رده‌های نامتناهی

(بینهایت در ریاضیات محض و عملی)

غلامرضا یاسی‌پور

این شرح بینهایت کز زلف یار گفتند
حرفی است از هزاران کاندر عبارت آمد
«حافظ»

غالباً به ما گفته می‌شود که ریاضیات محض و ریاضیات عملی دشمن یکدیگرند. این گفته راست نیست. ریاضیات محض و عملی دشمن یکدیگر نیستند، ریاضیات محض و عملی هیچگاه دشمن یکدیگر نخواهند بود، ریاضیات محض و عملی هیچگاه نمی‌توانند دشمن یکدیگر باشند، زیرا که در حقیقت هیچ چیز مشترک بین آنها وجود ندارد.
«داوید هیلبرت»[1]

پیش از ورود به مطلب مورد نظر یعنی رده[2]ها یا مجموعه[3]های نامتناهی[4] یا بینهایت[5] به ذکر دو داستان می‌پردازیم. داستان اول از دو شریفزادهٔ مجار حکایت می‌کند که روزی با هم شرط بستند هر یک بزرگترین عدد را بگوید برنده باشد.

اولی گفت: اول تو بگو

و دومی پس از آنکه چند دقیقه مغز خود را سخت به کار انداخت بزرگترین عددی را که به خاطرش خطور کرد بر زبان آورد: «سه».

نوبت به اولی رسید. پس از یک ربع فکر کردن سپرانداخت و گفت: «شرط را بردی».

داستان دیگر داستان مهمانخانه‌ای است که بر خلاف مهمانخانهٔ مهمانکش[6] نه تنها مهمان خود را نمی‌کشد که وی را نمی‌راند و با آنکه در تمام اتاقهای آن مهمان است باز هم مهمانان تازه را ـ حتی اگر تعدادشان بینهایت باشد ـ در اتاقهای خود جای می‌دهد. داستان از این قرار است:

فرض می‌کنیم مهمانخانه‌ای تعداد محدود و معینی اتاق داشته باشد که همه اشغال شده باشند. مهمان تازه‌ای سر می‌رسد و اتاقی می‌خواهد. مهمانخانه‌دار می‌گوید: خیلی معذرت می‌خواهم همهٔ اتاقهای ما گرفته شده است. حال فرض می‌کنیم مهمانخانه‌ای بینهایت اتاق داشته

۱- از کتاب یک، دو، سه، بینهایت؛ تألیف ژرژگاموف، ترجمهٔ احمد بیرشک.

2. Class 3. Set 4. Infinite 5. Infinity

۶- این داستان در ادبیات فارسی به گونه‌های مختلف آمده است و مثلاً در مثنوی معنوی‌در دفتر سوم تحت عنوان «صفت آن مسجد که عاشق کش بود و آن عاشق مرگ‌جوی لاابالی که درو مهمان شد» چنین بیان شده است که:

یک حکایت گوش کن ای نیک پی — مسجدی بد بر کنار شهر ری
هیچکس در وی نخفتی شب زبیم — که نه فرزندش شدی آن شب یتیم
بس که اندر وی غریب عور رفت — صبحدم چون اختران در گور رفت
خویشتن را نیک از این آگاه کن — صبح آمد خواب را کوتاه کن...

باقی ماجرا را در دفتر سوم مثنوی نیکلسون صفحهٔ ۲۲۳ بخوانید.

باشد که باز همه اشغال شده باشند؛ باز هم مهمان تازه‌ای فرا می‌رسد و اتاقی می‌خواهد. مهمانخانه‌دار می‌گوید: با کمال میل، اطاعت می‌کنم. بعد کسی را که در اتاق شمارهٔ ۱ است به اتاق شمارهٔ ۲ و آن را که در اتاق شمارهٔ ۲ است به اتاق شمارهٔ ۳ و شاغل اتاق شمارهٔ ۳ را به اتاق شمارهٔ ۴ و به ... همین ترتیب همه را جا به جا می‌کند و اتاق شمارهٔ ۱ را به تازه وارد می‌دهد.

حال فرض می‌کنیم در مهمانخانه‌ای که بینهایت اتاقِ اشغال شده داشته باشد ،بینهایت مهمان جدید وارد شوند و اتاق بخواهند. مهمانخانه‌دار می‌گوید: به چشم، لطفاً چند دقیقهٔ تأمل بفرمایید. بعد شاغل اتاق ۱ را به اتاق ۲، شاغل اتاق ۲ را به اتاق ۴، شاغل اتاق ۳ را به اتاق ۶ می‌برد و همه را به همین نحو جا به جا می‌کند. در نتیجه همهٔ اتاقهای شمارهٔ طاق خالی می‌شوند و مهمانهای تازه وارد در آنها جای می‌گیرند.[۷]

بحث دربارهٔ بینهایت یکی از جنبه‌های خاص ریاضیات و سرچشمهٔ اصلی نزاع آن است.

در تاریخ ریاضیات نزاعی را که از کشف اعداد گنگ[۸] برخاست ملاحظه کرده‌ایم. در واقع طرد اعداد گنگ توسط یونانیان تنها قسمتی از طرد عمومی جریانات نامتناهی بوده است. غالب ریاضیدانها تا اواخر قرن نوزدهم در پذیرش بینهایت به عنوان چیزی بیش از امکانی بالقوه، اکراه داشتند. بینهایت بودن یک جریان، دسته، یا مقدار به عنوان امکان ادامهٔ نامشخص آن و نه بیشتر و محققاً نه به صورت امکان تکمیلی نهایی، در نظر گرفته می‌شد. به عنوان مثال، اعداد طبیعی ۱، ۲، ۳، .... را می‌توان به عنوان بینهایتی بالقوه [۹] ـ حاصل از ۱ با استفاده از جریان افزودن ۱ ـ بدون پذیرش اینکه تمامیت کامل[۱۰] شدهٔ {...، ۳، ۲، ۱}ی موجود است، پذیرفت.

این مطلب در مورد هر دنبالهٔ[۱۱] x_1، x_2، x_3، ... (مثلاً، از اعداد گویا[۱۲]) که در آن x_{n+1} با استفاده از قاعدهٔ معینی[۱۳] از x_n به دست آمده باشد، نیز برقرار است.

با این همه، هنگامی که x_n به حد «x ی» میل می‌کند،امکانی اغفال کننده رخ می‌دهد. اگر x موردی باشد که آن را قبلاً، مثلاً، به دلایل هندسی، پذیرفته باشیم، در این صورت بسیار وسوسه کننده است‌که x را به عنوان «تکمیل»ی از دنبالهٔ x_1، x_2، x_3، ... در نظر بگیریم. به نظر می‌رسد یونانیان از گرفتن ،چنین نتایجی بیمناک بوده‌اند. طبق روایات، آنان از پارادکسهای زنون[۱۴]، در حدود ۴۵۰ ق. م. به هراس درشده بودند.

استدلالهای زنون را تنها از طریق ارسطو، که آنها را در طبیعهٔ[۱۵] خود، به منظور ردّ کردنشان نقل می‌کند، می‌شناسیم و مقصود خود زنون در این مورد مشخص نیست. فی‌المثل، آیا گرایشی به تفکر در مورد بینهایت، که او آن را خطا می‌شمرده، موجود بوده است؟ استدلالهای او در این مورد به قدری افراطی است‌که می‌توانند به تقریب ،تقلیدی از استدلالهای سست در مورد بینهایت، که در میان معاصرانش رایج بوده است، باشد. اولین پارادوکس او را، موسوم به دو حالتی بودن[۱۶]، بررسی می‌کنیم:

حرکت وجود ندارد، زیرا چیزی که حرکت می‌کند باید پیش از رسیدن به انتها (ی مسیر) به وسط آن برسد (ارسطو، طبیعه، کتاب VI، فصل ۹)

احتمالاً استدلال کامل در این مورد چنین است‌که شخص قبل از رسیدن به جایی باید به $\frac{1}{2}$ مسیر آنجا برسد و قبل از آن به $\frac{1}{4}$ مسیر و پیش از آن به $\frac{1}{8}$ مسیر و همین طور الی غیرالنهایه. تقسیم این دنبالهٔ مراحل نامتناهی، دیگر به نظر بسیاری از ریاضیدانها غیر ممکن نیست؛ زیرا دنبالهٔ مزبور ، چیزی را بیش از مجموعه‌ای نامتناهی[۱۷] از نقاط داخل در فاصله‌ای متناهی[۱۸] ، نمایش نمی‌دهد و با این همه باید یونانیان را به هراس افکنده باشد، زیرا آنها در جمیع اثباتهایشان احتیاط بسیار می‌کردند که از بینهایتهای تمام[۱۹] و حدود[۲۰] اجتناب کنند.[۲۱]

۷- مرجع پیشین، در همین مرجع میخوانیم: تعداد اعداد صحیح و کسری بینهایت مرتبهٔ اول است، تعداد نقاط واقع بر یک خط که از آن بزرگتر است بینهایت مرتبهٔ دوم است، و تعداد جمیع خمهایی که به تصور درآیند (با در نظرگرفتن شکلهایی که هیچ متداول نیستند) که از این هم بزرگتر است بینهایت مرتبهٔ سوم است. و چون تاکنون بینهایت با مرتبهٔ بزرگتری شناخته نشده است وضع ما با وضع آن دو شریفزادهٔ مجارکه بیش از ۳ نمی‌دانستند چندان فرقی ندارد.

۸- بعد از آنکه فیثاغورس قضیهٔ مشهور خود در مثلث قائم‌الزاویه را به اثبات رساند: مربع وتر برابر است با مجموع مربعات دو ضلع زاویهٔ قائمه. عددی ظهور کرد که برابر نسبت دو عدد صحیح نبود. این عدد که طول وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی به طول ساق یک واحد بود همان است که امروز به صورت $\sqrt{2}$ نمایش داده می‌شود. یکی از قدیمترین اثباتها، در مورد اینکه $\sqrt{2}$ برابر نسبت دو عدد صحیح یا کسر $\frac{p}{q}$ نیست، توسط ارسطو و با استفاده از برهان خلف داده شده است.

9. Potential infinity
10. Completed totality
11. Sequence
12. Rational numbers
13. Definite rule
14. Paradoxes of Zeno
15. Physics
16. Dichotomy
17. Infinite set
18. Finite interval
19. Completed infinities
20. Limits

۲۱- از مقالهٔ: *بینهایت در ریاضیات یونانی* مجلهٔ آشنایی با ریاضیات جلد ۳۸.

در اینجا برای اینکه هم تفریحی کرده باشیم هم کمی از ریاضیات محض دور شده به ریاضیاتی از یک جنبه عملی بپردازیم و با این همه گوشهٔ چشمی هم به‌مطالب فوق داشته باشیم و با روش کار ریاضی در طرح مسائل مربوط به بینهایت آشنا شویم به هوس شکار شیر این سؤال را مطرح می‌کنیم که ریاضیدان چگونه شیر را در صحرا شکار می‌کند؟

کلیترین‌روش شکار شیر،روش فیزیکی ـ تجربی است. این روش بقدری ساده است که هر تازه کاری می‌تواند، بدون هیچ زحمتی، آن را به کار ببرد. فیزیکدان تجربی، صحرا را با همهٔ آنچه که در آن است در غربال می‌ریزد و الک می‌کند، آنچه که از شبکهٔ غربال بیرون می‌ریزد صحرا و آنچه که در غربال باقی می‌ماند شیر است.

ولی ریاضیدان اینطور استدلال می‌کند:

دو حالت وجود دارد.

حالت اوّل: شیر خوابیده است.

قبل از همه قفسی آماده می‌کنیم که از پایین باز، و اندازهٔ آن بزرگتر از شیر باشد. سپس صحرا را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. شیر دست کم دریکی از این دو قسمت است (اگر شیر روی خط تقسیم خوابیده باشد، این طور به حساب می‌آوریم که در هر دو قسمت صحرا قرار گرفته است.) به این ترتیب با نصف صحرا سروکار داریم. این قسمت را دوباره طوری به دو نیمه تقسیم می‌کنیم که شیر در یکی از آنها قرار گرفته باشد. اگر این نصف کردن (ها) را ادامه دهیم، مرتباً با قطعه‌های کوچکتری از صحرا سروکار پیدا می‌کنیم. دیر یا زود، یکی از قطعه‌ها کوچکتر ازقاعدهٔ قفس می‌شود. شیر هم در همین قطعه است. قفس را در همین قطعه می‌گذاریم ـ و شیر شکار شده است.

حالت دوم: شیر در صحرا می‌دود.

در این حالت روشمان قابل استفاده نیست.

پایان حل مسأله.[۲۲]

در اینجا پیش از ادامه دادن به موضوع مورد بحث به این نکته اشاره می‌کنیم که: ریاضیات ادعای عرضه کردن حقایق مطلق را ندارد. پیام ریاضیات همیشه بسیار ساده و از این نوع است. «اگر ... آنگاه...». مثلاً هنگامی که ریاضیدانی می‌خواهد اطلاع دهد چیزی را دربارهٔ نقطه‌ها و خطها ثابت کرده است، چنین مطرح می‌کند:

من نمی‌دانم شما شکلهای هندسی را چه گونه پیش خود تصور می‌کنید. بنا به تصور من دربارهٔ آنها، از هر نقطه می‌توان یک خط راست عبور داد. آیا این با تصور شما مطابقت دارد؟

اگر در برابر این پرسش، پاسخی مثبت بشنود و تنها در چنین حالتی به خود حق می‌دهد دنبال صحبت خود را بگیرد:

من چیزی را ثابت کرده‌ام و در روند استدلال از هیچ خاصیت دیگر نقطه و خط راست، جز آنچه که تو با من موافقت کردی، استفاده نکرده‌ام، بنابر این تو حرف مرا می‌فهمی، ولواینکه دربارهٔ تصورهای دیگری که از نقطه و خط راست دارم با من موافق نباشی.[۲۳]

اکنون به بحث مورد نظرمان بازمی‌گردیم، اما پیش از آن اندکی به تاریخ ریاضیات در این مورد بخصوص نظر می‌افکنیم:

مشکلات *فیثاغورس* دربارهٔ ریشهٔ عدد دو و ایرادات *زنون* بر مسئلهٔ اتصال (یا تقسیمات بینهایت) تا آنجا که مـی‌توانیم قضاوت کنیم ،مبدأ تفرقه‌ای استکه در ریاضیات عصر حاضر به وجود آمده‌است. ریاضیدانان امروز که توجهی به فلسفهٔ مسائل مورد علاقهٔ خویش یا به اساس دانش خویش پیدا کرده‌اند لااقل به دو فرقهٔ متمایز تقسیم شده‌اند و در مورد روش استدلالهایی که در *آنالیز ریاضی*[۲۴] به کار می‌رود در وضع حاضر به صورت وضوح امکان آشتی مابین این دو فرقه وجود ندارد.

می‌توان به آسانی مبادی این اختلافات را به قرون وسطی و از آنجا به دوران عتیق یونانی رسانید. در تمام ادوار تکامل ریاضیات ،همهٔ گروه های متخالف نماینده‌ای در این بحث و جدال داشته‌اند ؛اعم از اینکه این ایرادات به صورت مشکلات تحریک‌آمیز زنون ظاهر شده باشد یا به صورت نکته گوییهای منطقی برخی از خشم انگیزترین فلاسفه و منطقیون قرون وسطی باشد.

ریاضیدانان معمولاً این اختلاف نظر را به اختلاف نوع تصور و ادراک نسبت می‌دهند: هرگونه کوششی به منظور اینکه آنالیزدان معتقدی مانند *وایراشتراس*[۲۵] را به سوی شک و تردید *کرونکر*[۲۶] متمایل سازیم همان قدر بیهوده است که بخواهیم مسلمان مؤمنی را تبدیل به موجود لامذهبی کنیم.

مستخرجاتی چند که از رؤسای بزرگ اختلافات در اینجا نقل می‌کنیم ،می‌توانند به عنوان مهیج (یا مسکن، بر حسب سلیقه‌های مختلف) شور و احساس ما در قبال

۲۲- این قسمت را از کتاب *بازی با بینهایت* تألیف *روزاپتر* ترجمهٔ *پرویز شهریاری* برداشته‌ایم.

۲۳- مرجع پیشین.

24. Mathematical analysis

25. Weierstrass

26. Kronecker

فعالیت غیر عادی *کانتور*[27] به کارروند که «تئوری مثبت بینهایت» او موجب ایجاد شدیدترین و خشم‌انگیزترین مبارزات تاریخ دربارهٔ ارزش استدلالهای ریاضی طبق سنت موجود گردید (که *اینشتاین* آن را دعوای مابین قورباغه و موش نامیده است).

در سال ۱۸۳۱ *گاوس*[28] «وحشت خود را از بینهایت» طی عبارات زیر اظهار داشته است:«من علیه استعمال کمیّت بینهایت در ریاضیات به صورت عدد خاتمه یافته و معینی اعتراض می‌کنم. چنین فرضی در ریاضیات پذیرفتنی نیست. بینهایت تنها وسیلهٔ ساده‌ای برای گفتگو از مقادیر بزرگ است: مفهوم واقعی آن حدّی است که برخی مقادیر همواره به آن نزدیک می‌شوند در حالی که مقادیر دیگر ممکن است بدون محدودیت بزرگ شوند.»

بنابر این، اگر x نمایش اعداد حقیقی[29] باشد در این صورت به تدریج که x بزرگ می‌شود $\frac{1}{x}$ کوچک می‌گردد و همواره می‌توانیم برای x مقادیری چنان معین کنیم که اختلاف مابین $\frac{1}{x}$ و صفر به قدری باشد که قبلاً اراده کرده‌ایم (غیر از صفر) و این اختلاف را می‌توانیم به قدری که منظورماست ،کوچک اختیار کنیم و اگر x باز هم بزرگتر شود اختلاف $\frac{1}{x}$ با صفر از این مقدار مشخص هم کمتر می‌شود و بنابر این می‌گوییم که حد $\frac{1}{x}$ وقتی x به سمْت بینهایت میل کند صفر است. و بینهایت را با علامت ∞ نمایش می‌دهند؛ لیکن عبارت به صورت $\frac{1}{\infty}=0$ اصلاً مفهوم ندارد به دو دلیل یکی اینکه تقسیم بر بینهایت عملی است مبهم و بنابر این خالی از مفهوم است و دلیل دوم همان است که *گاوس* اظهار داشته است؛ به همین طریق تساوی $\frac{1}{0}=\infty$ هم مفهومی ندارد.

کانتور در عین حال هم با *گاوس* موافق است هم مخالف. در سال ۱۸۸۶ هنگام گفتگو از بینهایت حقیقی (*گاوس* کلمهٔ خاتمه یافته را به کار می‌برد) ،چنین می‌گوید: «با وجود اختلاف اساسی ما بین بینهایت بالقوه و بینهایت حقیقی یا بالفعل، مکرر اتفاق می‌افتد که این دو را با هم مشتبه سازند. اولی مفهوم کمیّت متغیر معینی را دارد که ترقی می‌کند و از هر مقدار محدود بزرگی که اختیار می‌کنیم بالاتر می‌رود (همچون x در عبارت $\frac{1}{x}$) در حالی که دومی کمیتی است ثابت و بدون تغییر که ماورای تمام کمیات محدود یا معین قرار گرفته است.

کانتور گفتار خود را چنین ادامه می‌دهد که همین اشتباه که در به کار بردن بینهایت در ریاضیات مرتکب شده‌اند به درستی موجب گردیده است که ریاضیدانان مردد دچار وحشت از بینهایت شوند از قبیل وحشتی که *گاوس* به آن دچار شده است و با این حال *کانتور* در این نکته اصرار می‌ورزد که: «رد کردن بینهایت حقیقی و ذیحق، بدون تشخیص مورد، نیز به نوبهٔ خود کمتر از اشتباه فوق نمی‌باشد و همچون تجاوزی به ماهیت اشیاست [مفهوم ماهیت اشیا هیچ وقت به صورت کامل دستگیر بشریت نشده است] که باید به صورت واقعی که دارند مورد ملاحظه قرار گیرند.» و با این اظهار *کانتور* یکباره خویشتن را در ردیف الهیون بزرگ قرون وسطی قرار می‌دهد که آثار آنان را با دقت مطالعه کرده و مورد تمجید بسیار قرار داده بود.

در سال ۱۹۱۰ *برتراند راسل* دربارهٔ روشی که *کانتور* برای مطالعه در بینهایت اتخاذ کرده بود، چنین اظهار نظر می‌کند: «*زنون ایلیایی* سه مسئله را مورد مطالعه قرار داده بود: «مسئلهٔ بینهایت کوچک، مسئلهٔ بینهایت و مسئلهٔ اتصال. از زمان او تا دوران ما بزرگترین صاحبان افکار، طی هر نسل و به نوبهٔ خویش، این مسائل را مورد مطالعه قرار دادند، لیکن اگر صمیمانه صحبت کنیم، *وایراشتراس*، ددکیند[30] و *کانتور* این مسائل را به طور قطع حل کردند.[31] مسئلهٔ بینهایت کوچک به وسیلهٔ *وایراشتراس* حل شد، و ددکیند حل دو مسئلهٔ دیگر را شروع کرد و کانتور به طور قطع این کار را به انجام رسانید.[32]

در این مرحله به بیان مطالبی می‌پردازیم که *کانتور* در مورد بینهایت مطرح کرده است. می‌دانیم بینهایت به صورتهایی گوناگون در ریاضیات ظاهر می‌شود. ریاضیدانها از تفکر در مورد اعداد بزرگ وحشتی ندارند، اما هر عدد معینی، هر چند بزرگ، متناهی[33] و نه نامتناهی یا بینهایت در نظر گرفته می‌شود.تعداد اعداد طبیعی[34]

۱، ۲، ۳، ۴، ...

نامتناهی است، زیرا هر قدر در شمارش جلو برویم، مثلاً تا عدد n، عدد $n+1$ عدد طبیعی دیگری است که هنوز به آن نرسیده‌ایم و همانگونه که ملاحظه خواهیم کرد، ردهٔ اعداد طبیعی یکی از اندازه‌های اصلی بینهایت است.

مثالی دیگر از رده یا مجموعهٔ نامتناهی اعداد، *مربعهای*[35] جمیع اعداد طبیعی است:

---

27. Cantor 28. Gauss 29. Real numbers 30. Dedekind

۳۱- البته راسل بعداً در چاپ دوم کتاب *اصول ریاضی* خود (۱۹۲۴) می‌نویسد اوضاع و احوال در این مورد آنچنان هم در حد کمال نیست.

۳۲- از کتاب *ریاضیدانان نامی* اثر *اریک تمپل بل* ترجمهٔ حسن صفاری.

33. Finite 34. Natural numbers

35. Squares

۱ ، ۴ ، ۹، ۱۶ ، ۲۵ ، ۳۶، ۴۹ ، ...

این که این رده، ردهای بینهایت است به همان طریق اثبات میشود. یعنی، اگر امیدوارانه به عدد n^2 برسیم، نمیتوانیم در آن توقف کنیم، زیرا همچنان عدد دیگر $(n+1)^2$ ای واقع در این رده موجود است. در نتیجه دو رده داریم که هر یک شامل بینهایت عدد طبیعی است و طبیعی است که این سؤال را مطرح کنیم که کدام یک از این دو رده اعدادی «بیشتر» از دیگری دارد؟

محقق است که جمیع اعداد ردهٔ دوم *مشمول*[36] در اولیاند، زیرا n^2، که عضوی نمونه از ردهٔ دوم است، عددی صحیح نیز هست و بنابر این عضوی از ردهٔ اول به شمار میرود و عددهای بسیاری از ردهٔ اول موجودند که مربع کامل[37] نیستند، و بنابر این اعضای ردهٔ دوم به حساب نمیآیند.

در این صورت آیا نمیتوان گفت علی رغم این حقیقت که هر دو رده شامل بینهایت عضواند، ردهٔ اول به گونهای شامل *بینهایتی بزرگتر* از ردهٔ دوم است؟

این سؤال توسط *گالیله* در *مکالمات*[38] مورد بحث قرار گرفت و وی به این نتیجه رسید که تمام چیزی که در مورد این دو رده میتوان گفت این است که هر یک از آنها نامتناهی است و رابطه[39] های برابری[40] و نابرابری[41] را میتوان دربارهٔ ردههای متناهی و نه نامتناهی، به کاربرد. و این موضوع در همین جا تا زمانی متوقف شد که امکان مقایسه درجات *نامتناهی*[42] توسط کانتور، ریاضیدانی آلمانی متولد در روسیه به سال ۱۸۷۳، مطرح شد و از آن حیرتانگیزترین شاخهٔ ریاضیات توسعه یافت.

به خاطر درک برهان *کانتور*، باید کار را با شمارش[43] آغاز کنیم. مقصودمان از گفتن اینکه در مجموعهای متناهی از اشیا بیست و یک عضو موجودند چیست؟ این پاسخ که به هر یک از اعضای ردهٔ مورد بحث به نوبت اشاره کرده، «یک، دو، سه، ....، بیست، بیست و یک» را میشماریم کافی نیست. توانایی انجام این عمل دلالت برداشتن فرهنگ لغاتی بسیار تخصصی از کلمات عددی دارد. چگونه میتوان مفهوم بیست و یک شیء را برای کسی بیان کرد که زبانمان را نمیداند و زبان خودش آنقدر ابتدائی است که برای «پنج»، «شش»، ... کلمهای ندارد، و تنها کلمات عددی آن «یک»، «دو»، «سه»، و «چهار» اند و فوق «چهار» بسیار است؟!

آشکارا میتوانیم مفهوم «بیست و یک» را با بیست و یکبار چوبخط زدن بر یک چوب یا با قراردادن این تعداد مهره بر زمین یا با دوبار نگهداشتن تمام انگشتان دو دست به طور متوالی و بعد یک انگشت تنها، بیان کنیم. تمام این روشها برای خواننده از کتبی که آموخته یا تجربیاتی که اندوخته ،آشناست. شک نیست که مفهوم عدد بیست و یک را می توان رساند.

به زبان فنی آنچه که انجام دادهایم برقرار کردن تناظری «یک به یک[44]» بین نشانههای بریده شده روی چوب، یا مهرهها، یا انگشتانمان با اشیائی است که *تعداد* آنها بیست و یک است و این شمارشی در سادهترین و اصلیترین صورتآناست. بهازای هر شیء یک خط روی چوب وجود دارد و هر خط روی چوب متناظر با یک شیء است.

به بررسی مثال دیگری از تناظر یک به یک میپردازیم. میدانم کلاسی که در آن درس میدهم دارای بیست و یک صندلی است. اگر هنگامی که وارد کلاس میشوم، ملاحظه کنم جمیع صندلیها اشغال شده است، خواهم دانست بیست و یک دانش آموز در این کلاس حاضر شدهاند. از طرف دیگر، اگر بعضی از صندلیها خالی باشد، آنگاه کمتر از بیست و یک دانشآموز حاضرند. سرانجام، اگر تمام صندلیها اشغال باشند و بعضی از دانش آموزان ایستاده باشند، متوجه میشوم بیش از بیست و یک دانش آموز حاضرند و به صندلی بیشتری نیاز است.

در نتیجه، تناظری یک به یک بین صندلیها و دانشآموزان ، بر صندلیها و دانشآموزان به تعداد مساوی دلالت میکند. اگر صندلیهایی بدون دانش آموز باشند، تعداد صندلیها از تعداد دانش آموزان بیشتر است. اما اگر تمام صندلیها اشغال شده و بعضی دانشآموزان بیصندلی مانده باشند، آنگاه تعداد دانش آموزان بزرگتر از تعداد صندلیهاست.

این مطلب بسیار واضح است، اما اساس ایدهٔ بزرگ *کانتور* را در بردارد. *تعداد واقعی صندلیها* وارد در مفهوم برابری یا نابرابری نمیشود. در نتیجه میتوان گفت:

اگر دو ردهٔ نامتناهی چنان باشند که تناظری یک به یک بتواند بین اعضای آنها برقرار شود، آنگاه دو ردهٔ مزبور دارای عدد *ترامتناهی*[45] یکسانی از اعضا هستند. این موضوع *برابری* را تعریف میکند.

---

36. Contained
37. Perfect square
38. Dialogues
39. Relation
40. Equality
41. Inequality
42. Degrees of infinity
43. Counting
44. One-to-one correspondence
45. Transitive number