نقش ریاضیات در مدیریت و اقتصاد

محمدحسین پورکاظمی*

چکیده

در این مقاله برآنیم که به نقش ریاضیات در مدیریت و اقتصاد بپردازیم. توجه داریم که خوانندگان این مقاله دو دسته‌اند، عده‌ای از ریاضیدانان و گروهی از اقتصاددانان و اساتید مدیریت که هر یک در رشته خود مقام والایی دارند، اما ارائه برخی از مطالب؛ مثلاً، درباره ریاضی برای ریاضیدانان روشن و برای اقتصاددانان و اساتید مدیریت ممکن است به روشنی گروه قبلی نباشد. در واقع ریاضیدانان با تعریف اقتصاد و اقتصاددانان با تعریف ریاضی همانند هم آشنا نیستند. به همین جهت، ابتدا به تعریف هر دو می‌پردازیم. آنگاه به روش تحلیلهای اقتصادی به صورت گذرا توجه کرده، سپس به بررسی اقتصاد ریاضی و منافع و معایب آن از نظر اقتصاددانان پرداخته، و سپس تاریخچهٔ استفاده از ریاضیات در مدیریت از ابتدا تاکنون را بررسی نموده و در پایان به کمک مثالهایی در زمینه‌های گوناگون رابطه زیبایی بین مدیریت و ریاضی را نشان خواهیم داد.

واژه‌های کلیدی: ریاضیات، اقتصاد، مدیریت، اقتصاد ریاضی، بهینه سازی ایستا[1]، بهینه‌سازی پویا[2].

***

مقدمه

انسان هوشمند با توجه به ابزار ریاضی بر بسیاری از اسرار جهان و در نتیجه بر طبیعت دست یافته است. زبان ریاضی، صریح، فرضهای آن دقیق و روابط آن فراوان است. به همین جهت رشته‌های مختلف علوم و علوم انسانی با ابزار ریاضی به بیان مطالب خود می‌پردازند. از جمله، رشته‌های مدیریت و اقتصاد به‌خوبی از این ابزار استفاده کرده‌اند. در مدیریت بنگاهها، اقتصاد ابزار مهمی برای بهینه کردن

---

* عضو هیأت علمی دانشگاه شهید بهشتی

1- Static Optimization

2- Dynamic Optimization

اعمال و رفتار و تصمیم‌گیریها می‌باشد. به‌همین جهت در این نوشتار بیشتر، در پی بیان تحلیل‌های اقتصادی به زبان ریاضی هستیم و در ابتدا به تعاریف خواهیم پرداخت.

تعریف ریاضیات

برای تعریف ریاضیات همانند سایر علوم توافق لازم وجود ندارد اگر به تعاریف مختلف توجه شود هر معرفی‌کننده‌ای تأکید بیشتر بر موضوعی خاص دارد. در فرهنگ دانشگاهی وبستر[۱] ریاضیات را علمی می‌داند که از روابط دقیق بین مقادیر، اعمال و روشهایی که از مقادیر معلوم، به استنتاجهایی می‌رسد، گفتگو می‌کند، با این تعریف کسانی بیشتر موافقند، که ریاضیات را بیشتر در محاسبات می‌بینند. یان استوارت[۲] در مقدمه کتاب معروف ریاضیات چیست، نوشته ریچارد کورانت و هربرت رابینز[۳] ریاضیات را چنین معرفی می‌کند. «ریاضیات چیزی نیست مگر دستگاهی حاصل از، تعاریف و اصول موضوعی که فقط باید سازگار باشند و از سایر لحاظ به میل و اراده ریاضیدان خلق می‌شود.»[1] این تعریف توجه و عنایت بیشتر به ساختار هندسی اقلیدسی و یا جبر مدرن دارد. فرهنگ معروف ریاضی جیمز و جیمز[۴] ریاضیات را به‌طور ساده «بررسی منطقی شکل، ترتیب، کمیت و بسیاری مفاهیم مربوط به آنها» می‌داند.[2]

بوریس ایگل ویتس[۵] جودیت استویل[۶] درکتاب مقدمه‌ای بر استدلال ریاضی، عقیده دارد که ریاضیدانهای حرفه‌ای بیشتر توجه به تعریف جیمز و جیمز داشته و بخصوص تأکید بر منطقی بودن آن دارند.[3] جیمز و جیمز ریاضیات را به

1- Webster New Collegiate Dictionary

2- Yan Stovart

3- Richard Courant and Herbert Rabinze

4- James and James, Mathematical Dictionary

5- Boris Iglewitz

6- Judith stoyle

سه شاخه جبر، آنالیز و هندسه تقسیم می‌کنند هرچند نظر دارند که این شاخه‌ها آنچنان درهم تنیده‌اند، که آنها را از یکدیگر نمی‌توان تفکیک کرد.

اصولاً این تعاریف باتوجه به دیدگاههای نویسندگان است، همانطورکه می‌دانیم ریاضیات دانشی است دقیق که مطالب آن منسوخ نمی‌شود. یان استوارت می‌گوید، هرچند ریاضیات هنوز در حال رشد است ولی در این رشته کشفیات قدیم به ندرت کهنه و مهجور می‌شوند، شما نمی‌توانید قضیه‌ای را باطل کنید، اما گاهی ممکن است اثباتی که مدتها مورد قبول بوده غلط از آب درآید چنین چیزی اتفاق افتاده است ولی واقعیت آن است که این قضیه از اول هم ثابت نشده‌بود. اما دیدگاههای جدید ممکن است باعث شوند اثباتهای قدیمی مهجور شوند یا احکام قدیمی دیگر جالب توجه نباشند.[4] باید توجه داشت برخلاف ریاضیات، در مدیریت، اقتصاد و سایر شاخه‌های علوم انسانی نظریه‌ای مورد قبول بوده ولی پس از دوره‌ای، نظر مذکور مردود اعلام می‌شود. حال به تعریف علم اقتصاد می‌پردازیم.

تعریف علم اقتصاد

علم اقتصاد جزء علوم اجتماعی است و مانند سایر علوم اجتماعی چون جامعه‌شناسی، روانشناسی، مردم‌شناسی و جغرافیا تعریف واحدی که مورد توافق اقتصاددانان باشد وجود ندارد. عده‌ای معتقدند که اقتصاد عبارت است از «علم استفاده از منابع کمیاب به منظور نیل به هدف رفاه اجتماعی برای جامعه بشر». لرد رابینس[1] تعریف قبلی را رد می‌کند، و می‌گوید اقتصاد جنگ، (آن نیز نوعی اقتصاد به شمار می‌آید) است که رفاه بشر را نابود می‌کند پس این تعریف کامل نیست. او می‌گوید «اقتصاد علم مطالعه و بررسی رفتار انسانها در خصوص ارتباط بین منابع کمیاب و محصول نهایی است، که این منابع دارای راههای استفاده گوناگون است.»

1- Lord Rabins

ولی در مجموع می‌توان گفت که اقتصاد علم استفاده از امکانات محدود جهت نیل به اهداف و نیازهای رفاهی لایتناهی بشری است.[5] هیکس معتقد نیست که اقتصاد در حاشیه علوم قرار داشته باشد. زمانی که از مفاهیم ریاضی استفاده می‌کند به صورت یک علم ظاهر می‌شود و زمانی که سعی دارد با استفاده از فلسفه و منطق مسائل اقتصادی را توجیه کند به صورت یک هنر ظاهر می‌شود. حال بد نیست به سیر تطور تعریف علم اقتصاد بپردازیم این سیر در تاریخ عقاید اقتصادی بحث می‌شود.[6]***ارسطو اقتصاد را تدبیر منزل دانسته است.*** البته باید توجه داشت که در آن دوره شاید خانوار به عنوان نماینده واحد اقتصادی و مرکز فعالیت اقتصادی (که اکنون بازار است)به شمار می‌رفت. اصولاً در این دوره، اقتصاد از اخلاقیات فلسفی و مذهبی جدا نبود. بعدها اقتصاد به عنوان سیاستهای ملی و دولتی مطرح گردید و از سیاست جدا نبود. آدام اسمیت[1] و بعضی از اقتصاددانان اقتصاد را « علم ثروت » می‌نامند به نظر این گروه علم اقتصاد علمی است که تولید، مصرف و توزیع ثروت را بررسی می‌کند. در واقع اسمیت با چاپ کتاب «ثروت ملل» برای اولین بار اقتصاد را جدا از مذهب و ثروت مطرح کرد و آنرا به مثابه یک نظام علمی مطرح ساخت. دیوید ریکاردو[2] هدف اساسی اقتصاد را «توزیع ثروت » می‌داند و به توزیع بیشتر اهمیت می‌دهد ،ریکاردو و جان استوارت میل[3] علم اقتصاد را «بررسی ماهیت ثروت از طریق قوانین تولید و توزیع » خواندند ولی این تعریف در اواخر قرن نوزدهم رد شد.آلفرد مارشال[4] ***اولین اقتصاددانی*** است که مسأله رفاه را در علم اقتصاد مطرح کرد او هدف اقتصاد را رفاه انسان و ثروت را وسیله ای برای رسیدن به این هدف می‌داند آرتور پیگو[5] موضوع علم اقتصاد را مربوط به چگونگی پیدایش پول می داند. لودویگ وان می‌زز[6] علم اقتصاد را منطقی برای اتخاذ

1- Adam Smith (۱۷۲۳-۹۰)

2- David Ricardo (۱۷۷۲-۱۸۲۳)

3- John Stvart Mill (۱۸۰۶ - ۱۸۷۳)

4- Alfered Marshal(۱۸۴۲ - ۱۹۲۴)

5- Arthur Pigou(۱۸۷۷-۱۹۴۹)

6- Ludwig Von Mises (۱۸۸۱-۱۹۷۳)

تصمیات عقلایی می‌داند و پل ساموئلسون[1] علم اقتصادرا بررسی و پیشنهادی می‌داند که بشر به وسیله پول یا بدون آن برای تخصیص منابع کمیاب به منظور تولید کالاها و خدمات در طی زمان و همچنین برای توزیع آنها بین افراد و گروهها در جامعه به منظور مصرف در زمان حال و آینده انتخاب می کند. تغییرات تعریف را بخوبی در طول زمان ملاحظه می‌کنید. حال علم اقتصاد به صورت یک علم منطقی و تجربی مطرح می‌شود. اسکارلانگه[2] اقتصادان لهستانی در مقاله خود علم اقتصاد را یک علم منطقی و تجربی می‌داند[7]. در طرح این نظام از روش قیاسی استفاده می‌شود و از طریق آن فرضیه ها را از پیشفرضهای اولیه به دست می‌آورد و بوسیله ابزار ریاضی و آمار، آزمون و ارزیابی می شوند. هرگاه نتایج این فرضیه ها با واقعیت تطبیق کند فرضیه‌ها به صورت یک نظریه علمی درمی‌آید. خواهیم دید که این دانش تجربی با استفاده از ابزار ریاضی توانسته است به این جایگاه برسد.

باید توجه داشت که قبل از استفاده از ابزار ریاضی، اقتصاددانان با مشاهده، به مسأله‌ای پی می‌بردند و درباره مسأله مذکور فرضیه‌هایی بیان نموده سپس با کشف روابط علت معلولی به نتایجی دست می‌یافتند و نظریه‌هایی را تدوین می‌کردند و به کمک این نظریه‌ها به توصیف، پیش‌بینی و حتی کنترل پدیده‌ها می‌پرداختند.

ماهیت اقتصاد ریاضی

اقتصاد ریاضی چیزی جز استفاده از ابزار ریاضی برای تحلیل مطالب اقتصادی نیست. آلفا سی.چیانگ[3] در معروفترین کتاب اقتصاد ریاضی[8] (که بین دانشگاهیان این رشته، به یکی از اصلی‌ترین کتب معروف است،) ماهیت اقتصاد ریاضی را چنین بیان می‌کند.« اقتصاد ریاضی برخلاف مالیه عمومی یا تجارت بین‌الملل، شاخه‌ای از اقتصاد نیست، بلکه یک روش تحلیل اقتصادی است که در

1- Paul Samuelson (۱۹۱۵...)   2- Oskar Lange

3- Alpha C.Chiang

آن اقتصاددانان، نمادهای ریاضی را برای بیان مسأله خود به‌کار می‌گیرند و از روابط شناخته‌شده ریاضی در استدلال خود استفاده می‌کنند. ریاضیات را می‌توان در هر شاخه از اقتصاد مانند نظریه‌های اقتصاد خرد، نظریه‌های اقتصاد کلان، مالیه عمومی و...به‌کار برد». باید توجه داشت تفاوت عمده در اقتصاد ریاضی با اقتصاد غیرریاضی یا تشریحی، در نتایج نیست، زیرا هدف از هرگونه تحلیل نظری، صرفنظر از روش، استفاده از استدلال منطقی است. تفاوت عمده اقتصاد ریاضی و غیرریاضی این است که در اولی فرضیه ها و نتایج به وسیله نمادهای ریاضی به‌جای کلمات و معادلات، به‌جای جملات بیان می‌شوند. در ضمن، به جای منطق تشریحی از قضایای ریاضی (که انبوهی از آنها وجود دارد) در استدلال استفاده می شود.اگر توجه شودنمادها وکلمات مترادف هم هستند شکی نیست که کاربرد نماد ریاضی استدلال قیاسی را راحت می‌کند. به نظر آلفا سی.چیانگ استفاده از روش ریاضی دارای مزایا و معایب زیر است، ابتدا به مزایای آن می‌پردازیم.

(الف) زبان به‌کاربرده شده دقیقتر و صریحتر است .

(ب) قضایا و روابط ریاضی زیادی برای استفاده وجود دارند.

(ج) اجبار تحلیل گر در بیان صریح تمام پیشفرضها به عنوان شرط لازم برای کاربرد تحلیل ریاضی از انتخاب ناخود آگاه پیشفرضهای غیر صریح و غیر ضروری جلوگیری می‌کند.

(د) امکان می‌دهد که حالتهای کلی n متغیر را تحلیل کند.

باید توجه داشت تحلیل ریاضی از نظر همگان مورد تایید نیست .آلفاسی چیانگ ضعف‌های زیر را برای اقتصاد ریاضی می‌شمرد « مزایای فوق قابل توجه است لکن برای قضاوت عادلانه لازم است به دو مشکل روش ریاضی نیز توجه داشت اولاًزبان ریاضی برای همه اقتصاددانان قابل درک نیست، از اینرو، تفاهم بین متخصصان اقتصاد ریاضی و غیر ریاضی مشکل است. به همین دلیل اقتصاددانهای غیرریاضی نمی‌توانند از دستاوردهای متخصصان اقتصاد ریاضی بهره گیرند(مگر آنکه آنها را به زبان غیرریاضی برگردانند.) ثانیاً، اقتصاددانی که مهارت ریاضی دارد

با دو نوع وسوسه روبرو می‌شود اولاً فقط با مسائلی که می تواند آنها را با تحلیل ریاضی حل کند خود را مشغول می‌نماید. ثانیاً، ممکن است برای ساده‌تر شدن عملیات ریاضی، فرضهای نادرست اقتصادی اتخاذ کند.لذا اگر مواظب نباشد ممکن است بجای تحلیل اصول اقتصادی فقط در پیلهٔ روشهای ریاضی فرو رود، به عبارت دیگر، ممکن است ریاضیات به‌جای مستخدم بودن ، نقش ارباب را بازی کند.اگر این وضع پیش آید در واقع شکست ریاضیدان را نشان می دهد نه اقتصاد ریاضی را.

تاریخچه اقتصاد ریاضی

امروزه آنچه که به عنوان اقتصاد در زمینه‌های مختلف ارائه می‌شود، جهت تحلیل‌ها، از ابزار ریاضی مانند، شکل، روابط و معادلات ریاضی استفاده می‌نماید. کاربرد ریاضی از سال ۱۸۳۸ شروع شده و تنها در نیم قرن اخیر همگانی گردیده است. نکته جالب آن است که استفاده از ابزار ریاضی در اقتصاد توسط ریاضیدانها، مهندسین و فیزیکدانها[9] شروع شده است.

اَرو[1] و اِینتریلیگلتور[2] در مجموعه مقالات جمع‌آوری شده در کتابی به نام دستنامهٔ اقتصاد[3]، طی مقاله‌ای به ارائه تاریخچهٔ اقتصاد ریاضی از ابتدا تاکنون پرداخته‌اند. آنها در این مقاله استفاده از ریاضیات را به سه دوره تقسیم کرده‌اند:[10]

دوره اول

دوره اول به نام دوره نهایی، مبتنی بر پایه حساب دیفرانسیل انتگرال نامیده می‌شود. [11] این دوره در فاصله ۱۹۴۷ ـ ۱۸۳۸ است. در این دوره اقتصاد ریاضی از روش تحلیل فیزیک (در استفاده از ریاضی)، که در آن به صورت وسیعی حساب دیفرانسیل انتگرال به کار برده می‌شود، استفاده می‌نماید. در این دوره، اقتصاددانان با به‌کارگیری توابع هموار برای توابعی مانند تقاضا، عرضه، مطلوبیت و تولید به

1- Renneth J.Arrow
2- Michael D. Intriligator
3- Handbook in Economics

رفتار یک بنگاه اقتصادی و مصرف‌کننده برای بهینه‌سازی اهداف خود در زمینه اقتصاد خرد پرداختند. نقطه شروع استفاده از ریاضیات را می‌توان در سال ۱۸۳۸ از کارنو دانست.[12]کارنو در زمینه نظریه بنگاهها این فرض را کرد، که هر بنگاه سعی در به حداکثر رساندن سود بنگاه خود دارد و به همین جهت، سطح تولید خود را مقداری قرار می‌دهد که سود بنگاه حداکثر گردد. کارنو در زمینه گسترش مفاهیم عرضه و تقاضا و تعادل آنها در یک بازار رقابتی بحث نموده است.

نظریه مصرف‌کننده را، گوسن[1] در سال (۱۸۵۴)، جی‌وانس[2] در سال ۱۸۷۱ و والراس[3] در سال ۱۸۷۴ مارشال[4] در سال (۱۸۹۰) گسترش دادند.

تعیین تابع تقاضای مصرف‌کننده از حداکثر تابع مطلوبیت باتوجه به خط بودجه ازکارهای این دوره است. این دوره باکار صدها اقتصاددان ادامه پیداکرد. برای ریاضیدانان باتوجه به مثالهائی از این نوع زیبایی استفاده از ریاضیات در اقتصاد روشن می‌شود.

دوره دوم

نظریه مجموعه‌ها، و مدلهای خطی، که طی سال‌های ۱۹۴۸ تا ۱۹۶۰ مطرح می‌گردد.[13]آرو و اینترلیگیتور مقدمه این دوره راکارهای فون نیومن[5] می‌داند که در مقاله‌ای به موضوع رشد اقتصادی پرداخت. روش‌شناسی او در این مقاله مهمتر از مطالب ارائه شده‌بود. البته می‌دانیم برنامه‌ریزی خطی در سال ۱۹۴۹ توسط دانتزیگ[6] گسترش پیدا کرد. آرو با به‌کارگیری نظریه مجموعه‌ها در اصول نظریهٔ انتخاب جامعه[7] این رویه را معمول نمود. در دوره ۱۹۴۸ تا ۱۹۶۰ استفاده از برنامه‌ریزی خطی و همچنین دستگاههای خطی و غیرخطی معمول گردیده و نظریه داده ـ ستانده[14]گسترش یافت.

1- Gossen H.H (1845)

2- Jevons W.S.

3- Walras. L.

4- Marshall, A.

5- Von Neuman J.

6- Dantzig G.B

7- Social Choice Theory

دوره سوم

دوره سوم، دوره جاری است که از سال ۱۹۶۱ شروع شده و تاکنون ادامه دارد. در این دوره که آن را دوره اقتصاد ریاضی مدرن می‌توان نامید از حساب دیفرانسیل مقدماتی، نظریه مجموعه‌ها و مدلهای خطی به صورت گسترده نیز استفاده می‌شود و بعلاوه، شاخه‌های دیگر ریاضی، آمار، احتمال، معادلات دیفرانسیل، معادلات با مشخصات جزئی، نظریه کنترل و ... نیز به کاربرده می‌شود.

برای نمونه در زیر به برخی از شاخه‌های مهم اقتصاد ریاضی اشاره می‌کنیم.

عدم قطعیت و اطلاعات[1]

این موضوع با نظریه ریسک توسط پرات[2] در سال ۱۹۶۴ و آرو در زمینه تعادل تقاضا در صورت نااطمینانی در سال ۱۹۷۰ شروع شد و همچنان ادامه دارد.

تحلیلهای کلی[3]

در این تحلیل‌ها از ترکیب حساب دیفرانسیل و انتگرال و توپولوژی برای مطالعه در خواص تعادل اقتصادی و تغییرات آن استفاده می‌شود. دبرو[4] در سال ۱۹۷۰ اولین کسی بود که در این زمینه شروع به کار کرد.

نظریه دوگانی[5]

این نظریه که در زمینه‌های مختلف ازجمله در اقتصاد خرد استفاده می‌شود ترکیبی از نظریه مجموعه‌ها و جبر خطی در آن به کار می‌رود، مسأله دوگان در برنامه‌ریزی خطی روشن است، در اقتصاد خرد دوگان تابع تولید، تابع هزینه است این مفهوم در اقتصاد با کار هتلینگ در سال ۱۹۳۲ به صورت بیانی تشریح شد، کارهای جالب فوس و مک‌فادن[6] در این زمینه در سال ۱۹۷۸ قابل ملاحظه است. برای روشن شدن موضوع می‌توان به فصل دوازدهم جلد دوم منبع [10] از دیورت[7]

1- Uncertainty and Information

2- Pratt, J,w.

3- Global Analysis

4- Debrou,G.

5- Duality Theory

6- Fuss and MCFadden

7- Diewert, E.

در سال ۱۹۷۴ مراجعه کرد.

توابع تقاضای کلی[1]

نظریه مصرف‌کننده نشان می‌دهد که تابع تقاضا از به حداکثر رساندن مطلوبیت مصرف‌کنندگان که باید در برخی از قیود شرطی صدق کند، به‌دست می‌آید. گسترش این موضوع چگونه امکان‌پذیر است. سوننشین[2] در سال ۱۹۷۳ نشان داد که تقاضای کلی برخلاف تقاضای هر فرد، به محدودیت افراد بستگی ندارد.

مالیات بهینه[3]

کار اولیه در این زمینه در سال ۱۹۲۷ توسط رمزی[4] و هتلینگ[5] در سال ۱۹۳۸ شروع شد و مقاله های مهم در این زمینه از بویتکیوس[6] (۱۹۵۶)، میرلیز[7] (۱۹۷۱) و دیاموند و میرلیز (۱۹۷۱) می‌باشد. موضوع آن را می‌توان بوسیله میرلیز در فصل ۲۴ منبع [10] ملاحظه کرد. بحث میرلیز، در مورد مالیات بهینه به عنوان موضوعی از نظریه بهین دوم اقتصاد دستوری[8] بحث شده است. در همین منبع در فصل ۲۵، نیز شیشنسکی[9] به عنوان موضوعی از نظریه بهین دوم[10] اقتصاد اثباتی بحث گردیده است.

نظریه رشد بهینه[11]

این موضوع توسط ساموئلسون در سال ۱۹۵۶ شروع شد و به دنبال آن اقتصاددانان فراوانی ازجمله سولو[12] (۱۹۶۵)، یوزاوا[13] (۱۹۶۴) مسأله را دنبال

1- Aggregate Demand Functions
2- Sonnenschein, H.
3- Optimal Taxation
4- Ramsey, F.P
5- Hotelling, H.
6- Boiteux, M.
7- Mirrlees E.
8- Normative Second-best Theory
9- Sheshinski
10- Positive Second-best Theory
11- Optimal Growth Theory
12- Solow
13- Uzaw H.

کردند. پایه ریاضی این بخش مشتمل بر مسأله کنترل[1] است. مسأله کنترل به شدت در اقتصاد گسترش یافته است[15] که نمونه‌هایی از آن نیز ارائه خواهدشد.

مواردی شبیه فوق وجود داشته که از آنها در اینجا صرف‌نظر می‌کنیم. حال بهتر است به مثالهایی از کاربرد ریاضیات در مدیریت و اقتصاد توجه شود. این کاربردها برای دوستداران ریاضی جالب است.

مثالهائی از کاربرد ریاضیات در مدیریت و اقتصاد

در این بخش مثالهایی که قابل درک بیشتر برای ریاضی‌دانان است آورده می‌شود تا آنان بدانند ریاضیات محض در زمینه حساب دیفرانسیل و انتگرال، معادلات دیفرانسیل، معادلات تفاضلی، تعریف انتگرال ریمان و مسأله کنترل، چه زیبا مسائل مورد نظر مدیران و اقتصاددانان را حل می‌کند.[16]

ماکزیمم سطح تولید باتوجه به محدودیت هزینه و مسیر توسعه

دانشجوی ریاضی از سالهای پایانی متوسطه با مثالهای ریاضی ماکزیمم و می‌نیمم توابع آشنا می‌شود. در دانشگاه این موضوع را برای توابع n متغیره فرا می‌گیرد. مثال ارائه شده نمونه‌ای از این کاربرد است که یک مدیر تولید می‌تواند تولید خود را با استفاده از این ابزار با توجه به محدودیت هزینه‌ها برنامه‌ریزی کند.

مثال: فرض می‌کنیم تولیدکننده‌ای از دو عامل، که می‌توانند جانشین هم شوند استفاده کرده و محصولی را تولید می‌کند. این بنگاه هزینه ثابتی را برای تولید خود در نظر دارد. سوال مدیریت بنگاه این است که از این عوامل تولید چه مقدار استفاده کند تا محصول بیشتری تولید نماید. می‌توان به راحتی مسأله را به زبان ریاضی بیان کرد. اگر x , y عوامل تولید و z محصول باشد بااستفاده از اقتصادسنجی رابطه بین x , y , z را به دست می‌آوریم که آن را تابع تولید می‌گوئیم.

$$z = f(x, y)$$

1- Control Problem

اگر قیمت عوامل تولید به ترتیب p , q و هزینه ثابت بنگاه b باشد، تابع هزینه بنگاه برابر است با:

$C_1 = px + qy + b$ می‌خواهیم ماکزیمم سطح تولید را باتوجه به هزینه معلوم C_1 پیدا کنیم.

$$\text{Max } z = f(x,y)$$

$$\text{S.t:} \quad C_1 = px + qy + b$$

توجه شود این مسأله یک مسأله برنامه‌ریزی کلاسیک ساده است که با استفاده از روش لاگرانژ آن را حل می‌کنیم.

$$L = f(x, y) + \lambda \, [C_1 - px - qy - b]$$

شرط لازم مرتبه اول

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = F'x - \lambda p = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial y} = F'y - \lambda q = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = C_1 - px - qy - b = 0 \end{cases}$$

از این دستگاه λ_1^* , x^* , y^* و در نتیجه $L^* = z^*$ به دست می‌آید.

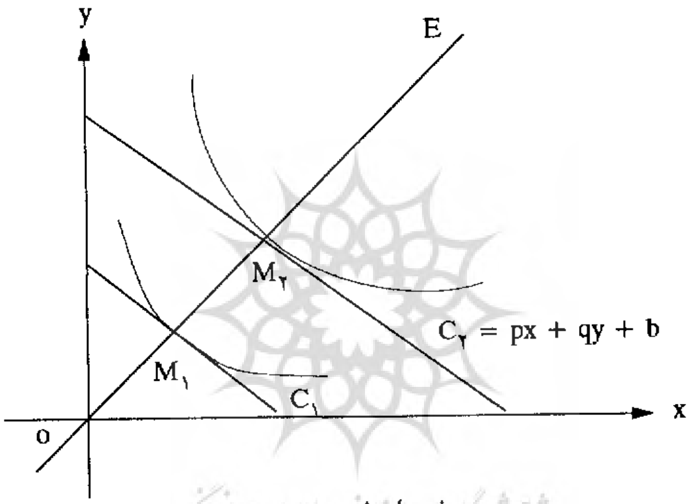
برای اینکه ثابت شود z^* به دست آمده حداکثر است باید ثابت شود دیفرانسیل مرتبه دوم، d^2L در نقطه بحرانی[1] $M_1(x^*, y^*)$, λ_1^*، باتوجه به دیفرانسیل قید همواره معین منفی است در شکل (۱) نقطه $M_1(x^*, y^*)$ نشان داده شده است ثابت می‌شود در این نقطه خط هزینه بر منحنی تراز[2] (بی‌تفاوتی) $z^* = f(x, y)$ مماس است. حال اگر C_1 به C_2 افزایش یابد نقطه M_1 به نقطهٔ M_2 انتقال می‌یابد.

مکان هندسی نقاطی که خط هزینه بر منحنیهای تراز مماسند موسوم به

1- Critical Point 2- Contour

مسیر توسعه است. نمودار (۱) را ملاحظه کنید.

از این مثال مشاهده می‌شود، مشتقات جزیی، دیفرانسیل، توابع چند متغیره، چگونه در تصمیم‌گیری مدیران و اقتصاددانان به صورت ابزاری قوی مورد استفاده قرار می‌گیرد.



نمودار ۱.

مثالی از معادلات دیفرانسیل

دانشجویان رشته ریاضی درس معادلات دیفرانسیل را فرا می‌گیرند و با دستگاهها معادلات دیفرانسیل آشنا می‌شوند. مثال زیر مقوله‌ای از استفاده معادلات دیفرانسیل در برنامه‌ریزی برای اقتصاد یک کشور می‌باشد که به صورت ساده ارائه شده است.

الگوی کلان دومار[1]

الگوی کلان بسیار ساده زیر بوسیله دومار مطرح گردیده است. اگر درآمد ملی یک کشور را در لحظهٔ t، $y(t)$ فرض کنیم، y تابعی پیوسته از متغیر زمان t است و پس‌انداز ملی در جامعه را در لحظهٔ t به $s(t)$ وسرمایه‌گذاری در لحظه t را نیز به $I(t)$ نشان می‌دهیم. پس‌انداز متناسب با درآمد ملی است، یعنی در اقتصاد $I(t) = s(t)$ را در نظر می‌گیرند. در ضمن دومار فرض می‌کند سرمایه‌گذاری متناسب با تغییرات درآمد ملی است یعنی $I(t) = \beta \frac{dy}{dt}$، پس داریم:

$$\begin{cases} s(t) = \alpha\, y(t) \\ I(t) = \beta \dfrac{dy}{dt} \\ I(t) = s(t) \end{cases}$$

از نظر اقتصادی، با یک الگوی پویا روبرو هستیم و از نظر ریاضی یک دستگاه معادلات دیفرانسیل است. فرض می‌کنیم (شرایط اولیه) $y(0) = y_0$ و $\alpha, \beta > 0$ باشد که برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل از روشهای معمولی استفاده می‌کنیم.

$$\beta \frac{dy}{dt} = \alpha\, y(t)$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{\alpha}{\beta} dt \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\alpha}{\beta} dt + \text{Ln}c$$

$$\text{Ln}y = \frac{\alpha}{\beta} t + \text{Ln}c \Rightarrow y = ce^{\frac{\alpha}{\beta} t}$$

1- Domar E.D.

باتوجه به شرط اولیه $y(0) = y_0$، خواهیم داشت:

$$y = y_0\, e^{\frac{\alpha}{\beta} t}$$

باتوجه به دیگر روابط خواهیم داشت:

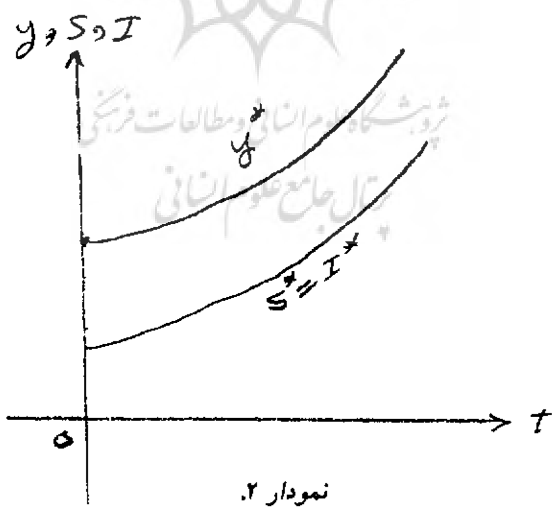
$$s = \alpha\, y_0\, e^{\frac{\alpha}{\beta} t} \Rightarrow s = s_0\, e^{\frac{\alpha}{\beta} t}$$

و از رابطه $s(t) = I(t)$ می‌توان نتیجه گرفت $I(t) = I_0 e^{\frac{\alpha}{\beta} t}$

پس داریم:

$$y = y_0\, e^{\frac{\alpha}{\beta} t} \quad \text{و} \quad s = s_0\, e^{\frac{\alpha}{\beta} t} \quad \text{و} \quad I = I_0\, e^{\frac{\alpha}{\beta} t}$$

مسیرهای زمانی[1] به دست آمده، نشان می‌دهد درآمد، پس‌انداز و سرمایه‌گذاری با نرخ $r = \frac{\alpha}{\beta}$ رشد می‌کند. از این نرخ نتیجه می‌شود، با افزایش α، میزان درآمد ملی اضافه می‌شود و β برعکس، عمل می‌کند. شکل مسیرهای زمانی را در نمودار (۲) ملاحظه فرمایند.



نمودار ۲.

1- Path Time

مثالی در معادلات تفاضلی[1]

معادلات تفاضلی مقوله‌ایست که دانشجویان ریاضی چندان از آن استفاده نمی‌کنند، این مقوله در ریاضیات گسسته اهمیت خاصی دارد.[17] الگوی زیر مثال خوبی ازکاربرد معادلات تفاضلی است.

الگوی تار عنکبوتی:[2] در تولید کالاهای کشاورزی با این مسأله روبرو هستیم که یکسال محصولی بیشتر و سال دیگر با همان شرایط آب و هوایی محصول کمتری تولید می‌شود و قیمتها نیز بستگی به میزان تولید افزایش یا کاهش پیدا می‌کند. با ابزار ریاضی چگونه می‌توان این پدیده را تبیین کرد. آیا قیمت و مقدار به سمت تعادل میل می‌کند؟

اگر قیمت متوسط یک کالای کشاورزی در سال tام P_t و مقدار تقاضا متوسط در سال tام q_t باشد. مقدار تقاضا در سال tام تابع قیمت آن است، یعنی داریم:

$$q_t = f(P_t)$$

در صورتی که مقدار عرضه کالای کشاورزی، تابعی از قیمت سال قبل آن است، تابع عرضه به صورت زیر درمی‌آید.

$$q_t = g(p_{t-1})$$

پس داریم:

$$\begin{array}{ll} D: & \left\{ \begin{array}{l} q_t = f(p_t) \\ q_t = g(p_{t-1}) \end{array} \right. \\ S: & \end{array}$$

اگر نقطه تعادل بازار را بخواهیم، داریم: $E\ (p_t) = g(p_{t-1})$

این معادله یک معادله تفاضلی است. که آن را حل می‌کنیم، مسیر زمانی قیمت تعادلی به دست می‌آید. برای روشن شدن بیشتر موضوع توابع f و g را خطی فرض می‌کنیم مثلاً داریم:

1- Difference Equations
2- Cobweb Model

$$\begin{cases} D: & q_t = ۲۲ - ۳p_t \\ S: & q_t = -۲ + p_{t-۱} \end{cases}$$

معادله همگن:

$$۲۲ - ۳p_t = -۲ + p_{t-۱} \Rightarrow ۳p_t + p_{t-۱} = ۲۴ \Rightarrow ۳p_t + p_{t-۱} = ۰$$

جواب عمومی معادله همگن $P_t^{۱} = C_۱ (\frac{-۱}{۳})^t$ $\qquad m = -\frac{۱}{۳}$

$۳m + ۱ = ۰$

حال جواب خصوصی آن یعنی P^p را پیدا می‌کنیم، داریم:

$$P^p = A \rightarrow ۳A + A = ۲۴ \text{ و } A = ۶ \rightarrow P^p = ۶$$

پس مسیر قیمت برابر است با: $\qquad P_t = C (\frac{-۱}{۳})^t + ۶$

اگر $t=۰$، $P_۰=۸$ فرض شود $C=۲$ خواهدبود، پس: $\qquad P_t = ۲(\frac{-۱}{۳})^t + ۶$

این جواب، جواب خصوصی معادله تفاضلی است. اگر در معادله تقاضا به جای P_t مقدار قرار دهیم مسیر زمان q_t نیز پیدا می‌شود. اگر در p_t و q_t بجای t متوالیاً مقادیر ۱ و ۲ و ۳ را نسبت دهیم مقادیر تقاضا و عرضه در هر دوره به دست می‌آید که برابر است با:

$P_e = ۶$ $P_t = ۲(\frac{-۱}{۳})^t + ۶$	$P_۲ = \frac{۵۶}{۹}$	$P_۱ = \frac{۱۶}{۳}$
$\dots t \rightarrow \infty$	$t = ۲$	$t = ۱$
$q_e = ۴$	$q_۲ = \frac{۱}{۳}$ $q_t = ۴ - ۶(\frac{-۱}{۳})^t$	$q_۱ = ۸$

نقطه انتهای قیمت تعادلی در نهایت را نمایش می‌دهد.

استفاده از انتگرال ریمان در اقتصاد

با تعریف انتگرال ریمان[1] در ریاضی آشنا هستیم، تعریف دقیقاً ریاضی است و دانشجوی ریاضی شاید نمی‌داند این تعریف ریاضی محض چه زیبا در بیان مسائل اقتصاد به‌کار می‌رود. از این تعریف در محاسبه سرمایه‌گذاری، میزان عرضه یک کالای معدنی و ... استفاده می‌کنیم.

مثلاً اگر میزان استخراج نفت از یک چاه نفت تابعی پیوسته از زمان به صورت $f(t)$ فرض شود، به راحتی می‌توان نشان داد که مقدار نفت استخراجی در فاصله زمانی [۱ تا ۰] برابر است با:

$$\text{عرضه نفت در یک سال}\ S = \int_{0}^{1} f(t)\, dt$$

چرا؟

فاصله زمانی [۱ و ۰] سال را به n قسمت دلخواه تقسیم می‌کنیم،

$$\Delta t_1 \text{ و } \Delta t_2 \text{ و } \dots \text{ و } \Delta t_n$$

فرض می‌کنیم میزان استخراج نفت در هر فاصله زمانی فوق ثابت و برابر مثلاً در زمان

$$\alpha_1 \text{ و } \alpha_2 \text{ و } \dots \text{ و } \alpha_n$$

است. پس نفت استخراجی به‌طور تقریبی در هر فاصله زمانی

$$F(\alpha_1)\ \Delta t_1\ ,\ F(\alpha_2)\ \Delta t_2\ ,\ \dots\ ,\ F(\alpha_n)\ \Delta t_n$$

پس میزان عرضه کل نفت به‌طور تقریبی

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\ \Delta t_i$$

اگر $n \Rightarrow \infty$ و $\text{Max}\Delta t_i \Rightarrow 0$ میل کند مقدار تقریبی به مقدار حقیقی می‌رسد پس:

$$S = \lim_{n\to\infty}\ f(\alpha_i)\Delta t_i = \int_a^b f(t)\ dt$$

1- Riemann

$$\mathrm{Max}\ \Delta x_j \rightarrow 0$$

که همان تعریف انتگرال ریمان است. پس اگر f(t) میزان استخراج نفت در هر لحظه از زمان باشد با فرض پیوستگی این استخراج مقدار کل عرضه نفت در فاصله زمانی [a , b] از انتگرال فوق به دست می‌آید.

مسأله کنترل بهینه[1] در اقتصاد و مدیریت

با مسأله کنترل آشنا هستیم.[18] در مسأله کنترل متغیر زمان، t متغیر پیوسته است. متغیر دوم متغیر وضعیت[2] است که به x(t) نشان می‌دهیم، $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t))$ پس $X \in R^n$ است. $x_i(t)$ را متغیری پیوسته از زمان در نظر می‌گیرند. اگر A فضای ممکن باشد $X \in A$ است. متغیر سومی وجود دارد که موسوم به متغیر کنترل است، این متغیر را به U(t) نشان می‌دهند. داریم:

$$U(t) = \left(u_1(t)\ , u_2(t)\ , \ldots , u_r(t) \right) \in R^r$$

U(t) ، به‌طور تکه‌ای پیوسته است. به وسیله U(t) بر روی متغیر وضعیت X(t) اثر می‌گذاریم. تابعی[3] وجود دارد که آن را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$V\{ U(t) \} = \int_{t_0}^{T} I(x(t), U(t), t)\, dt + F(x(T), T)$$

بین X(t) و U(f) رابطه زیر وجود دارد.

$$\dot{X} = f(U(t), X(t), t)$$

1- Optimal Control Problem 2- State Variable

3- Functional

این معادله موسوم به معادله حرکت[1] است و مسأله تعیین متغیر کنترل U(t) موسوم به کنترل است که به وسیله آن تابعی V{U(t)} ماکزیمم یا می‌نیمم گردد.

$$\text{Max } V\{U(t)\} = \int_{t_0}^{T} I(x(t), U(t), t)\, dt + F(x(T), T)$$

S.t: X = f(U(t) , X(t) , t). این مسأله کنترل موسوم به مسأله بولزا[2] است.

برای مثال در پرتاب یک ماهواره، متغیر کنترل U(t) عبارت است از زمان عمل، اندازه و ابتدا هر یک از نیروهای داخلی مختلف است که می‌تواند بر موشک اعمال و در مسیر آن تغییر حاصل کند. مؤلفه‌های متغیر وضعیت x(t)، در این مثال عبارتند از مسیر موشک، جرم و سرعت،... نسبت به دستگاه خاصی است. در این مسأله، منظور از تابع هدف، به حداکثر رساندن بار اصلی ماهواره است به‌طوری که بتواند با سرعت نهایی در سطح کره ماه فرود آید، تا افراد و وسایل صدمه نبینند. مسأله کنترل بستگی به نوع آن از روشهای حساب تغییرات،[3] روش برنامه‌ریزی پویا[4]، اصل ماکزیمم پونتری‌اگین[5] حل می‌شود. روش اول و سوم با استفاده از معادلات دیفرانسیل، روش دوم از معادلات با مشتقات جزیی حل می‌شود.

مسأله کنترل را به خوبی در اقتصاد می‌توان به‌کار برد. مثلاً می‌خواهیم قیمت مواد نفتی و مشتقات نفتی را در طول زمان به عنوان متغیر وضعیت در نظر بگیریم. متغیر کنترل را میزان استخراج، تغییرات قیمت و غیره در نظر می‌گیریم. تابع هدف را سود حاصل از فروش نفت و مشتقات آن در نظر می‌گیریم. حال مسأله این است چه قیمت برای هر یک از مشتقات نفت در نظر بگیریم، تا سود حاصل برای شرکت نفت ماکزیمم شود. مسأله کنترل به طور گسترده در مدیریت نیز به کار می‌رود، هر چند دانش مدیریت رابطه نزدیکی با اقتصاد دارد.

1- Motion Equation
2. Bolza
3- Calculus of Variations
4- Dynamic Programming
5- Pontryagin L.S.

مثالی از کنترل

بهینه‌سازی پویا برای یک انحصارگر[1]

فرض می‌کنیم مدیریت تولیدی شرکتی عرضه‌کننده کالای A باشد، هزینه کل تولید، تابعی از مقدار تولید، مثلاً Q است. قیمت کالا دائماً متغیر و آن را به $P(t)$ نشان داده که، تابعی پیوسته از زمان فرض می‌شود میزان کالا تابعی از قیمت و تغییرات قیمت، $P'(t)$ است مثلاً فرض می‌کنیم بااستفاده از روشهای اقتصادسنجی توابع هزینه و عرضه را به دست آورده‌باشیم:

$TC = F(Q)$ تابع هزینه

$Q = g[(P(t), P'(t)]$ تابع عرضه

حال این مسأله مطرح است که انحصارگر قیمت کالای خود را چه مقداری تعیین کند، تا سود او در فاصله زمانی [T و ۰] به حداکثر برسد.

سود در هر لحظه $= \pi(t) =$ فروش $-$ هزینه کل $= P(t) . Q - f(Q)$

با جایگذاری داریم:

$$\pi(t) = p(t) . g(p(t), P'(t)) - f[g(p(t), P'(t)]$$

و یا:

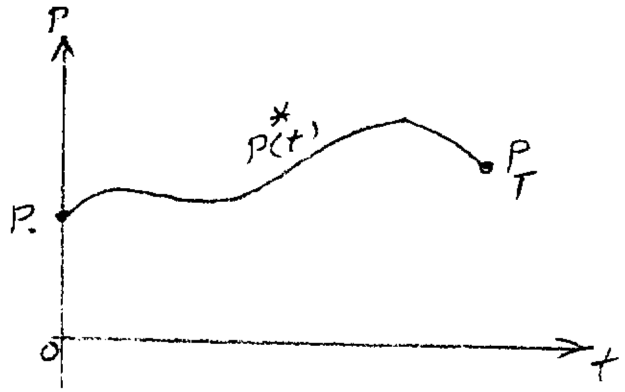
$$\pi(t) = I(p(t), P'(t))$$

سود در فاصله زمانی به صورت

$$\text{Max } \pi = \int_{0}^{T} I\,[p(t), P'(t)]\, dt$$

از این رابطه باید مسیر زمانی $P^*(t)$ قیمت را چنان پیداکرد که سود π حداکثر گردد. [19] این مسأله یک مسأله برنامه‌ریزی پویاست که برای حل آن باید مثلاً از روش اصل ماکزیمم پونتری اِگین یا حساب تغییرات استفاده کرد.

1- Dynamic Optimization of Monopolist



نمودار ۳.

مسیر بهینه قیمت $P^*(t)$ (مثلاً) در نمودار (۳) نشان داده می‌شود. امروزه کتابهای زیادی در این زمینه در رشته‌های مدیریت و اقتصاد استفاده می‌شود.[20] در ایران در رشته اقتصاد از این مقوله بیشتر استفاده می‌شود. برای روشن شدن این موضوع مقاله‌ای مستقل لازم است.

با توجه به محدودیتهای نوشتار، این مثالها تا اندازه‌ای رابطه زیبای بین ریاضیات و مطالب مهم و اساسی مدیریت و اقتصاد را روشن می‌کند. اساتید محترم هر دو رشته با همکاری یکدیگر می‌توانند در به حرکت درآوردن چرخه مهم تولید دانش در این مقوله بسیار مؤثر باشند.

برخی از دانشجویان رشته‌های ریاضی که مطالب ریاضی محض برای آنان کسل کننده است با به کارگیری آن مطالب در اقتصاد و مدیریت به کاربرد زیبای ریاضی بیشتر پی می‌برند و چه بسا در تحصیلات تکمیلی به این رشته‌ها رو آورند. اساتید و دانشجویان رشته‌های مدیریت و اقتصاد نیز می‌توانند با استفاده از ریاضیات نظرات خود را بخوبی بیان کنند.

در پایان دانشجویان رشته‌های مدیریت و اقتصاد نیز باید دریابند که اگر پایه‌های ریاضی خود را تقویت نمایند، امروزه بهتر می‌توانند در گستره دانش اقتصاد و مدیریت به سمت مرزهای دانش حرکت نمایند.

منابع

[1] کورانت ریچارد، رابینز هربرت. *ریاضیات چیست؟* ترجمه سیامک کاظمی صفحهٔ ۸، چاپ نشر نی

[2] The Logical Study of Shape, Arrangement, Quantity and Many Related Concepts (James and James Mathematics Dictionary third edition, Van Nostrand company, Inc.

[3] Iglewitz Boris, Stogle Judith An Introduction to Mathematical Reasoning Temple University.

[4] استوارت، یان. *ریاضیات چیست؟* منبع [1]، صفحه (۸)

[5] قره‌باغیان، مرتضی. *فرهنگ اقتصاد و بازرگانی*، نشر نی، ۱۳۷۳

[6] تفضلی، فریدون. *تاریخ عقاید اقتصادی از افلاطون تا دوره معاصر*، چاپ نشر نی، صفحه ۱۳

[7] Oskar Lange, The Scope and Method to Economics, ***Rewiew of Economic Studies*** 1945, P.45.

[8] C.Chiang, ***Alpha Fundmental Methods of Mathematical Economic***, Second Edition McGraw Hill 1974.

[9] کارنو، استاد آنالیز و مکانیک دانشگاه لیون (۱۸۷۷-۱۸۰۱) ، آرسون جولیوس اتین ژونال دوپــــوی (۱۸۶۶-۱۸۰۴)مـــهندس راه ســاختمان، آلفــرد مــارشال (۱۹۲۴ - ۱۸۴۴) فارغ‌التحصیل رشته ریاضی کالج سنت جان (کمبریج)، جان مینارد کینز (۱۹۴۶ - ۱۸۸۳) فارغ‌التحصیل رشته ریاضی دانشگاه کمبریج

[10] Arrow X.J , Intriligator M.D. ***Handbook of Mathematical Economics,*** Vol.1 Fourth edition 1991 Elsevier.

[11] The Calculus - Based Marginalist Period (1836-1947).

[12] Cournot A. ***Researches into the Matematical Principles of Theory of Wealth***. New Yourk Macmillan (1929) (Translated).

[13] The Set-Theoretical Linear Model Period (1948-1960).

[14] Weber Jean.E., ***Mathematical Analysis Busines and Economic Application,*** by: M.Hossein Pourkazemi, Printed by Shahid Beheshti University, Edition'7.

[15] Intriligator Michael D., ***Mathematical Optimization Translated***, by M.Hossein Pourkazemi Printed by Shahid Beheshti University 1990 Chapters 7, 8, 9.

[16] پورکاظمی، محمدحسین. ***ریاضیات عمومی و کاربردهای آن در اقتصاد بازرگانی***، جلد اول چاپ یازدهم، جلد دوم چاپ پنجم. (کاربردهای مختلفه در اقتصاد و مدیریت ارائه شده است.)

[17] برای ملاحظه معادلات تفاضلی به فصل دوازدهم منبع [16] مراجعه کنید.

[18] این موضوع اولین بار در سال ۱۹۲۴ توسط جی. سی. اوانس در مجله ریاضیات به چاپ رسید. البته در آن سالها هنوز مفهوم کنترل به صورت امروزی تعریف نشده بود. ریاضیدانان در قرن ۱۸ از این مفهوم در فیزیک و ریاضی استفاده کرده بودند.

[19] C.Chiang Alpha Dynamic Optimization 1992.

[20] Kamien Mortin I . and Schwartz Nancy L., ***Dynamic Optimization the Calculus of Variations and Optimal Control in Economic and Management,*** North Western University.