موجود سرمایه‌گذاری شود. همین الزام باعث می‌شود که مدل نتواند در صورتی که ترکیب مناسبی با حداقل ریسک نامطلوب وجود نداشته باشد، ترکیبی را ارائه ندهد یا سرمایه کمتری را به کار گیرد. در نتیجه، همین امر باعث تشکیل سبدی بهینه، ولی نامطلوب (از لحاظ ریسک) می‌گردد. از آن جا که در دنیای سرمایه‌گذاری، در بسیاری از مواقع، سرمایه‌گذاری نکردن سودآورتر است، لذا وجود چنین قیدی در دنیای واقعی، نمی‌تواند راهنمای مناسبی برای سرمایه‌گذاران به خصوص سرمایه‌گذاران ریسک گریز باشد. محدودیت شماره ۲، در مدل جدید، در واقع؛ همان محدودیت شماره ۳، مدل مبنا می‌باشد. در مدل جدید، با حذف الزامی که در مدل مبنا روی حداقل میزان سرمایه‌گذاری وجود داشت، محدودیت شماره ۲ در واقع، مدل را در تخصیص سرمایه موجود تا حداکثر میزان سرمایه موجود (C) آزاد گذاشته تا بنابر شرایط و با توجه به نرخ بازده و ریسک سهام و سرمایه‌گذاری‌های موجود، سبدی بهینه را تشکیل دهد که ضمن داشتن حداقل ریسک نامطلوب، به دنیای واقعی نزدیک‌تر باشد.

۳. ۷. تجزیه و تحلیل ریسک غیر سیستماتیک در مدل مبنا و مدل جدید

ریسک غیر سیستماتیک (ریسک کاهش‌پذیر) با متنوع نمودن سرمایه‌گذاری قابل کاهش است و از لحاظ تئوریک نیز بیشتر تحلیل‌گران مالی اعتقاد دارند که متنوع‌سازی تا میزان (۲۰- ۱۵) نوع سرمایه‌گذاری، باعث کاهش ریسک غیر سیستماتیک و بالاتر از این میزان تأثیر چندانی نخواهد داشت و یا به عبارتی بی اثر است. بنابراین در دنیای سرمایه‌گذاری اگر سرمایه‌گذار، بتواند از بین گزینه‌های سرمایه‌گذاری موجود، سبدی را تشکیل دهد که حدود (۲۰-۱۵) یا کمتر را شامل شود، می‌تواند به نسبت، ریسک غیر سیستماتیک را کاهش دهد. بر پایه همین استدلال، در مدل مبنا و مدل جدید، متغیر (صفر- یک) z''_j جهت شمارش تعداد اقلام سبد و محدود نمودن آن به میزان مشخصی که به روش معمول کمتر از ۲۰ می‌باشد، اضافه گردیده است. محدودیت متناظر به صورت زیر می‌باشد.

$$\sum_{j\in J} Z''_j \le N$$

هر چند که این محدودیت در هر دو مدل، یکسان و مشابه می‌باشند؛ ولی از لحاظ عملی و دنیای واقعی، در مدل جدید کاربردی‌تر و مشخص‌تر می‌باشد؛ زیرا در مدل مبنا، سرمایه‌گذار فقط می‌توانند از بین (۱۴ الی ۱۵) نوع سرمایه‌گذاری به انتخاب سبد سرمایه‌گذاری بپردازد (حل مدل برای این میزان و بیشتر از آن در زمانی منطقی امکان‌پذیر نیست). در حالی که در مدل جدید، می‌توان تعداد بیشتری از انواع سرمایه‌گذاری را مورد بررسی قرار داد. همان‌طور که به تفصیل عنوان شده، بر اساس راهکار ابداعی ارائه شده می‌توان تا اقلام زیادی از انواع سرمایه‌گذاری را جهت انتخاب سبدی بهینه مورد بررسی قرار داد. ریسک غیر سیستماتیک، در هر دو مدل، به صورت نزولی کاهش می‌یابد. ولی همان‌طور که در نمودار مقایسه‌ای ۲ نشان داده شده، مدل جدید ریسک غیر سیستماتیک را به میزان قابل توجه‌تری کاهش می‌دهد.



نمودار ۲: مقایسه کاهش ریسک غیر سیستماتیک در مدل مبنا و مدل جدید.

۸. نتیجه‌گیری

در این بخش با نگاهی کلی به مدل جدید و راهکارهای آن، نتایج به دست آمده ارائه می‌گردند.

۱. ۸. راهکارهای مدل جدید

نگاهی به زمان‌های حل، در مدل جدید نشان می‌دهد که از اقلام سرمایه‌گذاری ۱۸ به بالا، کم‌کم حل مدل زمان‌بر می‌شود و این زمان، به صورت صعودی افزایش می‌یابد و این احتمال نیز وجود دارد که با افزایش اقلام سرمایه‌گذاری، مورد بررسی این زمان به جایی برسد که حل مدل را در زمانی منطقی امکان‌ناپذیر نماید. اگر چنین اتفاقی بیفتد این مدل نیز در دنیای واقعی ناکارآمد خواهد بود. زیرا هر چه سرمایه‌گذار، بتواند سبد خود را از میان گزینه‌های بیشتری از اقلام سرمایه‌گذاری تشکیل دهد، هزینه فرصت کمتری خواهد داشت و سبد به دست آمده نیز

کارآمدتر خواهد بود. از طرفی، عمده‌ترین نقطه ضعف مدل مبنا، نیز بر همین اساس قرار دارد که مدل یاد شده نمی‌تواند سرمایه‌گذار را در دنیای واقعی به انتخاب سبدی بهینه از میان سرمایه‌گذاری‌های مختلف راهنمایی نماید. بدین لحاظ بر اساس نتایج به دست آمده و بر پایه تجزیه و تحلیل‌های انجام گرفته، محدودیت‌های شماره ۲ و ۳ در مدل مبنا مشکل‌زاترین محدودیت‌ها از لحاظ زمان و جواب نهایی تشخیص داده شده و از آن جایی که وجود هزینه‌های ثابت در این محدودیت باعث طولانی‌تر شدن زمان حل می‌گردند؛ راهکار ابداعی به گونه‌ای ارائه گردیده تا بتواند مدل جدید را، در هنگامی که با اقلام زیادی از گزینه‌های سرمایه‌گذاری روبه‌رو می‌گردد به دو زیر مدل I و II تقسیم نماید در نتیجه، وجود چنین راهکاری باعث می‌شود تا سرمایه‌گذار بتواند در دنیای واقعی اقلام زیادی از انواع سرمایه‌گذاری را به راحتی در تشکیل سبد بهینه خود مورد بررسی قرار داده از میان آن‌ها میزان معقولی را (از لحاظ ریسک غیر سیستماتیک) با مشخص نمودن میزان N در سبد خود قرار دهد.

۲. ۸. نتیجه‌های دیگر

۱. مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی را، می‌توان به گونه‌ای تعمیم داد تا بتوانند ضمن لحاظ نمودن شرایط دنیای واقعی، سرمایه‌گذار را، در اخذ تصمیمات سرمایه‌ای خویش یاری دهند. بنابر آن‌چه در این تحقیق حاصل شده است، برنامه‌نویسی مسایل انتخاب سهام در قالب برنامه‌ریزی ریاضی، به چگونگی و نحوه نگرش سرمایه‌گذار به دنیای سرمایه‌گذاری بستگی دارد و این امر به وسیله محدودیت‌هایی که ترجیحات سرمایه‌گذار را منعکس می‌کنند، قابل اجرا می‌باشد. سایر عوامل نیز که در دنیای سرمایه‌گذاری معلوم، مشخص و تعریف شده هستند نیز به عنوان ساختار اصلی مدل مطرح و جزو محدودیت‌های اصلی (سخت) قرار می‌گیرند. در نتیجه، محققان و سرمایه‌گذاران به راحتی با داشتن دانش مدیریت مالی و سرمایه‌گذاری می‌توانند برنامه‌نویسان تحقیق در عملیات را در ساخت مدلی ریاضی جهت بهینه‌سازی تصمیمات مالی یاری دهند.

۲. میزان ریالی یا عددی سرمایه‌گذاری بهینه را در هر یک از اقلام (دارایی‌های) تشکیل دهنده سبد سرمایه‌گذاری، با در نظر گرفتن نرخ بازده مورد انتظار و حداقل ریسک با استفاده از مدل‌های برنامه‌ریزی خطی می‌توان تعیین نمود.

۳. تعداد اقلام دارایی‌های موجود در یک سبد سرمایه‌گذاری بهینه نیز با استفاده از مدل‌های برنامه‌ریزی خطی با در نظر گرفتن عوامل تأثیرگذار و ترجیحات سرمایه‌گذار، قابل تعیین است.

۴. اعمال تغییر داده‌ها و به دست آوردن سبد سرمایه‌گذاری جدید با توجه به تغییرات محیطی انجام پذیر است.

۵. تحلیل حساسیت روی مسأله خطی شده، دامنه وسیع‌تری از اطلاعات را برای تصمیم‌گیری سرمایه‌گذاران ارائه می‌دهد.

۶. بر اساس تحلیل‌های انجام شده، مدل کاربردی ارائه شده نسبت به مدل مبنا دارای قابلیت‌های بیشتری است.

یادداشت‌ها

1. Speranza.
2. Windows Quantitative Systems For Business
3. Single Index Model
4. Multi Index Model
5. Chen, Roll & Ross
6. Berry, Bormeister, Mcelroly & Edwin
7. Salomon
8.Yitzhaki
9. Gini’s Mean Difference
10. Konno & Yamazaki
11. Speronza And Mansini
12. Minimum Transaction Lots

13. Young
14. Minimax
15. Yusen Xia, Baoding Liu, Shouyang Wang And K.K. Lai
16. Chang, Meade, Beasley And Sharaiha
17. Jonas Palmquist
18. Stanislav Uryasev
19. Pavlo Krokhmal
20. Conditional Value – At - Risk
21. Value – AT - Risk
22. Ogryczak
23. Special Aggregation Techniques
24. Miguel Sousa Lobo
25. Maryam Fazel, Stephen Boyd
26. Christos Papahristodoulou
27. Alexei Chekhlov, Stanislav Uryasev, Michael Zabarankin
28. Drawdown
29. Baumol
30. Ogryczak And Ruszczynski
31. Michalowski
32. Rockafellar And Uryasev
33. Gini Mean Difference
34. Jacek Gondzio, Andreas Grothey
35. Primal – Dual Interior Point Method
36. Hard & Soft Constraints

منابع

الف. فارسی

راعی، رضا. (۱۳۸۱). *تشکیل سبد سهام برای سرمایه‌گذار مخاطره‌پذیر: مقایسه شبکه‌های عصبی و مارکوویتز*، **پیام مدیریت**، ۲، ۲، ۹۶-۷۸.

شاه علیزاده، محمد و معماریانی، عزیزاله. (۱۳۸۲). *چارچوب ریاضی گزینش سبد سهام با اهداف چندگانه*، **بررسی‌های حسابداری و حسابرسی**، مجله دانشکده مدیریت دانشگاه تهران.۳۲، ۱۰۲-۸۳.

ب. انگلیسی

Borsa Italiana.Monthly Key Figures. (2003). **http//www.Borsaita.It/It/Mercati/ Hompage/Monthly Key Figures.**

Chang, T.; Meade, T.; Beasley, J.E. & Sharaiha, Y.M. (2000). Heuristics for Cordinary Gonstrained Portfolio Optimization. **Computer & Operations Research**, 27. 1271-1302.

Chekhlov, Alexei; Uryasev. Stanislav & Zabarankin, Michael. (2003). Portfolio Optimization with Drawdown Constraints. **http://www.Ise.Ufl.Edu/Uryasev/ Drawdown. Pdf.**

Dobbins, Richard.; Witt. Stephen, F. & Fielding, John. (1994). Portfolio Theory and **Investment Management.** (2 nd ed). Massachusetts: Blackwell Publishers.

Elton, J.; Edwin & Grubr, J.; Martin. (1995). *Simple Criteria for Optimal Portfolio Selection*, **Journal of Finance,** 31 (5). 1341-1357.

Gondzio, Jacek. & Grothey, Andreas. (2004). *Solving Nonlinear Portfolio Optimization Problems with the Primal – Dual Interior Point Method*, **http://www.Maths.Ed.Ac. Uk/Preprints.**

Konno, H. & Yamazaki, H. (1991). *Mean – Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Application to Tokyo Stock Market*, **Management Science,** 37, 519-531.

Lobo, Sousa Miguel.; Fazel, Maryam. & Boyd, Stephen. (2002). **Portfolio Optimization with Linear and Fixed Transaction Costs.** California Institue of Technology.

Mansini, R. & Speranza, Speranza, M. G. (1997). *Heuristic Algorilhms for The Portfolio Selection Problem with Minimum Transaction Lots*, **European Journal of Operational Research,** 114. 219-233.

Mansini, R., Ogryczak. Wlodzimierz. & Speranza, M.G. (2003). *LP Solvable Models for Portfolio Optimization: A Classification and Computational Comparison*, **IMA Journal of Management Mathematics,** 14. 187-220.

Markowitz, H. (1952). *Portfolio Selection*, **Journal of Finance,** 7, 77-91.

Palmquist, Jonas.; Uryasev, Stanislav & Krokhmal, Pavlo. (1999). Portfolio Optimization with Conditional Value – At – Risk Objective And Constraints. **Research Report,** 14-99.

Papahristodoulou, Christos. (1999). *Optimal Portfolio Using Linear Programming Models*, **http://www.Optimization-Online.Org/DB_FILE/2002/10/549.Pdf**.

Speranza, M. Grazia. (1995). *A Heuristics Algorithm for A Portfolio Optimization Model Applied To the Milan Stock Market*, **Computer & Ops Res,** 5,. 433-441.

Xia, Yusen.; Liu, Baoding., Wang, Shouyang. & Lai, K.K. (1999). *A Model for Portfolio Selection with Order of Expected Returns*, **Computers & Operations Research,** 27, 409-422.

Young, M.R. (1998). *A Minimax – Portfolio Selection Rule with Linear Programming Soulotion*, **Management Science,** 44. 673-683.